RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Sui sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di genere π e di grado $n \geq 3\pi + 3$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 127-162

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__127_0>

SUI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE DELLO SPAZIO A CURVA CARATTERISTICA DI GENERE π E DI GRADO $n \geq 3\pi + 3$

Memoria (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*)

A norma di un classico risultato di CASTELNUOVO-ENRIQUES una superficie algebrica irriducibile, F_2^n, a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$ e di ordine $n > 2\pi - 2$, è razionale o riferibile birazionalmente a una rigata [1]). Ne consegue che una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, V_3^n, a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$ e di ordine $n > 2\pi - 2$, è razionale [2]) od ha irregolarità superficiale $q_2 > 0$ [3]).

La classificazione cremoniana dei sistemi lineari completi, semplici, irriducibili di superficie algebriche dello spazio lineare S_3, a curva caratteristica (variabile) di genere $\pi \geq 2$ e di grado $n > 2\pi - 2$, può pertanto essere effettuata attraverso alla classificazione proiettiva delle V_3^n a superficie-sezioni regolari, normali in uno spazio lineare S_r e a curve-sezioni di genere π.

(*) Pervenuta in Redazione il 19 ottobre 1953.

1) Ved. G. CASTELNUOVO - F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, « Ann. de l'École Norm. Sup. de Paris », s. III, t. 23, (1906).

2) Ved. G. FANO, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali*, « Ann. di Mat. », s. III, t. 24, (1915); U. MORIN, *Sulla classificazione proiettiva delle varietà a superficie-sezioni razionali*, « Ann. di Mat. », s. IV, t. 18, (1939).

3) Ved., a proposito delle irregolarità di una V_3 algebrica, F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. 28, (1909).

Tale classificazione è nota solamente nei casi $\pi = 2$ [4]) e $\pi = 3$ [5]).

In questa Memoria considero varietà algebriche irriducibili, V_3^n, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$, normali in uno spazio lineare S_r e di ordine $n \geq 3\pi + 3$. Delle stesse do la classificazione proiettiva completa e determino i relativi sistemi lineari rappresentativi. Vengo così implicitamente ad ottenere risposta definitiva alla questione concernente la massima dimensione dei sistemi lineari (non rappresentativi di coni) di superficie algebriche dello spazio S_3, a curva caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere $\pi \geq 2$ [6]), questione dalla quale trae lo spunto questo lavoro.

Dalle successive considerazioni escludo i coni V_3^n in quanto lo studio degli stessi è diretta conseguenza di quello delle superficie algebriche.

I risultati a cui pervengo possono così riassumersi:

I. — *Le V_3^n algebriche irriducibili, non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$, normali in uno spazio lineare S_r e di ordine $n \geq 3\pi + 3$, appartengono ad uno dei seguenti tipi proiettivamente distinti:*

1) *varietà $V_3^{r+\pi-2}$ di S_r $(2\pi + 5 \leq r \leq 3\pi + 4)$, a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi \geq 2$, intersezione residua di una varietà razionale normale M_4^{r-3} (luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi S_3) con un'iperquadrica di S_r passante per $r - \pi - 4$ spazi S_3 della M_4^{r-3} stessa; gli S_3 generatori di tale*

---

[4]) Ved. U. MORIN, *Sui tipi di sistemi lineari di superficie algebriche a curva caratteristica di genere due*, « Ann. di Mat. », s. IV, t. 19, (1940).

[5]) Ved. U. MORIN, *Sulle varietà algebriche a curve-sezioni di genere tre*, « Ann. di Mat. », s. IV, t. 21, (1942).

[6]) Ved., in relazione a tale questione, U. MORIN, *Massima dimensione dei sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di dato genere*, « Rend. del Sem. Mat. di Padova », v. X, (1939): i risultati contenuti in questo lavoro sono però incompleti. La soluzione di analogo problema per i sistemi lineari di curve piane trovasi in G. CASTELNUOVO, *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere*, « Ann. di Mat. », s. II, t. 18, (1890).

M_4^{r-3} possono essere a due a due sghembi, oppure la M_4^{r-3} è un S_0-cono (e allora risulta $r = 2\pi + 5$), o un S_1-cono [7]*;*

2) *rigata V_3^{12} di S_{11}, a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 3$;*

3) *rigata V_3^{13} di S_{12}, a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 3$, o una sua proiezione (da un suo punto su un S_{11} complementare);*

4) *rigata V_3^{21} di S_{17}, a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 6$;*

5) *pseudo-cono d'indice uno* [8] *$V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 2k + 1$ $(k \geq 1)$.*

Tali varietà ammettono, rispettivamente, i seguenti sistemi lineari rappresentativi in uno spazio lineare S_3:

1) *sistema lineare di superficie φ^ν (d'ordine ν opportuno) con una retta base di molteplicità $\nu - 2$ ed altri elementi base;*

2) *sistema lineare di superficie cubiche φ^3 con una retta base semplice e un punto base doppio, non appartenentisi;*

3) *sistema lineare di superficie cubiche φ^3 con un punto base doppio biplanare nel quale sia fisso un piano tangente e k $(k = 0, 1)$ punti base semplici;*

4) *sistema lineare di superficie φ^5 (d'ordine 5) con un punto base quadruplo e una quartica base di genere tre (eventualmente degenere);*

5) *sistema lineare di superficie φ^{k+2} (d'ordine $k + 2 \geq 3$) con una retta base di molteplicità $k - 1$ e su questa un punto base $(k + 1)$-uplo con in esso il cono delle tangenti spezzato in k piani (coincidenti) fissi e in uno variabile per la retta base.*

---

[7] Per S_k-cono s'intende un cono il cui vertice sia uno spazio lineare di dimensione k.

[8] Per *pseudo-cono d'indice p* s'intende una varietà a tre dimensioni, luogo di un sistema ∞^1 di coni quadrici (di S_3) i cui vertici descrivono una curva d'ordine p.

Tra le varietà del tipo 1) sono pure compresi degli *pseudo-coni d'indice p* $(2 \leq 2p \leq \pi)$.

II. — *La dimensione dei sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio lineare S_3, a curva caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere $\pi \geq 2$ e non rappresentativi di coni, può assumere, al massimo, il valore $r = 3\pi + 4$* [9]).

Tale massimo è raggiunto solo da quei sistemi lineari di superficie (a curva caratteristica iperellittica) che possono cremonianamente mutarsi in uno dei seguenti tipi:

a) *sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi+2}$ (d'ordine $2\pi + 2$) con una retta base b di molteplicità 2π, π rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti, su b un punto base B di molteplicità $2\pi + 1$ nel quale siano fissi 2π piani tangenti, e una conica base situata in un piano generico per b e tangente a b in B;*

b$_1$) *sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi+2}$ (d'ordine $\pi + 2$) con una retta base b di molteplicità π, una retta base doppia c incidente b in un punto B di molteplicità $\pi + 1$ nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa (dell'ordine π) e in un piano variabile per b;*

b$_2$) *sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi-\mu-1}$ (d'ordine $2\pi - \mu - 1$; $\mu = 0, 1, ..., \pi - 2$ con una retta base b di molteplicità $2\pi - \mu - 3$, $\pi - \mu - 2$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti, su b un punto base B di molteplicità $2\pi - \mu - 2$ nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa (dell'ordine $2\pi - \mu - 3$) e in un piano variabile per b.*

Le varietà imagini dei suddetti sistemi lineari sono, rispettivamente:

---

[9]) Per gli S_0-coni $V_3{}^n$, il massimo valore della dimensione dello spazio ambiente (e quindi dei relativi sistemi lineari rappresentativi) è $r = 3\pi + 6$. Tale massimo può essere raggiunto, per ogni valore di $\pi \geq 2$, dai coni che da un punto O proiettano una superficie $F_2{}^{4\pi+4}$ (d'ordine $4\pi + 4$) di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni iperellittiche di genere π; oppure, per $\pi = 3$, dai coni che da O proiettano una $F_2{}^{16}$ (d'ordine 16) di S_{14} rappresentabile nel piano mediante il sistema lineare delle quartiche. Ciò deriva immediatamente dai risultati del lavoro di G. CASTELNUOVO, cit. in [6]).

a) *varietà* $V_3^{4\pi+2}$ *di* $S_{3\pi+4}$, *a curve-sezioni iperellittiche di genere* π, *intersezione residua di una varietà* $M_4^{3\pi+1}$ *(che da una retta a proietta una rigata razionale normale* $F_2^{3\pi+1}$ *di* $S_{3\pi+2}$, *a direttrice minima d'ordine* π*) con una iperquadrica di* $S_{3\pi+4}$ *passante per* 2π *spazi lineari* S_3 *della* $M_4^{3\pi+1}$ *stessa;*

b) *pseudo-coni d'indice uno* $V_3^{4\pi+2}$ *di* $S_{3\pi+4}$, *a curve-sezioni iperellittiche di genere* π.

La I parte di questo enunciato verrà stabilita in due successivi capitoli.

Nel primo (suddiviso in quattro paragrafi) verranno considerate V_3^n, non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni iperellittiche. Più precisamente, nel § 1, dopo alcune nozioni preliminari, sarà indicata la genesi di una V_3^n di tale tipo come intersezione residua di una varietà M_4^{r-3} (luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi S_3) con una iperquadrica di S_r passante per $r - \pi - 4$ spazi S_3 della M_4^{r-3} stessa. Nei §§ 2, 3 verranno trattati, rispettivamente, i casi delle V_3^n le cui relative M_4^{r-3} siano degli S_0—, o degli S_1— coni. Nel § 4 verranno poi considerate V_3^n, le cui M_4^{r-3} abbiano gli S_3 generatori a due a due sghembi.

Costituiranno, invece, argomento del secondo capitolo le V_3^n, non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni non iperellittiche.

La II parte dell'enunciato sarà, infine, immediata conseguenza delle conclusioni dei suddetti capitoli. Di questa si tratterà nel capitolo III.

CAPITOLO I

V_3^n A CURVE-SEZIONI IPERELLITTICHE

§ 1. — Nozioni preliminari.

1. — Si consideri una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, V_3^n, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni iperellettiche di genere $\pi \geq 2$, normale in uno spazio lineare S_r (di dimensione r), e di ordine

$$n \geq 3\pi + 3 \,. \tag{1}$$

Tale V_3^n risulta razionale [10]), ed essendo normale pure le sue curve-sezioni sono normali; vale pertanto la relazione

$$r = n - \pi + 2 \,, \tag{2}$$

dalla quale, avuto riguardo alla (1), discende

$$r \geq 2\pi + 5 \,. \tag{3}$$

2. — È noto che la V_3^n in questione contiene un fascio lineare $|Q_2|$ di quadriche [11]) i cui spazi S_3 di appartenenza generano una varietà razionale normale M_4^{r-3} (di dimensione 4 ed ordine $r-3$).

Ci proponiamo di dimostrare che la V_3^n *è intersezione residua della* M_4^{r-3} *con una iperquadrica* Q_{r-1} *di* S_r *passante per* $r - \pi - 4$ *spazi lineari* S_3 *della* M_4^{r-3} *stessa* [12]).

Si consideri, a questo scopo, il sistema lineare $|2F|$ delle superficie, sezioni della V_3^n con le iperquadriche Q_{r-1} di S_r.

---

[10]) Ved. G. CASTELNUOVO - F. ENRIQUES, F. FANO, U. MORIN, loc. cit. in [1]), [2]).

[11]) Ved. F. ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, « Math. Annalen », Bd. 46, (1896).

[12]) Il procedimento seguito per la dimostrazione di questa proposizione è analogo a quello usato nel n. 1 del lavoro citato in [4]) e nel n. 10 del lavoro citato in [5]).

Tale sistema determina, sopra una generica superficie-sezione F della V_3^n, il sistema di curve $|2C|$, doppio del sistema $|C|$ delle curve-sezioni di F.

Indicati con r', n', π', rispettivamente, la dimensione, l'ordine e il genere del sistema $|2C|$, risulta ovviamente $r' \leq n' - \pi' + 1$; quindi, tenuto conto che $n' = 4n$, $\pi' = 2\pi + n - 1$ [13]),

(4) $$r' \leq 3n - 2\pi + 2 .$$

Una generica superficie del sistema $|2F|$ che contenga una superficie-sezione F della V_3^n si spezza in tale F ed in un'ulteriore superficie-sezione generica di V_3^n; ne consegue che è r la dimensione del sistema delle superficie di $|2F|$ che passano per la generica F di V_3^n. La dimensione del sistema $|2F|$ è pertanto data da $\delta = r' + r + 1$, dalla quale, avuto riguardo alle (2), (4), discende

(5) $$\delta \leq 4r + \pi - 3 .$$

Detta d_V la dimensione del sistema lineare delle Q_{r-1} di S_r che contengono la V_3^n, e ricordando che vale $\binom{r+2}{2} - 1$ la dimensione del sistema di tutte le Q_{r-1} di S_r, si ha

$$d_V = \binom{r+2}{2} - 1 - (\delta + 1) ,$$

quindi, in virtù della (5)

(6) $$d_V \geq \frac{1}{2}(r^2 - 5r - 2\pi + 4) .$$

Vogliamo ora determinare la dimensione d_M del sistema lineare delle Q_{r-1} di S_r passanti per la M_4^{r-3}.

Se, in particolare, tale M_4^{r-3} è generata dagli S_3 che da un S_2 fisso proiettano una curva razionale normale C^{r-3} (d'ordine $r - 3$) di un S_{r-3}, la dimensione del sistema in questione

---

13) Ved. ad es. F. ENRIQUES - L. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, Cedam, Padova, (1932), p. 63.

coincide con quella del sistema delle iperquadriche Q_{r-4} dell'S_{r-3} che contengono la C^{r-3} e vale quindi

$$\binom{r-1}{2}-1-[2(r-3)+1]=\frac{1}{2}(r^2-7r+10)\,.$$

Se poi la M_4^{r-3} è di tipo generale, la dimensione d_M non può ovviamente superare quella ora trovata, per cui risulta

$$d_M \leq \frac{1}{2}(r^2-7r+10)\,. \tag{7}$$

Posto $d = d_V - (d_M + 1)$, dalle (6), (7) discende

$$d \geq r-\pi-4\,, \tag{8}$$

quindi, per la (3), $d > 0$. Tanto basta per concludere che la generica Q_{r-1} di S_r che passa per la V_3^n, non contiene di conseguenza la M_4^{r-3}; le Q_{r-1} per la V_3^n segano dunque sulla M_4^{r-3} un sistema lineare, di dimensione $d > 0$, di varietà a tre dimensioni V_3^h, di ordine $h = 2(r-3) - n$. Tenuto conto della (2) si ha poi

$$h = r-\pi-4\,. \tag{9}$$

La generica varietà V_3^h si spezza in h spazi S_3: ciò segue immediatamente dal fatto che la generica Q_{r-1} di S_r passante per la V_3^n, sega l'S_3 generico della M_4^{r-3} in una quadrica Q_2 della V_3^n stessa. La proposizione enunciata all'inizio di questo n. resta così provata.

Si può ancora rilevare che, essendo h la dimensione del sistema lineare completo delle V_3^h di M_4^{r-3} spezzate in h spazi S_3, nella (8) — e di conseguenza nelle (6), (7) — deve valere il segno di uguaglianza.

3. — Una varietà M_4^{r-3} razionale normale (luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi lineari S_3) può avere gli S_3 generatori a due a due sghembi, oppure può essere un cono di vertice un punto A, una retta a, o un piano α [14]).

[14]) Ved. per lo studio delle varietà razionali normali luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi lineari di dimensione qualunque: Bellatalla, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari*, «Atti Acc. di Torino», t. 36, (1901).

Verifichiamo che per la M_4^{r-3} del n. precedente quest'ultimo caso non può presentarsi.

Se infatti fosse α il vertice del cono M_4^{r-3}, un S_{r-1} per α e per $r-3$ quadriche generiche Q_2 della V_3^n, segherebbe quest'ultima in una superficie dell'ordine $2(r-3)$ almeno: e ciò è assurdo in quanto per le (1), (2), risulta $2(r-3) > n$.

Se M_4^{r-3} è un cono di vertice A (o a) la Q_{r-1} generica per V_3^n (in quanto contenente h spazi S_3 di M_4^{r-3}) passa per A (o a).

Tale Q_{r-1} può essere, o meno, un cono di vertice A (o a, o un punto di a). Nella prima eventualità *la V_3^n risulta necessariamente un cono.*

4. — Si supponga che la varietà M_4^{r-3} sia un cono di vertice un punto A (o una retta a), senza che, di conseguenza, la V_3^n risulti un cono.

L'iperquadrica Q_{r-1} (che sega M_4^{r-3} nella V_3^n e in $h = r - \pi - 4$ spazi S_3) passa allora semplicemente per A (o a); da ciò risulta che il punto A (o la retta a) ha per la V_3^n molteplicità $(r-3) - (r - \pi - 4) = \pi + 1$.

Indicati con $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$, ..., $S_3^{(h)}$ gli h S_3 suddetti, sia S^*_{r-1} un generico iperpiano di S_r. Questo sega la M_4^{r-3} in una varietà M_3^{r-3} (luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani) contenente gli h piani $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, ..., $\alpha^{(h)}$, sezioni con l'S^*_{r-1} degli h spazi $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$, ..., $S_3^{(h)}$. L'iperquadrica Q_{r-1} è poi tagliata dall'S^*_{r-1} in una iperquadrica Q^*_{r-2}.

La V_3^n si proietta biunivocamente dal punto A (o da un punto di a) sulla M_3^{r-3}, e su questa è rappresentata dal sistema lineare completo $|\,\Phi\,|$ di superficie, determinato dalle sezioni variabili della M_3^{r-3} con le iperquadriche di S^*_{r-1} che passano per $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, ..., $\alpha^{(h)}$ e per la curva C^u, traccia sull'S^*_{r-1} del cono K_2^n secondo cui l'S_{r-1}, tangente alla Q_{r-1} in A, sega la V_3^n.

Se la M_3^{r-3} è rappresentata in uno spazio lineare S_3 da un sistema lineare di superficie ψ^s (d'ordine s) con una retta base b di molteplicità $s-1$ (in guisa che ai piani $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, ..., $\alpha^{(h)}$ corrispondano h piani $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, ..., $\beta^{(h)}$ per b), *la*

V_3^n può rappresentarsi in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema lineare di superficie, d'ordine ν, $|\varphi^\nu| \equiv |2\psi^s - \beta^{(1)} - \beta^{(2)} - \ldots - \beta^{(h)}|$, avente come ulteriore elemento base la curva C^v (d'ordine v) sezione di una φ^ν con una superficie del sistema $|\psi^s - \beta^{(1)} - \beta^{(2)} - \ldots - \beta^{(h)}|$ ed altri (eventuali) elementi base situati nell'intorno della retta b [15]).

§ 2. — V_3^n la cui M_4^{r-3} sia un S_0-cono.

5. — Supporremo in questo paragrafo che la M_4^{r-3} (luogo degli ∞^1 S_3 ambiente delle quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ della V_3^n) sia un cono di vertice un punto A, senza che per ciò risulti un cono la V_3^n.

Poichè l'iperquadrica Q_{r-1} di S_r, che sega la M_4^{r-3} nella V_3^n e in $h = r - \pi - 4$ spazi lineari S_3, non può essere un cono di vertice A (n. 3), tali S_3 debbono appartenere all'iperpiano tangente in A alla Q_{r-1} stessa; il loro spazio congiungente deve pertanto avere dimensione $\rho \leq r - 1$.

6. — Sia M_3^{r-3} una varietà (luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani) sezione della M_4^{r-3} con un iperpiano generico di S_r.

Indicati con m', m'', rispettivamente, gli ordini della (o di una) curva direttrice minima e della (o di una) superficie rigata minima della M_3^{r-3}, si ha [16])

$$(10) \qquad 2m' \leq m'' \quad , \quad 2m'' \leq r + m' - 3 .$$

In relazione ad m', m'' (che caratterizzano la specie della M_3^{r-3}) si possono presentare i seguenti casi:

a) $2m' < m''$, $2m'' < r + m' - 3$: la M_3^{r-3} possiede una sola direttrice minima e una sola rigata minima appartenentisi;

---

15) Ved. U. Morin, loc. cit. in 4), n. 17; loc. cit. in 5), n. 21.

16) I risultati di questo n. si trovano in C. Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, « Atti Acc. di Torino », t. 21, (1885).

b) $2m' = m''$, $2m'' < r + m' - 3$: sulla M_3^{r-3} vi sono ∞^1 direttrici minime appartenenti all'unica rigata minima;

c) $2m' < m''$, $2m'' = r + m' - 3$: la M_3^{r-3} ha ∞^1 rigate minime passanti per l'unica direttrice minima;

d) $2m' = m''$, $2m'' = r + m' - 3$: su M_3^{r-3} vi sono ∞^2 direttrici minime e ∞^2 rigate minime.

Lo spazio congiungente h piani (qualunque) della M_3^{r-3} ha la dimensione $\rho - 1$ data da:

1) $\rho - 1 = 3h - 1$, se $h \leq m' + 1$;
2) $\rho - 1 = 2h + m'$, se $m' + 1 < h \leq m'' - m'$;
3) $\rho - 1 = h + m'' + 1$, se $m'' - m' < h \leq r - m'' - 3$;
4) $\rho - 1 = r - 1$, se $h > r - m'' - 3$.

7. — Dall'ultima considerazione del n. 5 ($\rho \leq r - 1$) segue che h piani della M_3^{r-3} debbono appartenere ad uno spazio $S_{\rho-1}$, di dimensione $\rho - 1 \leq r - 2$.

È facile vedere che, perchè resti soddisfatta quest'ultima condizione, e tenuto anche conto delle limitazioni (3), (10) e delle $\pi \geq 2$, $m' \geq 1$ [17]), i casi 1), 2), 4) del n. precedente non possono verificarsi; può invece presentarsi il caso 3) solo se

$$m'' \leq \pi + 1. \tag{11}$$

8. — Vogliamo qui dimostrare che, *affinchè l'intersezione residua di una M_4^{r-3} (S_0-cono) con una iperquadrica Q_{r-1} di S_r per h suoi spazi S_3, sia una V_3^n (con un punto A di molteplicità $\pi + 1$) irriducibile, deve necessariamente risultare*

$$h \leq m''. \tag{12}$$

Facciamo a questo scopo l'ipotesi assurda $h > m''$.

Considereremo separatamente due casi.

1° CASO: $r > 2\pi + 5$. — Risulta $h > 2m'$; se infatti fosse

[17]) Se fosse $m' = 0$, la M_3^{r-3} sarebbe un S_0-cono, quindi la M_4^{r-3} un S_1-cono, il che resta escluso dall'ipotesi iniziale del n. 5.

$h \leq 2m'$, si avrebbe, in virtù della prima delle (10), e delle (9), (11), $r \leq 2\pi + 5$.

Sulla M_3^{r-3} si possono determinare tre curve direttrici razionali normali $C^{m'}$, $C^{m''-m'}$, $C^{r-m''-3}$ (degli ordini m', $m''-m'$, $r-m''-3$) appartenenti rispettivamente a tre spazi lineari, $S_{m'}$, $S_{m''-m'}$, $S_{r-m''-3}$ (tra loro indipendenti) e tali che i piani generatori della M_3^{r-3} stabiliscono tra di esse un riferimento proiettivo. Le rette congiungenti punti corrispondenti, in tale riferimento, della $C^{m'}$ e $C^{m''-m'}$, determinano l'unica rigata minima $F_2^{m''}$ (d'ordine m'') della M_3^{r-3} (n. 6).

La Q_{r-1} per gli h S_3 di M_4^{r-3} è segata, dall'S_{r-1} ambiente della M_3^{r-3}, in una iperquadrica Q_{r-2} di S_{r-1} contenente h piani generatori della M_3^{r-3} (sezioni degli h S_3 con l'S_{r-1}), quindi h rette generatrici della $F_2^{m''}$.

Poichè si è visto che $h > 2m'$, la Q_{r-2} contiene, oltre alle h generatrici della $F_2^{m''}$, la sua direttrice $C^{m'}$.

Proviamo che, di conseguenza, Q_{r-2} contiene anche la $F_2^{m''}$. Se infatti così non fosse la segherebbe, fuori della $C^{m'}$ e delle h generatrici, in una curva C^k (eventualmente comprendente un certo numero di generatrici), il cui ordine $k = 2m''-m'-h$ dovrebbe soddisfare (in virtù dell'ipotesi assurda $h > m''$) alla limitazione $k < m'' - m'$. Si possono qui presentare due eventualità:

a) C^k si spezza in k generatrici: la Q_{r-2} verrebbe allora ad incontrare la $C^{m''-m'}$ in (almeno) $h+k$ punti e quindi [poichè $h+k = h + (2m''-m'-h) = 2m''-m' > 2(m''-m')$] la conterrebbe tutta; ne seguirebbe [in quanto $m' + (m''-m') + h = m'' + h > 2m''$] che anche la $F_2^{m''}$ risulterebbe situata sulla Q_{r-1}.

b) C^k comprende (almeno) una direttrice di $F_2^{m''}$: se così fosse sulla rigata $F_2^{m''}$ vi sarebbe, oltre alla $C^{m'}$, una direttrice di ordine inferiore ad $m''-m'$, il che è manifestamente assurdo.

Proiettando $F_2^{m''}$ da A si ottiene un S_0-cono $V_3^{m''}$ (d'ordine m''). Questo viene ad avere in comune con l'iperquadrica Q_{r-1} la rigata $F_2^{m''}$ ed $h (> m'')$ piani (almeno) dal che discende che risulta contenuto nella Q_{r-1} stessa. Ciò porta di conseguenza che la varietà V_3^n si spezzi nella $V_3^{m''}$ ed in una varietà residua.

2° CASO: $r = 2\pi + 5$. — Se $h > 2m'$, vale il ragionamento del 1° CASO. Se invece $h = 2m'$ [18]), dalla prima delle (10) discende direttamente $h \leq m''$.

L'asserto iniziale risulta così provato.

9. — Dalle (11), (12), e tenuto conto delle (2), (3), (9) segue

(13) $r = 2\pi + 5 \,,\, n = 3\pi + 3 \,,\, m'' = \pi + 1 \,,\, h = \pi + 1 \,.$

Lo spazio congiungente h S_3 di M_4^{r-3} ha poi la dimensione $2\pi + 4$ [n. 6, 3)].

Si può pertanto concludere che: *se esiste una V_3^n del tipo considerato nel n. 5, questa non può essere che una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ (con un punto A di molteplicità $\pi + 1$), la cui $M_4^{2\pi+2}$ proietti da A una $M_3^{2\pi+2}$ avente un'unica rigata minima dell'ordine* $\pi + 1$.

10. — In questo e nel n. successivo proveremo l'effettiva esistenza della V_3^n di cui al n. 9.

Si consideri, a questo scopo, una M_4^{r-3} di S_r che da un punto A proietti una varietà razionale normale M_3^{r-3} di S_{r-1}, non cono, luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani ed avente un'unica superficie rigata minima dell'ordine m''.

Intenderemo sino alla fine di questo paragrafo che r, n, m'', h abbiano i valori dati dalle (13).

Nello spazio lineare $S_r(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, sia $x_r = 0$ l'equazione dell'iperpiano $\overline{S}_{r-1}$ congiungente h (fissati) spazi S_3 della M_4^{r-3}.

Una Q_{r-1} generica per tali S_3 non è necessariamente un cono di vertice A ed ha come iperpiano tangente in A l'$\overline{S}_{r-1}$.

---

[18]) È immediato verificare che non può essere $h < 2m'$.

L'equazione della Q_{r-1} può, pertanto, scriversi nella forma

$$
(14) \qquad F(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv f(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) + \\
+ x_r(a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_rx_r) = 0,
$$

dove $f(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) = 0$ è l'equazione, dentro all'$\overline{S}_{r-1}$, di un generico ipercono quadrico di vertice A passante per gli h spazi S_3, ed $a_0, a_1, \dots, a_r$ sono costanti arbitrarie.

Calcoliamo la dimensione δ_h del sistema lineare delle Q_{r-1} di S_r per gli h S_3. Questa, ove si osservi la (14), è data da

$$
(15) \qquad \delta_h = \delta^* + (r+1),
$$

essendo δ^* la dimensione del sistema lineare degli iperconi quadrici, di vertice A, appartenenti all'$\overline{S}_{r-1}$ e passanti per gli h S_3. Tale dimensione δ^* è, ovviamente, uguale a quella delle iperquadriche Q_{r-3} di un generico S_{r-2} di $\overline{S}_{r-1}$, passanti per gli h piani secondo cui l'S_{r-2} sega i fissati h spazi S_3. Si ha dunque

$$
(16) \qquad \delta^* \geq \binom{r}{2} - 1 - 6h,
$$

valendo il segno di uguaglianza se, e soltanto se, le condizioni imposte dal passaggio per gli h piani di S_{r-2} sono indipendenti.

Dalla (15) e in virtù della (16), si ha

$$
(17) \qquad \delta_h \geq \binom{r}{2} + r - 6h.
$$

La dimensione del sistema lineare delle varietà V_3^n segate sulla M_4^{r-3}, fuori degli h S_3, dalle Q_{r-1} del sistema ora considerato, è data da

$$
(18) \qquad D = \delta_h - (d_M + 1),
$$

avendo d_M il valore (7).

Dalla (18), tenuto conto delle (7), (17) e della prima e quarta delle (13), si ottiene

$$
(19) \qquad D \geq 2\pi + 8.
$$

11. — Risulta chiaro, tenuto anche conto delle considerazioni precedenti, che la generica Q_{r-1} per h S_3 generatori della M_4^{r-3} (n. 10) incontra ulteriormente quest'ultima in una V_3^n del tipo voluto (n. 9) se, e soltanto se:

a) non passa di conseguenza per nessun altro S_3 generatore di M_4^{r-3};

b) non contiene alcuna S_2-V_3^i direttrice (d'ordine $i \geq m''$) della M_4^{r-3} [19]).

Proviamo che, ove valgano le (13), le proposizioni ora enunciate risultano verificate.

La proposizione a) è evidente: basta infatti pensare che se la generica Q_{r-1} per h S_3 generatori della M_4^{r-3} ne contenesse, di conseguenza, un altro, lo spazio congiungente i primi con quest'ultimo verrebbe ad essere l'S_r ambiente [n. 6, 4)]; la Q_{r-1} sarebbe pertanto un cono, il che non può avvenire data la sua genericità (n. 10).

Verifichiamo ora la validità della preposizione b). A tale scopo si faccia l'ipotesi assurda ch'essa non valga. La Q_{r-1} contiene allora una S_2-V_3^i, proiezione da A di una rigata F_2^i (d'ordine $i \geq m''$) situata sulla varietà M_3^{r-3}, sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-1} generico. Tale S_2-V_3^i deve appartenere all'iperpiano tangente $\overline{S}_{r-1}$ perchè, se così non fosse, la Q_{r-1}, dovendo contenere gli ∞^1 piani per A della S_2-V_3^i (non giacenti su $\overline{S}_{r-1}$) risulterebbe un cono. La sezione della M_4^{r-3} con l'$\overline{S}_{r-1}$ comprende dunque la S_2-V_3^i e gli h spazi S_3; da ciò discende, tenuto anche conto delle (13),

$$i = m'' = \pi + 1\,, \tag{20}$$

cioè S_2-V_3^i è proiezione da A dell'unica rigata minima $F_2^{m''}$ della M_3^{r-3}.

L'intersezione residua con M_4^{r-3} della Q_{r-1} per la S_2-V_3^i

---

[19]) Per S_2-V_3^i direttrice s'intende una varietà luogo di ∞^1 piani che da A proietta una rigata F_2^i della M_3^{r-3} (sezione di M_4^{r-3} con un generico S_{r-1}). Ogni S_3 di M_4^{r-3} contiene, ovviamente, un piano della S_2-V_3^i. Una Q_{r-1} generica per la S_2-V_3^i sega il generico S_3 di M_4^{r-3} in due piani, uno dei quali (quello situato sulla S_2-V_3^i) passa per A.

e per gli h S_3 è una varietà (luogo di un fascio di piani), V_3^l, il cui ordine l, avuto anche riguardo alle (13), (20), vale $l = 2(r-3) - i - h = r - 3 = 2\pi + 2$. La V_3^l appartiene pertanto ad un S_{r-1}, il che ci permette di affermare che può ottenersi come intersezione della M_4^{r-3} con un (generico) iperpiano S_{r-1} di S_r.

Da ciò segue che la dimensione del sistema lineare delle $V_3^n (= V_3^i + V_3^l)$, segate su M_4^{r-3} dalle Q_{r-1} per gli h S_3, vale $D = r = 2\pi + 5$, il che contrasta con la (19). Resta così provata anche la proposizione b).

Da quanto precede si può concludere che una V_3^n di S_r $(r \geq 2\pi + 5)$ del tipo studiato in questo paragrafo, non può essere che una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ intersezione residua di una $M_4^{2\pi+2}$ *(che da un punto A proietta una $M_3^{2\pi+2}$ razionale normale di $S_{2\pi+4}$, non cono, luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani ed avente un'unica rigata minima d'ordine $\pi + 1$) con una iperquadrica $Q_{2\pi+4}$ di $S_{2\pi+5}$ passante per $\pi + 1$ spazi lineari S_3 della $M_4^{2\pi+2}$ stessa.*

12. — Una $M_3^{2\pi+2}$, non cono, con rigata minima (unica), d'ordine $\pi + 1$ e direttrice minima (posta sulla rigata minima) d'ordine m' $\left(1 \leq m' \leq \frac{m''}{2}\right)$, può rappresentarsi, in uno spazio lineare S_3, mediante il sistema lineare di superficie $\phi^{\pi+1}$ (d'ordine $\pi + 1$) aventi una retta base b di molteplicità π, lungo questa $m' - 1$ piani tangenti fissi e in $\pi - 2m' + 1$ suoi punti fisso un ulteriore piano tangente (cioè $m' - 1$ rette base incidenti b e ad essa infinitamente vicine, e $\pi - 2m' + 1$ punti base infinitamente vicini a b); nella rappresentazione in questione ai piani per la retta b corrispondono i piani generatori della $M_3^{2\pi+2}$ [20]).

Dal n. 4 segue direttamente che una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ del tipo precisato nel n. 11, può essere rappresentata in uno spazio lineare S_3 dal *sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi+1}$ (d'ordine $\pi + 1$) con una retta base b di molteplicità* $\pi - 1$, $m' - 1$

---

[20]) Ved. C. SEGRE, loc. cit. in [16]).

$(2 \leq 2m' \leq \pi + 1)$ *rette base doppie incidenti b e ad essa infinitamente vicine e $\pi - 2m' + 1$ punti base doppi infinitamente vicini a b; inoltre in ogni punto di b le $\varphi^{\pi+1}$ debbono avere gli stessi $\pi - 1$ piani tangenti* [21]) ($2m' - 2$ dei quali a due a due coincidenti, fissi lungo b e passanti per le $m' - 1$ rette base doppie; in ciascuno dei punti di b, a cui è infinitamente vicino un punto base doppio, altri due piani tangenti coincidenti e passanti per il punto doppio in questione; in un punto P, generico di b, $\pi - 2m' + 1$ piani tangenti generalmente distinti e variabili con P) [22]).

§ 3. — V_3^n la cui M_4^{r-3} sia un S_1-cono.

13. — Supponiamo ora che la M_4^{r-3} (luogo degli ∞^1 S_3 di appartenenza delle quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ della V_3^n) sia un cono di vertice una retta a, pur non risultando un cono la V_3^n.

Poichè l'iperquadrica Q_{r-1} di S_r, che sega M_4^{r-3} *nella* V_3^n e in $h = r - \pi - 4$ spazi lineari S_3, non può essere un cono (n. 3), tali S_3 debbono appartenere all'S_{r-2} polare di a rispetto alla Q_{r-1} stessa; il loro spazio congiungente deve pertanto avere dimensione $\rho \leq r - 2$.

14. — Sia M_2^{r-2} una superficie rigata, sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-2} generico di S_r. È noto che [23]), indicato con m l'ordine della (o di una) curva direttrice minima della M_2^{r-3},

---

21) Poichè il sistema $|\phi^{\nu} - \beta^{(1)} - \beta^{(2)} - \ldots - \beta^{(h)}|$ del n. 4 diviene in questo caso un sistema di superficie d'ordine 0, l'imporre al sistema $|\varphi^{\nu}|$ la curva base C^{ν} equivale ad imporre alle φ^{ν} la condizione ch'esse abbiano in ogni punto della retta b gli stessi piani tangenti.

22) Se $\pi = 2$ (quindi $m' = 1$) il sistema lineare rappresentativo della V_3^9 di S_9 diviene quello delle φ^3 *tangenti lungo una retta b e su questa un punto doppio biplanare con in esso un piano tangente* (*per b*) *fisso per tutte le φ^3, e uno variabile* (*generalmente non per b*).

23) I risultati di questo n. trovansi in C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, «Atti Acc. di Torino», t. 19, (1883).

deve essere

$$m \leq \frac{r-3}{2}, \tag{21}$$

valendo il segno di uguaglianza se, e soltanto se, r è numero dispari e sulla M_2^{r-3} vi sono ∞^1 direttrici minime.

Lo spazio congiungente h generatrici (qualunque) di M_2^{r-3} ha la dimensione $\rho - 2$ data da:

1) $\rho - 2 = 2h - 1$, se $h \leq m + 1$;

2) $\rho - 2 = h + m$, se $m + 1 < h \leq r - m - 3$;

3) $\rho - 2 = r - 2$, se $h > r - m - 3$.

15. — Dalla $\rho \leq r - 2$ del n. 13, segue che h generatrici della M_2^{r-3} debbono appartenere ad uno spazio $S_{\rho-2}$, di dimensione $\rho - 2 \leq r - 4$.

Andiamo a vedere quando resta verificata quest'ultima limitazione in relazione ai tre casi del n. precedente.

1) Dalla $\rho - 2 \leq r - 4$, e tenuto conto delle (3), (9), si trae facilmente $r = 2\pi + 5$; quindi, a norma della (21) e della $h \leq m + 1$ si ha $\pi \leq m \leq \pi + 1$.

2) Dalla $\rho - 2 \leq r - 4$ segue $m \leq \pi$. Posto, in relazione alla (3),

$$r = 2\pi + 5 + \sigma, \qquad (\sigma \geq 0), \tag{22}$$

dalla $m + 1 < h$ si ha $m \leq \pi - 1 + \sigma$: cioè $m \leq \pi - 1$, se $r = 2\pi + 5$; oppure $m \leq \pi$, se $r > 2\pi + 5$.

3) La $\rho - 2 \leq r - 4$ non è verificata.

In conclusione, debbono essere n e c e s s a r i a m e n t e soddisfatte le seguenti condizioni:

$$m \leq \pi + 1, \quad \text{se} \quad r = 2\pi + 5; \tag{23}$$

$$m \leq \pi, \quad \text{se} \quad r > 2\pi + 5. \tag{24}$$

16. — Vogliamo dimostrare che, *affinchè l'intersezione residua di una M_4^{r-3} (S_1-cono) con una iperquadrica Q_{r-1} di S_r per h suoi spazi S_3, sia una V_3^n (con una retta a di moltepli-*

cità $\pi + 1$) irriducibile, deve necessariamente risultare

$$h \leq 2m . \tag{25}$$

Se infatti fosse $h > 2m$, la varietà V_3^m (di M_4^{r-3}), proiezione da a della (o di una) curva direttrice minima della rigata M_2^{r-3} (n. 14), avrebbe in comune con la Q_{r-1}, $h > 2m$ piani (almeno), quindi sarebbe situata sulla Q_{r-1} stessa. La varietà V_3^n si spezzerebbe allora nella V_3^m suddetta e in una varietà residua.

17. — Se vale la (23), dalla (25) e avuto riguardo alla (9), segue $\pi + 1 \leq 2m \leq 2\pi + 2$.

Se vale invece la (24), delle (25), (9) e tenuto conto della (22), si ha $\pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi$.

Si può pertanto concludere che, *affinchè esistano delle V_3^n del tipo considerato nel n. 13, debbono necessariamente verificarsi le seguenti condizioni*:

$$r = 2\pi + 5 , \qquad m = \pi + 1 ; \tag{26}$$

$$r = 2\pi + 5 + \sigma , \quad \pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi , \tag{27}$$

$$(0 \leq \sigma \leq \pi - 1) .$$

Ove valgano le (27), la M_2^{r-3} ha una sola direttrice minima d'ordine m (n. 14). In entrambi i casi, tenuto anche conto della $\pi \geq 2$, è verificata la limitazione

$$r \leq 3\pi + 4 .$$

18. — Ove valgano le (26), l'effettiva esistenza della corrispondente $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ si può provare con ragionamento analogo a quello dei nn. 10, 11.

L'esistenza delle V_3^n relative alle condizioni (27) [in relazione alle quali M_2^{r-3} ha una sola direttrice minima d'ordine m] appare evidente appena si osservi che è immediato verificare che una iperquadrica generica Q_{r-1} di S_r che passi per h spazi S_3 di una M_4^{r-3} (cono di vertice una retta a) non contiene, di conseguenza, la varietà V_3^m (che da a proietta la direttrice minima della M_2^{r-3}, sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-2} generico), ne alcun ulteriore S_3 generatore della M_4^{r-3}. Da ciò segue facilmente che tale Q_{r-1} non contiene neppure alcuna altra varietà, luogo di ∞^1 piani, subordinata alla M_4^{r-3} stessa.

Si può così concludere che le V_3^n di S_r ($r \geq 2\pi + 5$) studiate in questo paragrafo, possono essere dei seguenti tipi:

I) $V_3^{3\pi+3}$ *di* $S_{2\pi+5}$ *intersezione residua di una* $M_4^{2\pi+2}$ (*che da una retta a proietta una rigata razionale normale* $M_2^{2\pi+2}$ *di* $S_{2\pi+4}$ *con* ∞^1 *direttrici minime d'ordine* $\pi + 1$) *con una iperquadrica* $Q_{2\pi+4}$ *di* $S_{2\pi+5}$ *passante per* $\pi + 1$ *spazi lineari* S_3 *della* $M_4^{2\pi+2}$ *stessa;*

II) $V_3^{r+\pi-2}$ *di* S_r ($r = 2\pi + 5 + \sigma$, $0 \leq \sigma \leq \pi - 1$) *intersezione residua di una* M_4^{r-3} [*che da una retta a proietta una rigata razionale normale* M_2^{r-3} *di* S_{r-2} *con una sola direttrice minima d'ordine m* ($\pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi$)] *con una iperquadrica* Q_{r-1} *di* S_r *passante per* $r - \pi - 4$ *spazi lineari* S_3 *della* M_4^{r-3} *stessa.*

19. — A seconda che le V_3^n appartengono ai tipi I o II del n. precedente, le relative rigate M_2^{r-3} possono ammettere, in un piano, i seguenti sistemi lineari rappresentativi [24]:

I. — Sistema lineare di curve $C^{\pi+2}$ (d'ordine $\pi + 2$) con un punto base B di molteplicità $\pi + 1$ e un punto base semplice;

II. — Sistema lineare di curve C^{r-m-3} (d'ordine $r-m-3$) con un punto base B di molteplicità $r - m - 4$ ed in questo $r - 2m - 4$ tangenti fisse.

Le ∞^1 rette della rigata M_2^{r-3} hanno come imagini, in entrambi i sistemi, le rette per il punto base B.

Dai sistemi lineari I, II, si ricava direttamente che la M_3^{r-3}, proiezione della rigata M_2^{r-3} da un punto generico della retta a, può rappresentarsi, in uno spazio lineare S_3, mediante i seguenti sistemi lineari:

I. — Sistema lineare di superficie $\psi^{\pi+2}$ (d'ordine $\pi + 2$) con una retta base b di molteplicità $\pi + 1$, una retta base c

---

[24]) Ved. C. SEGRE, loc. cit. in [23]).

semplice incidente la prima in un punto B nel quale sono fissi i $\pi + 1$ piani tangenti;

II. — Sistema lineare di superficie ψ^{r-m-3} (d'ordine $r - m - 3$) con una retta base b di molteplicità $r - m - 4$, lungo questa $r - 2m - 4$ piani tangenti fissi e in un suo punto B fissi tutti gli $r - m - 4$ piani tangenti.

In tali rappresentazioni, ai piani per la retta b corrispondono i piani generatori della M_3^{r-3}.

Da questi ultimi sistemi lineari e valendosi delle considerazioni del n. 4, si traggono infine per i due tipi di V_3^n, di cui al n. 18, i seguenti sistemi lineari rappresentativi in uno spazio lineare S_3:

I) *sistema lineare di superficie* $\varphi^{\pi+3}$ (d'ordine $\pi + 3$) *con una retta base* b *di molteplicità* $\pi + 1$, *una retta base doppia* c *incidente* b *in un punto* B *di molteplicità* $\pi + 2$, *in* B *fissi* $\pi + 1$ *piani tangenti* (*per* b); *inoltre una curva base* $C^{\pi+1}$ (*d'ordine* $\pi + 1$) *sezione* (*fuori di* c) *di una* $\varphi^{\pi+3}$ *con un piano generico per* c;

II) *sistema lineare di superficie* $\varphi^{r+\pi-2m-2}$ (*d'ordine* $r + \pi - 2m - 2$, *con* $r = 2\pi + 5 + \sigma$, $\pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi$, $0 \leq \sigma \leq \pi - 1$) *con una retta base* b *di molteplicità* $r + \pi - 2m - 4$, $r - 2m - 4$ *rette base doppie infinitamente vicine a* b *e ad essa incidenti, su* b *un punto base* B *di molteplicità* $r + \pi - 2m - 3$ *con in esso fissi* $r - m - 4$ *piani tangenti* (*per* b), *in* $2m - r + \pi + 4$ *punti di* b *fisso un ulteriore piano tangente* (*per* b); *inoltre* $\pi - m + 1$ *coniche base sezioni* (*fuori di* b) *di una* $\varphi^{r+\pi-2m-2}$ *con* $\pi - m + 1$ *piani generici per* b [25]).

---

[25]) La M_4^{r-3} relativa alla $V_3^{r+\pi-2}$ imagine di questo sistema lineare contiene l'S_1-cono V_3^m che da a proietta la direttrice minima C^m della rigata M_2^{r-3} (sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-2} generico). La iperquadrica Q_{r-1} di S_r (che sega la M_4^{r-3} nella $V_3^{r+\pi-2}$ e in $r - \pi - 4$ spazi S_3) passa per $r - \pi - 4$ piani del cono V_3^m; quindi (poichè, in questo caso, $m < r - \pi - 4$) la sega ulteriormente in $2m - r + \pi + 4$ piani. Il cono $K_2^{r+\pi-2}$ (n. 4) si spezza, di conseguenza, in $2m - r + \pi + 4$ piani e in un cono $K_2^{2r-2m-6}$, per cui la C^u base si scinde in $2m - r + \pi + 4$ generatrici del cono V_2^m (sezione di V_3^m con l'S^*_{r-1} ambiente della M_3^{r-3}) e in un'ulteriore curva C^i. Alla

§ 4. — V_3^n la cui M_4^{r-3} non sia un cono.

20. — Se la M_4^{r-3} non è un cono, le quadriche del fascio $|Q_2|$ della V_3^n sono a due a due non incidenti. La V_3^n si può allora proiettare biunivocamente dall'S_3 di una sua quadrica Q_2 sopra uno spazio lineare S_{r_1}, di dimensione $r_1 = r - 4$.

La proiezione è una varietà $V_3^{n_1}$, d'ordine $n_1 = n - 6$ ed a curve-sezioni di genere $\pi_1 = \pi - 2$. Infatti un iperpiano generico, S_{r-1}, per l'S_3 della Q_2, sega la V_3^n in una varietà che si spezza nella Q_2 stessa e in una superficie F_2^{n-2} (d'ordine $n-2$) che ha in comune con la Q_2 una conica C^2. Un S_{r-2} generico dell'S_{r-1} e passante per il piano di C^2, sega la F_2^{n-2} in una curva che si spezza nella conica C^2 ed in una curva C^{n-4} (d'ordine $n-4$) avente in comune due punti con la C^2 medesima. Da ciò segue che le curve sezioni della $V_3^{n_1}$ hanno l'ordine $n_1 = n - 4 - 2 = n - 6$ ed il genere (in quanto normali nel relativo S_{r_1-2} ambiente) $\pi_1 = n_1 - r_1 + 2 = \pi - 2$.

Se la $V_3^{n_1}$ è ancora del tipo della V_3^n (cioè tale che la relativa $M_4^{r_1-3}$ non sia un cono), si potrà ripetere il procedimento ora indicato, e così di seguito, sino a quando si giungerà ad una $V_3^{n_p}$ dell'S_{r_p}, a curve sezioni di genere π_p, di uno dei seguenti tipi:

1°) $V_3^{n_p}$ cono, a curve sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 0$ [26]);

2°) $V_3^{n_p}$ non cono, a curve sezioni razionali ($\pi_p = 0$) o ellittiche ($\pi_p = 1$);

3°) $V_3^{n_p}$ non cono, a curve sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 2$ (la cui $M_4^{r_p-3}$ sia un S_0-, o un S_1-cono).

Risulta poi

$$(28) \qquad r_p = r - 4p, \quad n_p = n - 6p, \quad \pi_p = \pi - 2p, \quad \left(1 \leq p \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

C^i corrispondono, nel sistema lineare rappresentativo della $V_3^{r+\pi-2}$, le $\pi - m + 1$ coniche base, mentre invece le $2m - r + \pi + 4$ generatrici suddette (che hanno come imagini le giaciture per la retta b) portano di conseguenza gli ulteriori $2m - r + \pi + 4$ piani tangenti fissi in altrettanti punti della retta base b.

[26]) In particolare, dunque, razionali o ellittiche.

e le (1), (3), si mutano nelle

(29) $$n_p \geq 3\pi_p + 3 \quad , \quad r_p \geq 2\pi_p + 5.$$

21. — Se la $V_3{}^n$ è rappresentata in uno spazio lineare S_3 da un sistema lineare di superficie $|\varphi^\nu|$, in cui alle quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ corrispondano i piani per una retta b, il sistema residuo rispetto a $|\varphi^\nu|$ di un gruppo di p piani generici per tale retta viene ad essere rappresentativo nell'S_3 della $V_3{}^{n_p}$, ottenuta dalla $V_3{}^n$ con successive p proiezioni (n. 20).

Inversamente, dal sistema lineare rappresentativo della $V_3{}^{n_p}$ si può ottenere quello relativo alla $V_3{}^n$.

Nei numeri successivi considereremo, separatamente, le $V_3{}^n$ che determinano i tre tipi di $V_3{}^{n_p}$ del n. 20. Di tali $V_3{}^n$ daremo (seguendo il procedimento ora indicato), i sistemi lineari rappresentativi venendo, in tal modo, a provare la loro esistenza.

22. — La $V_3{}^{r_p}$ sia un cono a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 2$.

La sezione di tale $V_3{}^{n_p}$ con un iperpiano generico S_{r_p-1} di S_{r_p} ($r_p \geq 2\pi_p + 5$) è allora una superficie razionale normale $F_2{}^{n_p}$ (non rigata e contenente un fascio lineare $|C^2|$ di coniche) che presenta le seguenti caratteristiche [27]:

1) è di ordine $n_p = 4\pi_p - k + 4 \quad (0 \leq k \leq \pi_p + 1)$ [28];

2) può ottenersi come proiezione di una $F_2{}^{4\pi_p+4}$ di $S_{3\pi_p+5}$ da k suoi punti;

3) è rappresentabile nel piano mediante i seguenti sistemi lineari minimi:

I) sistema lineare di curve C^{π_p+3} (d'ordine $\pi_p + 3$) con un punto base B $(\pi + 1)$-uplo ordinario, un punto base C dop-

[27]) Ved. G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. 4, (1890).

[28]) La limitazione $k \leq \pi_p + 1$ è conseguenza della prima delle (29); k sta poi ad indicare il numero delle coniche degeneri del fascio $|C^2|$.

pio e k $(0 \leq k \leq \pi_p + 1)$ punti base semplici ($F_2^{n_p}$ di prima specie);

II) sistema lineare di curve $C^{2\pi_p-\mu+2}$ (d'ordine $2\pi_p-\mu+2$; $\mu = 0, 1, ..., \pi_p$) con un punto base B di molteplicità $2\pi_p - \mu$ a cui sono infinitamente vicini $\pi_p - \mu$ punti base doppi C_1, C_2, ..., $C_{\pi_p-\mu}$, e inoltre $k(0 \leq k \leq \pi_p + 1)$ punti base semplici ($F_2^{n_p}$ di seconda specie e del gruppo μ).

In dette rappresentazioni il fascio di rette per b è imagine del fascio di coniche $| C^2 |$.

In corrispondenza a tali $F_2^{4\pi_p-k+4}$ si hanno dei coni $V_3^{4\pi_p-k+4}$ di $S_{3\pi_p-k+6}$ $(0 \leq k \leq \pi_p + 1)$ di prima o seconda specie. Ciascuno di questi può ottenersi come proiezione di un cono $V_3^{4\pi_p+4}$ di $S_{3\pi_p+6}$ da k suoi punti [ved. proprietà 3)].

23. – Poggiando sulle rappresentazioni piane delle $F'^{4\pi_p-k+4}_2$ vogliamo ora determinare i sistemi lineari rappresentativi dei coni $V_3^{4\pi_p-k+4}$.

Supponiamo, in primo luogo, $k = 0$.

Se la $F_2^{4\pi_p+4}$ è rappresentata su un piano α da un sistema lineare del tipo I (n. 22), ad una curva razionale di α, C^{π_p+1} (d'ordine $\pi_p + 1$), col punto B di molteplicità π e passante semplicemente per C, corrisponde sulla $F_2^{4\pi_p+4}$ una curva Γ dell'ordine $(\pi_p + 3)(\pi_p + 1) - (\pi_p + 1)\cdot\pi_p - 2\cdot 1 = = 3\pi_p + 1$; la retta fondamentale BC ha poi come imagine sulla $F_2^{4\pi_p+4}$ un punto Q. Il cono $V_3^{4\pi_p+4}$ si proietta biunivocamente dall'$S_{3\pi_p+2}$ di appartenenza di Γ e Q su un S_3 complementare; al sistema delle sue sezioni iperpiane corrisponde, in tale S_3, un sistema lineare di superficie φ^{π_p+3} (d'ordine $\pi_p + 3$) con una retta base b di molteplicità $\pi_p + 1$, una retta base doppia c incidente la b in un punto base B di molteplicità $\pi_p + 2$, nel quale risulti fisso il cono delle tangenti.

Se la $F'^{4\pi_p+4}_2$ ammette invece su α una rappresentazione del tipo II (n. 22), ad una curva razionale di α, C^{π_p+1} (d'ordine $\pi_p + 1$) che abbia in B un punto di molteplicità π_p e sia tangente alle rette BC_1, BC_2, ..., $BC_{\pi_p-\mu}$, corrisponde sulla $F_2^{4\pi_p+4}$ una curva Γ dell'ordine $(2\pi_p - \mu + 2)(\pi_p + 1) - - (2\pi_p - \mu)\cdot\pi_p - 2(\pi_p - \mu) = 2\pi_p + \mu + 2$. Il cono $V_3^{4\pi_p+4}$

si proietta biunivocamente dall'$S_{3\pi_p+2}$ di appartenenza della F e dei $\pi_p - \mu$ punti corrispondenti alle $\pi_p - \mu$ rette fondamentali BC_1, BC_2, ..., $BC_{\pi_p - \mu}$, su un S_3 complementare. In tale S_3 al sistema delle sezioni iperpiane di $V_3^{4\pi_p+4}$ corrisponde il sistema lineare delle superficie $\varphi^{2\pi_p-\mu+2}$ (d'ordine $2\pi_p - \mu + 2$) con una retta base b di molteplicità $2\pi_p - \mu$, su questa un punto B di molteplicità $2\pi_p - \mu + 1$, nel quale risulti fisso il cono delle tangenti, e $\pi_p - \mu$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti.

Se $k > 0$, per ottenere la rappresentazione spaziale dei relativi coni $V_3^{4\pi_p-k+4}$, basterà imporre ai predetti sistemi lineari k ulteriori punti base semplici, alcuni dei quali potranno (eventualmente) appartenere al cono delle tangenti in B, quindi dar luogo ad altrettante rette fondamentali.

24. — Se la $V_3^{n_p}$ è un cono a curve sezioni razionali ($\pi_p = 0$) o ellittiche ($\pi_p = 1$) si può ancora rappresentare in uno spazio lineare S_3 mediante sistemi lineari dei tipi del n. 23 [ai quali, come nello stesso n. 23 si è fatto notare, si potranno imporre k $(0 \leq k \leq \pi_p + 1)$ ulteriori punti base semplici] [29]).

Si può inoltre osservare che, anche nei casi in questione, l'ordine n_p può raggiungere (e non superare) il massimo valore $4\pi_p + 4$. Per $\pi_p = 0$ si ha infatti il cono V_3^4 di S_6 che proietta da un punto O la rigata F_2^4 di S_5 (contenente un fascio di coniche); oppure il cono di VERONESE dell'S_6. Per $\pi_p = 1$ si ha invece il cono V_3^8 di S_9, contenente un fascio lineare di quadriche.

25. — Dalle considerazioni dei nn. 23, 24 si può infine concludere che i coni $V_3^{4\pi_p-k+4}$ di $S_{3\pi_p-k+6}$ $(0 \leq k \leq \pi_p + 1)$ a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 0$ possono rappresentarsi in uno spazio lineare S_3 mediante i seguenti sistemi lineari:

I) sistema lineare di superficie φ^{π_p+3} (d'ordine $\pi_p + 3$)

---

[29]) Ved. U. MORIN, loc. cit. in [4]), nn. 4-9 e loc. cit. in [5]), n. 12.

con una retta base b di molteplicità π_p+1, una retta base c doppia incidente b in un punto base B di molteplicità π_p+2 nel quale sia fisso il cono Ω delle tangenti, e k punti base semplici (eventualmente appartenenti ad Ω);

II) sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi_p-\mu+2}$ (d'ordine $2\pi_p-\mu+2$; $\mu=0, 1, ..., \pi_p$) con una retta base b di molteplicità $2\pi_p-\mu$, $\pi_p-\mu$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti; su b un punto base B di molteplicità $2\pi_p-\mu+1$ nel quale resti fisso il cono Ω delle tangenti, e k punti base semplici (eventualmente appartenenti ad Ω).

In entrambi i sistemi ora determinati, i piani per la retta b sono rappresentativi del fascio lineare $|Q_2|$ di quadriche (S_0-coni) della $V_3^{4\pi_p-k+4}$.

26. — Dai nn. 21, 25 si trae ora direttamente che le V_3^n, appartenenti al 1° tipo del n. 20, sono le varietà $V_3^{4\pi-2p-k+4}$ di $S^{3\pi-2p-k+6}$ ($2\leq 2p\leq\pi$, $0\leq k\leq\pi-2p+1$) che ammettono in uno spazio lineare S_3 i seguenti sistemi lineari rappresentativi:

I) *sistema lineare di superficie* $\varphi^{\pi-p+3}$ (*d'ordine* $\pi-p+3$) *con una retta base* b *di molteplicità* $\pi-p+1$, *una retta base doppia* c *incidente* b *in un punto base* B *di molteplicità* $\pi-p+2$, *nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa* Ω (*d'ordine* $\pi-2p+2$) *e in* p *piani variabili per* b, *e* k *punti base semplici* (*eventualmente appartenenti a* Ω);

II) *sistema lineare di superficie* $\varphi^{2\pi-\mu-3p+2}$ (*d'ordine* $2\pi-\mu-3p+2$; $\mu=0, 1, ..., \pi-2p$) *con una retta base* b *di molteplicità* $2\pi-\mu-3p$, $\pi-\mu-2p$ *rette base doppie infinitamente vicine a* b *e ad essa incidenti; su* b *un punto base* B *di molteplicità* $2\pi-\mu-3p+1$ *nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa* Ω (*d'ordine* $2\pi-\mu-4p+1$) *e in* p *piani variabili per* b, *e* k *punti base semplici* (*eventualmente appartenenti a* Ω).

I piani per la retta b hanno come imagini, in entrambi i sistemi, le quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ della corrispondente $V_3^{4\pi-2p-k+4}$. Tali quadriche sono dei coni i cui vertici descrivono una curva d'ordine p [30]), per cui le $V_3^{4\pi-2p-k-4}$ in questione sono degli *pseudo-coni d'indice* p [31]).

27. — La $V_3^{n_p}$ (n. 20) non sia un cono e le sue curve-sezioni siano razionali ($\pi_p = 0$).

Dalle (29) segue $n_p \geq 3$, $r_p \geq 5$. La $V_3^{n_p}$ non può essere allora che la V_3^3 razionale normale di S_5 [32]) (generata da un fascio razionale $|\alpha|$ di piani e il cui fascio di quadriche $|Q_2|$ può ottenersi come sezione della V_3^3 con gli S_4 passanti per un S_3 che contenga un piano di $|\alpha|$), rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema lineare delle quadriche per un punto B ed una retta c. Al fascio $|Q_2|$ viene a corrispondere, in tale rappresentazione, un fascio di piani per una retta b passante per B.

La corrispondente varietà V_3^n è allora (n. 21) una V_3^{6p+3} di S_{4p+5}, a curve sezioni di genere $\pi = 2p \geq 2$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema di superficie* φ^{p+2} *(d'ordine* $p+2$*) con una retta base* b *di molteplicità* p*, una retta base semplice* c *e su* b *un punto base* B *di molteplicità* $p+1$.

28. — Se la V_3^n (n. 20), non cono, è a curve-sezioni ellittiche ($\pi_p = 1$), dalle (29) segue $n_p \geq 6$, $r_p \geq 7$. Si hanno allora due tipi proiettivamente distinti di $V_3^{n_p}$ [33]), e precisamente due tipi di V_3^6 di S_7 che ammettono, in un S_3, i seguenti sistemi lineari rappresentativi:

I) sistema lineare delle quadriche φ^2 per due punti base B, C (eventualmente infinitamente vicini);

II) sistema lineare delle superficie cubiche φ^3 per tre rette base sghembe b, c, d [34]).

---

[30]) Basta infatti pensare che con successive p proiezioni (n. 20) la V_3^n si muta in un cono $V_3^{n_p}$.

[31]) Ved. nota [8]).

[32]) Ved. U. MORIN, loc. cit. in [4]), n. 4.

[33]) Ved. U. MORIN, loc. cit. in [5]), n. 12.

[34]) Nel I sistema il fascio di quadriche della V_3^6 è rappresentato dal fascio di piani per la retta BC; nel II invece tale fascio di piani è quello (ad es.) per la retta b.

Le corrispondenti V_3^n (n. 21) sono allora le varietà V_3^{6p+6} di S_{4p+7}, a curve-sezioni di genere $\pi = 2p + 1 \geq 3$, rappresentabili in un S_3 dai seguenti sistemi:

I) *sistema lineare di superficie* φ^{p+2} (*d'ordine* $p + 2$) *con una retta* b *di molteplicità* p *e su questa due punti base* B, C *di molteplicità* $p + 1$ (*eventualmente infinitamente vicini*);

II) *sistema lineare di superficie* φ^{p+3} (*d'ordine* $p + 3$) *con una retta base* b *multipla dell'ordine* $p + 1$ *e due rette base semplici* c, d (b, c, d *a due a due sghembe*).

29. — La $V_3^{n_p}$ (n. 20) sia a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 2$ e la relativa $M_4^{r_p-3}$ sia un S_0-cono. Tenuto conto dei risultati dei nn. 11, 12 e usando il procedimento del n. 21, si ha direttamente che la corrispondente V_3^n è una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni di genere $\pi \geq 4$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie* $\varphi^{\pi-p+1}$ (d'ordine $\pi - p + 1$; $2 \leq 2p \leq \pi - 2$) *con una retta base* b *multipla dell'ordine* $\pi - p - 1$ *e singolare d'indice* p [35]), $m' - 1 (2 \leq 2m' \leq \pi - 2p + 1)$ *rette base doppie incidenti la retta* b *e ad essa infinitamente vicine e* $\pi - 2p - 2m' + 1$ *punti base doppi infinitamente vicini a* b; *in ogni punto* P *di* b *le* $\varphi^{\pi-p+1}$ *debbono poi avere in comune* $\pi - 2p - 1$ *piani tangenti* ($\pi - 2p - 2m' + 1$ dei quali generalmente distinti e variabili con P; due di questi, in ciascuno dei $\pi - 2p - 2m' + 1$ punti di b che ha infinitamente vicino un punto base doppio, coincidenti e passanti per il punto doppio stesso; i rimanenti $2m' - 2$ a due a due coincidenti, fissi lungo b e passanti per le $m' - 1$ rette base doppie).

30. — Se infine la $M_4^{r_p-3}$ relativa alla $V_3^{n_p}$ (n. 20) è un S_1-cono, si hanno, avuto riguardo alle conclusioni dei nn. 18 19 e usando il procedimento del n. 21, i seguenti tipi di V_3^n:

---

35) Cioè la generica $\varphi^{\pi-p+1}$ deve ammettere un gruppo di p piani ad essa tangenti in ogni punto di b (e variabili con la $\varphi^{\pi-p+1}$).

I) $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni di genere $\pi \geq 4$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie* $\varphi^{\pi-p+3}$ (d'ordine $\pi - p + 3$; $2 \leq 2p \leq \leq \pi - 2$) *con una retta base multipla dell'ordine* $\pi - p + 1$, *una retta base doppia* c *incidente* b *in un punto* B *di molteplicità* $\pi - p + 2$ *nel quale siano fissi* $\pi - 2p + 1$ *piani tangenti; inoltre una curva base* $C^{\pi-2p+1}$ (*d'ordine* $\pi - 2p + 1$) *sezione* (*fuori di* c) *di un piano generico per* c *con una superficie del sistema* $|\varphi^{\pi-p+3} - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_p|$ (essendo α_1, α_2, ..., α_p, p *piani generici per* b).

II) $V_3^{3\pi+\sigma+3}$ di $S_{2\pi+\sigma+5}$ $(0 \leq \sigma \leq \pi - 2p - 1;\ 2 \leq 2p \leq \pi - 2)$, a curve-sezioni di generi $\pi \geq 4$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie* $\varphi^{3\pi-5p-2m+\sigma+3}$(*d'ordine* $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 3$; $\pi - 2p + \sigma + 1 \leq \leq 2m \leq 2\pi - 4p$) *con una retta base* b *di molteplicità* $3\pi - 5p - - 2m + \sigma + 1$, $2\pi - 4p - 2m + \sigma + 1$ *rette base doppie infinitamente vicine a* b *e ad essa incidenti, su* b *un punto* B *di molteplicità* $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 2$ *con in esso fissi* $2\pi - 4p - m + \sigma + 1$ *piani tangenti passanti per* b ($2\pi - 4p - - 2m + \sigma + 1$ *dei quali passanti ulteriormente per le* $2\pi - - 4p - 2m + \sigma + 1$ *rette base doppie*) *e* $2m - \pi + 2p - \sigma - 1$ *punti di* b *in ciascuno dei quali sia fisso un ulteriore piano tangente* (*per* b); *inoltre* $\pi - 2p - 2m + 1$ *coniche base situate su* $\pi - 2p - m + 1$ *piani generici per* b *e tangenti a* b *in* B. *Se* $\pi < 3p$ *bisogna pòi imporre al sistema* $|\varphi^{3\pi-5p-2m+\sigma+3}|$ *un altro punto base* C, *di molteplicità* $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 2$, *appartenente alla retta base* b *e infinitamente vicino a* B [36]).

---

[36]) Poichè nel sistema II del n. 19 le coniche segate dal fascio di piani per la retta base b risultano tangenti a b in B (il che equivale a dire che su b vi è un ulteriore punto base C, della stessa molteplicità di B e ad esso infinitamente vicino), ciò deve avvenire anche per il stema $|\varphi^{3\pi-5p-2m+\sigma+3}|$ ora considerato.

Se $\pi \geq 3p$ gli altri elementi base di tale sistema portano come conseguenza l'esistenza di un punto base C, di molteplicità $3\pi - 5p - - 2m + \sigma + 2$, appartenente a b e infinitamente vicino a B; se invece $\pi < 3p$ tale punto base C dovrà essere ulteriormente imposto.

Capitolo II

V_3^n A CURVE-SEZIONI NON IPERELLITTICHE

§ 1. — Nozioni preliminari.

31. — Argomento di questo capitolo saranno le varietà algebriche irriducibili a tre dimensioni, V_3^n, non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi \geq 3$, normali in uno spazio lineare S_r e il cui ordine n soddisfa alla limitazione (1).

Le superficie-sezioni di tali V_3^n risultano razionali [37]). Sono quindi razionali anche le V_3^n [38]), e, in quanto normali, pure le loro curve-sezioni sono normali: vale pertanto la (2) e, di conseguenza, la (3).

32. — La generica superficie-sezione, F, della V_3^n si può rappresentare su un piano α mediante un sistema lineare $|\Gamma|$ (di dimensione $r-1$, grado n e genere π) di curve di un certo ordine m.

Sia $|\Gamma'|$ il sistema lineare (d'ordine $m' \leq m-3$ e genere virtuale π') aggiunto puro a $|\Gamma|$, e $|\Gamma^*|$ il sistema (d'ordine $m^* = m - m'$ e genere virtuale π^*) residuo di $|\Gamma'|$ rispetto a $|\Gamma|$.

Indicata con r^* la dimensione virtuale di $|\Gamma^*|$, dalla (3) segue facilmente $r^* > 0$. Ne viene di conseguenza che il genere virtuale ed effettivo del sistema $|\Gamma|$ uguagliano l'unità e risulta $r^* \leq 9$ [39]). Se, in particolare, $|\Gamma^*|$ è riducibile, esso deve spezzarsi in una curva fissa e in un sistema irriducibile $|\gamma^*|$ di curve ellittiche o razionali.

---

37) Ved. G. Castelnuovo - F. Enriques, loc. cit. in 1).

38) Ved. F. Fano, U. Morin, loc. cit. in 2).

39) Ved. G. Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, «Mem. Acc. di Torino», s. II, t. 42, (1891).

Notiamo poi che il sistema $|\Gamma'|$ è irriducibile (e allora il suo genere effettivo uguaglia quello virtuale π') in quanto se così non fosse le curve del sistema $|\Gamma|$ sarebbero iperellittiche [40]).

Ai sistemi $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$, $|\Gamma^*|$ corrispondono, rispettivamente, sulla superficie F, i sistemi $|C|$, $|C'|$, $|C^*|$. Quest'ultimo sega sulla generica C' di $|C'|$ una serie lineare di punti g_k^μ (di dimensione k ed ordine μ) che potrà essere, o no, speciale. Inoltre la C' considerata potrà, o meno, essere contenuta nel sistema $|C^*|$.

§ 2. — V_3^n non pseudo-coni.

33. — Le V_3^n, di cui in questo paragrafo, sono state studiate da U. MORIN, nel lavoro citato in [6]), in tutti i casi computati alla fine del n. precedente, tranne in quello in cui la serie g_k^μ non è speciale e la generica curva C' è contenuta nel sistema $|C^*|$ ed ha il genere $\pi' = 0$.

Con ragionamento analogo a quello usato dal MORIN, si viene facilmente a concludere che questo caso escluso porta di conseguenza $\pi = 3$. Le V_3^n relative sono allora a curve-sezioni di genere tre ed appartengono pertanto ad uno dei seguenti due tipi [41]):

I) rigata V_3^{12} di S_{11} (le cui generatrici congiungono coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra

---

40) Ved. G. CASTELNUOVO, loc. cit. in 39).

41) Ved. U. MORIN, loc. cit. in 5), nn. 5-8. Nel lavoro ora citato vengono studiate tutte le V_3^n, non coni, a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi = 3$. Tra le stesse, oltre ai tipi elencati in questo n., vi è anche la V_3^8 di S_7, intersezione completa di un S_1-cono di VERONESE con una iperquadrica generica dell'S_7 stesso; tale V_3^8 non rientra però nelle limitazioni (1), (3).

Nei nn. 35, 36 della presente Memoria verrà poi stabilita l'esistenza pure di uno *pseudo-cono di indice uno* [ved. nota 8)], V_3^{12}, di S_{11}: tale *pseudo-cono* non è però che una particolarizzazione della rigata V_3^{13}, di cui al tipo II di questo n., quando la corrispondenza birazionale tra il piano ω e la superficie F_2^9 viene a degenerare.

due superficie di Veronese, nella quale alla rete di coniche della prima resti associata quella della seconda) rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie cubiche* φ^3 *con una retta base semplice* b *ed un punto base doppio* B, *non appartenentisi;*

II) rigata V_3^{13} di S_{12} (le cui generatrici congiungono coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra un piano ω ed una superficie, a curve-sezioni ellittiche, F_2^9 di S_9 [42]), nella quale corrispondenza alla rete delle rette di ω resti associata la rete delle cubiche di F_2^9) o una sua proiezione (da un suo punto su un S_{11} complementare), rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie cubiche* φ^3 *con un punto doppio biplanare* B *nel quale sia fisso un piano tangente, e* $k (k = 0, 1)$ *punti base semplici.*

34. — Se $\pi > 3$, si ha un solo tipo di V_3^n, e precisamente la rigata V_3^{21} di S_{17}, a curve-sezioni di genere $\pi = 6$, (luogo delle rette congiungenti coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra un piano ω ed una superficie, a curve-sezioni di genere tre, F_2^{16} di S_{14} [43]), nella quale corrispondenza alla rete delle rette di ω resti associata la rete delle quartiche di F_2^{16}) rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie* φ^5 (*d'ordine* 5) *con un punto base quadruplo* B *ed una quartica base* (*eventualmente degenere*) [44].

§ 3. — Pseudo-coni V_3^n.

35. — Andiamo infine a considerare gli *pseudo-coni* V_3^n [45]), a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi \geq 3$.

---

[42]) Rappresentabile nel piano mediante il sistema lineare delle cubiche.

[43]) Rappresentabile nel piano mediante il sistema lineare delle quartiche.

[44]) Ved. U. Morin, loc. cit. in [6]), n. 22.

[45]) Ved. nota [8]).

È noto che tali varietà potranno (eventualmente) esistere [avuto sempre riguardo alle limitazioni (1), (3)] solo se il sistema $|\Gamma|$ (n. 32) è costituito dalle curve d'ordine $m \geq 4$, con quattro punti base, tre semplici ed uno di molteplicità $m-3$, situati su una stessa retta λ (fondamentale per $|\Gamma|$), alla quale viene a corrispondere sulla superficie F (imagine di $|\Gamma|$) un punto triplo L. Al variare di F su V_3^n, il punto L descrive una retta tripla l, alla quale si appoggiano i vertici di un fascio lineare di coni cubici (a curve-sezioni razionali), K_2^3, il generico dei quali è segato da una F, che passi per il suo vertice, nelle tre rette che, nella rappresentazione piana di F, hanno per imagini i tre punti base semplici del relativo sistema $|\Gamma|$ [46]).

Si verifica, con semplice calcolo, che l'ordine n della superficie F (imagine di $|\Gamma|$) e la dimensione $r-1$ del suo spazio ambiente valgono

$$n = 3\pi + 3 \quad , \quad r - 1 = 2\pi + 4 \, ,$$

essendo $\pi = 2m - 5$ $(m \geq 4)$ il genere della generica curva-sezione. Tale genere è dunque sempre un numero dispari e quindi può porsi

$$\pi = 2k + 1 \, , \qquad (k \geq 1) \, .$$

La V_3^n in questione è pertanto, se esiste, uno *pseudo-cono d'indice uno* $V_3^{3\pi+3}$ *di* $S_{2\pi+5}$ *a curve-sezioni non iperellittiche di genere* $\pi = 2k+1$ $(k \geq 1)$.

Di tale $V_3^{3\pi+3}$ proveremo, nei numeri successivi, l'effettiva esistenza per ogni valore di $k \geq 1$, e ne daremo il sistema lineare rappresentativo in uno spazio lineare S_3.

36. — Sia $|\overline{\Gamma}|$ il sistema lineare completo di curve, d'ordine $k+2$ $(k \geq 1)$, di un piano ω, avente un punto base O di molteplicità $k-1$. L'imagine di tale sistema è una superficie razionale normale Φ, il cui ordine $\bar{n}$ e la dimensione $\bar{r}$ dello

---

46) Ved. U. MORIN., loc. cit. in 6), n. 21.

spazio ambiente sono, rispettivamente, dati da

$$\bar{n} = (k+2)^2 - (k-1)^2 = 6k+3, \tag{30}$$

$$\bar{r} = \binom{k+4}{2} - 1 - \binom{k}{2} = 4k+5. \tag{31}$$

Al fascio di rette per O del piano ω corrisponde su Φ un fascio Σ di cubiche.

Scelta genericamente in uno spazio lineare $S_{\bar{r}+2}$, comprendente l'$S_{\bar{r}}$ (ambiente di Φ), una retta generica a (sghemba con $S_{\bar{r}}$), si stabilisca tra i punti di a e le cubiche di Σ (considerate come elementi) un riferimento proiettivo Π; indi si proietti da ogni punto di a quella cubica di Σ ad esso corrispondente in tale riferimento. Si ottiene così una varietà V_3^n, razionale normale in $S_{\bar{r}+2}$ ed avente la retta a tripla.

Un $S_{\bar{r}+1}$ di $S_{\bar{r}+2}$, generico per a, sega Φ in $\bar{n}$ punti, quindi V_3^n nella retta tripla a e nelle $\bar{n}$ rette che proiettano tali punti dagli $\bar{n}$ punti di a corrispondenti in Π alle $\bar{n}$ cubiche di Σ che passano (ciascuna) per uno degli $\bar{n}$ punti primi considerati: l'ordine n della V_3^n vale pertanto $n = \bar{n} + 3$, quindi, per la (30),

$$n = 6k+6. \tag{32}$$

Indicato, come di consueto, con r la dimensione dello spazio ambiente della V_3^n, si ha $r = \bar{r} + 2$, e per la (31)

$$r = 4k+7. \tag{33}$$

Dalla (2) segue poi $\pi = n - r' + 2$, e da questa, a norma delle (32), (33)

$$\pi = 2k+1, \qquad (k \geq 1). \tag{34}$$

Dalle (32), (33), (34) si trae infine

$$n = 3\pi + 3 \quad , \quad r = 2\pi + 5,$$

La V_3^n così costruita è dunque una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$. Ove si osservi che la generica superficie-sezione della stessa è rappresentabile in un piano mediante un sistema lineare del tipo $|F|$, si conclude che tale $V_3^{3\pi+3}$ è proprio lo *pseudo-cono d'indice uno* di cui si voleva provare l'esistenza (n. 35).

37. — Dal sistema lineare $|\Gamma|$ (rappresentativo della superficie Φ) e seguendo il procedimento indicato nel n. precedente per la costruzione dello *pseudo-cono* $V_3^{3\pi+3}$, si trae direttamente che tale $V_3^{3\pi+3}$ può essere rappresentato in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie* φ^{k+2} (*d'ordine* $k+2 \geq 3$) *con una retta base* b *di molteplicità* $k-1$ *e su questa un punto base* B *di molteplicità* $k+1$ *nel quale il cono delle tangenti si spezzi in* k *piani* (*coincidenti*) *fissi e in uno variabile per* b.

Capitolo III

MASSIMA DIMENSIONE DEI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE DELLO SPAZIO

38. — Nei precedenti due capitoli di questa Memoria vengono studiati tutti i tipi cremonianamente distinti di sistemi lineari completi, semplici, irriducibili, non rappresentativi di coni, di superficie algebriche dello spazio lineare S_3, a curva caratteristica (variabile) irriducibile di genere $\pi \geq 2$ e di grado $n \geq 3\pi + 3$.

Da tale studio risulta che la massima dimensione dei sistemi suddetti, in relazione al genere π della generica curva caratteristica γ, è, nel caso che γ sia iperellittica, $r = 3\pi + 4$ (cap. I).

I sistemi lineari per cui questo massimo è raggiunto sono:

a) sistema del tipo II (n. 19), dove deve porsi $\sigma = \pi - 1$, quindi $m = \pi$;

b) sistemi dei tipi I, II (n. 26), dove deve porsi $p = 1$.

Le relative varietà imagini sono quelle descritte, rispettivamente, nei nn. 18 (varietà del II tipo) e 26.

Se la curva γ non è iperellittica il massimo $r = 3\pi + 4$ non può invece mai essere raggiunto (cap. II).

Resta così stabilita anche la II parte di quanto enunciato nell'introduzione.