ROBERTO CONTI

Sul secondo teorema della media per gli integrali doppi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 294-302

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__294_0>

SUL SECONDO TEOREMA DELLA MEDIA PER GLI INTEGRALI DOPPI

Nota (*) *di* ROBERTO CONTI (*a Firenze*).

Siano p ed f due funzioni reali delle variabili x, y, definite nel rettangolo R di vertici $A \equiv (a, \alpha)$, $B \equiv (b, \alpha)$, $C \equiv (b, \beta)$, $D \equiv (a, \beta)$, ed ivi entrambe integrabili-L (cioè integrabili secondo LEBESGUE); la p sia inoltre non negativa e limitata.

LEBESGUE ha provato [1] che per ogni coppia di funzioni p, f soddisfacenti le ipotesi dette e per ogni numero $\overline{p}$ non inferiore al limite superiore p'' della p in R, esiste almeno un insieme I di R per cui si ha

$$\text{(A)} \qquad \int_R p\, f\, d(x, y) = \overline{p} \int_I f\, d(x, y).$$

La (A), la quale esprime il secondo teorema della media per gli integrali doppi, vale anche per funzioni di un numero n qualunque di variabili; se $n = 1$, sostituendo il rettangolo R con un intervallo (a, b), I rappresenterà un opportuno insieme di punti di (a, b). In quest' ultimo caso la natura dell' insieme I viene, com' è noto, notevolmente precisata se alle ipotesi fatte si aggiunge quella che la p sia una funzione non crescente; in tal caso infatti I è addirittura costituito dai punti di un intervallo (a, c) di (a, b), il punto c potendo eventualmente coincidere con b [2].

(*) Pervenuta in Redazione il 14 aprile 1950.

(1) ved.: H. LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, (Ann. sc. Ec. Normale Sup., (3), XXVII, pp. 361–450, (1910); p. 444).

(2) ved.: E. W. HOBSON, *On the second mean value theorem of the integral calculus*, (Proc. London Math. Soc., (2), 7, pp. 14–23, (1909));

È naturale allora chiedersi se nel caso di due variabili l'aggiunta di opportune «ipotesi di monotonia» circa la p renda possibile un'analoga determinazione della natura dell'insieme I che appare in (A).

Ora il concetto di funzione monotona di più variabili può esser posto, com'è noto, in più modi; tuttavia le ricerche concernenti il secondo teorema della media in più variabili considerano, in vista delle applicazioni, principalmente [3] due classi di «funzioni monotone» e cioè:

I. – le funzioni p *non crescenti rispetto a ciascuna variabile* (cioè soddisfacenti in tutto R le

$$(1) \qquad p(x+h, y) - p(x, y) \leq 0, \qquad h > 0;$$

$$(2) \qquad p(x, y+k) - p(x, y) \leq 0, \qquad k > 0),$$

e *dotate in R di incremento doppio non positivo* (cioè soddisfacenti in tutto R la

$$(3) \qquad p(x+h, y+k) + p(x, y) - p(x+h, x) - \\ - p(x, y+k) \leq 0, \qquad h > 0,\ k > 0);$$

II. – le funzioni p *non crescenti rispetto a ciascuna variabile* (cioè soddisfacenti in R le (1), (2), ma non, in generale, altre condizioni, quali la (3)).

Poichè la prima delle due classi è più ristretta della seconda è presumibile che intorno all'insieme I si avranno no-

cfr. anche: G. Vitali – G. Sansone: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* (parte Iª, Bologna, 1943, 2ª ed., p. 116).

Avvertiamo che per evitare ripetizioni nel seguito si indicherà sempre con p una funzione non negativa e limitata. Inoltre supporremo, senza sostanziali restrizioni, che il I° membro della (A) sia diverso da zero; se fosse nullo la (A) può scriversi ad es. per un qualunque insieme di misura nulla.

(3) Si fa astrazione dalle ricerche riguardanti gli integrali «ripetuti» o «iterati», dove compaiono anche altri tipi di monotonia. Cfr. ad es.: U. Dini, *Sugli integrali multipli in generale, ecc.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, XVIII, pp. 318-359, (1904), p. 326).

zioni più precise quando p appartiene appunto a tale classe; effettivamente W. H. Young ha provato ([4]) che *in questo caso l'insieme I è un rettangolo di R avente un lato AU su AD ed un lato AV su AB;* tale rettangolo può coincidere con R.

Sembra tuttavia che la natura di I risulti sufficientemente precisata anche nel caso che la p faccia parte della seconda classe. Si ha infatti il

Teorema – *Se p è in R una funzione non crescente rispetto a ciascuna variabile ed f è in R una funzione integrabile-L, limitata o no, allora la* (A) *vale per almeno un insieme I che è la regione interna ad una curva continua chiusa* ([5]) *(e rettificabile) costituita da un segmento AU del lato AD, da un segmento AV del lato AB e da una curva continua $\mathcal{D}$ congiungente U con V ed incontrata in un sol punto od in un solo segmento da ogni retta perpendicolare ad AU o ad AV.*

La dimostrazione di questo teorema (che estende e completa due risultati di Arzelà ([6])) si basa su alcune proprietà di un certo insieme di curve (n. 1, 2), su alcune considerazioni di carattere abbastanza elementare circa le funzioni di due variabili non crescenti rispetto a ciascuna variabile (n. 3), ed infine su di una disuguaglianza dovuta ad E. W. Hobson (n. 4).

1. - Cominciamo dallo studio di un certo insieme di curve, ponendo anzitutto alcune definizioni.

Indicheremo con $\mathcal{D}$ una curva continua aperta, appartenente al rettangolo R, chiuso, avente come primo estremo U un punto di AD, chiuso, e come secondo estremo V un punto

([4]) ved.: W. H. Young: *On multiple integration by parts and the second theorem of the mean*, (Proc. London Math. Soc., (2), XVI, pp. 273-293, (1917); p. 290). Cfr. anche E. W. Hobson, *Theory of functions* (vol. I° Cambridge, 1927, 3ª ed., pp. 625-626).

([5]) Curva continua chiusa (aperta) è un insieme ordinato di punti omeomorfo ad una circonferenza (ad un segmento).

([6]) ved.: C. Arzelà: *Sugli integrali doppi* (Mem. R. Acc. Sc. Ist. Bologna, (V), II, pp. 133-147, (1891), p. 145); *Sul secondo teorema della media per gli integrali doppi*, (ibid. (V), X, pp. 99-108, (1902)). Tali ricerche riguardavano, necessariamente, funzioni integrabili secondo Mengoli-Cauchy-Riemann.

di AB, chiuso; tale curva sia incontrata da ogni parallela ad AB uscente da un punto di AU e da ogni parallela ad AD uscente da un punto di AV, in un sol punto od in un solo segmento. Δ indichi l' insieme di tutte le curve $\mathcal{D}$.

Per ogni numero $\rho > 0$, fissato ad arbitrio, diremo intorno (ρ), puntuale, di una $\mathcal{D}$, l' insieme dei punti di R che abbiano distanza non superiore a ρ da almeno un punto di $\mathcal{D}$. L' insieme di tutte le curve di Δ i punti delle quali appartengono tutti ad un certo intorno (ρ) di una data $\mathcal{D}$ si dirà che costituisce un intorno V_D (di curve, dipendente da ρ) di tale $\mathcal{D}$.

Una $\mathcal{D}$ si dirà poi curva di accumulazione di un sottoinsieme E di Δ, i cui elementi indichiamo con $\mathcal{E}$, se per ogni $\rho > 0$ esiste un intorno V_D della $\mathcal{D}$ del quale faccia parte almeno una curva $\mathcal{E}$ distinta da $\mathcal{D}$. In questo modo l'insieme Δ viene ad esser considerato come uno *spazio* (V), nel senso di FRÉCHET (7).

Con queste definizioni vale il

LEMMA I. – *L' insieme Δ è chiuso, compatto e connesso.*

Δ è chiuso per definizione. La seconda asserzione è provata da un noto criterio di TONELLI (8) da cui risulta che ogni insieme di infinite $\mathcal{D}$ dà luogo ad almeno una $\mathcal{D}$ di accumulazione.

Resta dunque da provare soltanto che Δ è connesso, vale a dire che se Δ_1, Δ_2 sono due insiemi non vuoti, privi di elementi comuni e tali che $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$, esiste almeno un elemento di uno dei due che è elemento di accumulazione dell' altro. Per dimostrare ciò è sufficiente (9) far vedere che ogni coppia $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ di elementi di Δ appartiene ad un sottinsieme di Δ connesso.

Osserviamo anzitutto che se $\mathcal{D}$ è una qualunque curva di Δ è sempre possibile esprimere le coordinate x, y del punto P variabile su di essa mediante due funzioni $x(t)$, $y(t)$ di un parametro t variabile da zero ad uno; basta per questo indicare

(7) ved.: M. FRÉCHET, *Espaces abstraits* (Paris, 1928, p. 172). Si vedano ivi anche le altre definizioni relative agli insiemi di uno spazio (V).

(8) ved.: L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (vol. I°, Bologna, 1922, p. 89).

(9) cfr.: M. FRÉCHET, loc. cit., p. 228.

con t il rapporto tra la lunghezza dell' arco di estremi U, P e la lunghezza totale della $\mathcal{D}$.

Dette allora $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ due qualunque curve di Δ siano

$$\mathcal{D}_0: \qquad x = x_0(t), \quad y = y_0(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathcal{D}_1: \qquad x = x_1(t), \quad y = y_1(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

le loro rappresentazioni parametriche, nel modo ora detto, e si consideri la curva

$$\mathcal{D}_\theta: \qquad x_\theta = (1-\theta)\, x_0(t) + \theta\, x_1(t), \; y_\theta = (1-\theta)\, y_0(t) + \theta\, y_1(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

dove θ è un numero compreso tra zero ed uno.

È subito visto che per $0 \leq \theta \leq 1$ ogni $\mathcal{D}_\theta$ appartiene ad R e che il suo primo (secondo) estremo appartiene ad AD (ad AB); infine ogni $\mathcal{D}$ essendo caratterizzata dall'essere la x funzione non decrescente, la y funzione non crescente del parametro e tali essendo appunto la x e la y di ogni $\mathcal{D}_\theta$ (poichè $1-\theta \geq 0$, $\theta \geq 0$), ogni $\mathcal{D}_\theta$ appartiene a Δ.

Per provare che l'insieme delle $\mathcal{D}_\theta (0 \leq \theta \leq 1)$ è connesso basterà osservare che tale è l' insieme dei punti dell' intervallo $0 \leq \theta \leq 1$ e che se d è il limite superiore, al variare di t, delle distanze

$$\sqrt{[x_0(t) - x_1(t)]^2 + [y_0(t) - y_1(t)]^2}$$

e θ', θ'' sono due qualunque valori di θ si ha

$$\sqrt{[x_{\theta'}(t) - x_{\theta''}(t)]^2 + [y_{\theta'}(t) - y_{\theta''}(t)]^2} \leq |\theta' - \theta''| \cdot d,$$

cioè $\mathcal{D}_{\theta'}$ appartiene all'intorno $(|\theta' - \theta''| \cdot d)$ di $\mathcal{D}_{\theta''}$ (e reciprocamente).

2. – Delle due spezzate in cui gli estremi U, V di una qualunque $\mathcal{D}$ dividono il contorno di R, sia $\mathcal{D}_0$ quella che contiene il punto A. Se $\mathcal{D}$ concide con $\mathcal{D}_0$ sia I l'insieme dei punti di $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_0$, altrimenti I indichi l'insieme dei punti della curva chiusa $\mathcal{D} + \mathcal{D}_0$ e quelli della regione ad essa interna.

Sia poi f una funzione integrabile-L in R; il numero

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \int_I f\, d(x, y)$$

è una funzione della curva $\mathcal{D}$, vale a dire un funzionale definito nell'insieme Δ ed ivi limitato.

Nel seguito δ', δ'' indicheranno il limite inferiore ed il limite superiore di $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ nell'insieme Δ.

$\mathcal{F}(\mathcal{D})$ è un funzionale continuo in Δ; vale a dire, fissato un numero $\varepsilon > 0$ e detta $\mathcal{D}$ una qualunque curva di Δ, si può determinare un intorno V_D di $\mathcal{D}$ per tutte le $\mathcal{D}'$ del quale si ha (10)

$$|\mathcal{F}(\mathcal{D}') - \mathcal{F}(\mathcal{D})| < \varepsilon .$$

Segue da ciò e dal lemma I, in virtù di noti teoremi (11) il

Lemma II. – *Se δ è un qualunque numero, $\delta' \leq \delta \leq \delta''$, esiste almeno una $\mathcal{D}$ di Δ per cui è $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \delta$.*

(10) Si ricordi che $\int_I f\, d(x, y)$ tende uniformemente a zero con la misura di I e si osservi che l'intorno (ρ) di una $\mathcal{D}$ è un insieme chiuso la cui misura decresce con ρ e tende a zero per $\rho \to 0$. Quest'ultima affermazione si rende evidente ad es. se supposto $\rho = 1/n$ e detta L la lunghezza totale della $\mathcal{D}$ considerata si divide la $\mathcal{D}$ in n archi di uguale lunghezza mediante i punti $P_0 \equiv U$, P_1, $P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_{n-1}, P_n \equiv V$ e si descrive il cerchio C_k di raggio $(L+1)/n$ avente il centro in P_k. Ogni punto dell'intorno $(1/n)$ della $\mathcal{D}$ appartiene ad almeno un C_k e quindi all'insieme somma $\Sigma_k C_k$, la cui area tende a zero con $1/n$.

(11) ved.: M. Fréchet, loc. cit., p. 236.

3. – Svolgeremo ora alcune considerazioni sulle funzioni non crescenti.

Sia anzitutto $\varphi = \varphi(\xi)$ una funzione, limitata o no, definita nell' intervallo chiuso r ed ivi non crescente; sia μ un qualunque numero non maggiore del limite superiore φ'' della φ in r, e sia infine $i = i(\mu)$ l' insieme dei punti ξ di r nei quali è

$$\mu < \varphi(\xi) \leq \varphi''.$$

Se i non si riduce all' estremo sinistro di r sia ξ un punto della frontiera Fi di i distinto da tale estremo (ed eventualmente coincidente con l' estremo destro di r). Se ξ appartiene ad i ogni $\xi' < \xi$ appartiene anch' esso ad i, nè vi possono essere $\xi'' > \xi$ appartenenti ad i altrimenti ξ risulterebbe interno ad i contro l'ipotesi. Se ξ appartiene ad $r - i$ ogni $\xi' > \xi$ è anch' esso punto di $r - i$, nè vi saranno punti $\xi'' < \xi$ appartenenti ad $r - i$, altrimenti ξ sarebbe interno ad $r - i$. Dunque esiste al più un punto di Fi interno ad r, ossia

LEMMA III. – *L' insieme i [l' insieme $r - i$] se non consta unicamente dell' estremo sinistro [destro] di r, è un intervallo, che può risultare aperto o chiuso a destra [a sinistra].*

Sia ora $\varphi = \varphi(x, y)$ una funzione definita nel rettangolo R, chiuso, limitata o no, ivi non crescente sia rispetto alla x che rispetto alla y; sia φ'' il limite superiore della φ in R, μ un qualunque numero $\leq \varphi''$.

Proviamo il

LEMMA IV. – *Se esiste almeno un punto dell' insieme*

$$I = I(\mu): \qquad \mu < \varphi(x, y)$$

che non appartenga ad AB od a AD, esiste una curva $\mathcal{D}$ dell'insieme Δ (n. 1) congiungente un punto U di AD con un punto V di AB, tale che tutti i punti della regione interna [esterna] alla curva chiusa costituita dalla $\mathcal{D}$ e dalla spezzata VAU appartengono ad I [ad $R - I$].

Detto i_α l' insieme in cui $\varphi(x, \alpha) > \mu$ si ha (lemma III):

$$i_\alpha: \qquad a \leq x \leq c \leq b\,, \qquad y = \alpha\,.$$

Se fosse $a = c$ non vi potrebbe essere alcun punto di I non appartenente ad AB o ad AD; quindi $a < c$ e detto V il punto (c, α) è $V \neq A$. Analogamente se i_a è l'insieme in cui $\varphi(a, y) > \mu$ potremo definire il punto $U \equiv (a, \gamma)$ distinto da A.

Detto I_0 l'insieme dei punti I non appartenenti ad AB nè ad AD (non vuoto per ipotesi) mostriamo che l'insieme costituito dai punti U e V e dalla frontiera FI_0 di I_0 è una curva $\mathcal{D}$ (n. 1).

Fissiamo a piacere x in (a, b) chiuso e sia $i_x = i(\mu, x)$ l'insieme dei punti I di ascissa x; i_x è vuoto se $c < x \leq b$. Sia dunque $a < x \leq c \leq b$; la frontiera di i_x appartiene a quella di I_0 ed è costituita da un sol punto P (lemma III). Associando ad ogni x di $a < x \leq c$ l'ordinata y di P e ad $x = a$ l'ordinata γ di U si ottiene una funzione ad un valore $y = y(x)$ definita in (a, c) e tale che $\alpha \leq y(x) \leq \beta$; tale funzione è non crescente.

Sia infatti P' un qualunque punto interno al rettangolo (A, P) di vertici opposti A, P e quindi di ordinata $y' < y(x)$; se P' appartenesse ad $R - I$ dovrebbe appartenere ad $R - I$ anche il punto (x, y') ed allora il punto $P \equiv (x, y(x))$ sarebbe (lemma III) interno ad $R - i_x$ contro l'ipotesi. Perciò per ogni coppia di numeri x, x' di (a, c) con $x' < x$ è $y(x') \geq y(x)$.

Della frontiera di I_0 fa dunque parte la grafica di una funzione $y = y(x)$ non crescente in (a, c). Se questa funzione non è continua sia $\bar{x}$ uno dei punti di discontinuità, necessariamente di prima specie, e siano $y(\bar{x}+)$, $y(\bar{x}-)$ i limiti destro e sinistro di $y = y(x)$ in $\bar{x}$. Il punto $\bar{U} \equiv (\bar{x}, y(\bar{x}-))$, se non coincide con $(\bar{x}, y(\bar{x}))$, è punto di accumulazione di punti $(x, y(x))$ e quindi appartiene in ogni caso alla FI_0: lo stesso sarà del punto $\bar{V} \equiv (\bar{x}, y(\bar{x}+))$.

Sia poi i_η l'insieme dei punti di I aventi ordinata η scelta ad arbitrio tra $y(\bar{x}+)$ ed $y(\bar{x}-)$ e sia Q il punto frontiera (lemma III) di i_η facente parte, quindi, di FI_0; dico che è $Q \equiv (\bar{x}, \eta)$. Infatti se Q si trovasse a destra del segmento $\bar{U}\bar{V}$, $\bar{V}$ risultando interno al rettangolo (A, Q) sarebbe interno ad I_0, mentre si è visto che $\bar{V}$ fa parte di FI_0; se Q stesse a sinistra del segmento $\bar{U}\bar{V}$ esso sarebbe interno al rettangolo $(A, \bar{U})$ e quindi interno ad I_0, mentre appartiene ad FI_0. Dunque se la grafica della $y = y(x)$ ha delle discontinuità, della FI_0 fanno parte, oltre i punti della grafica stessa, anche i punti dei segmenti $\overline{UV}$ ed è chiaro che non vi sono altri punti di FI_0 oltre quelli ora detti.

Aggiungendo U e V alla FI_0 si ottiene appunto una curva $\mathcal{D}$ dell' insieme Δ e l' asserto è provato.

4. - Siano infine p ed f due funzioni definite in R, ivi integrabili-L; detto $\overline{p}$ un numero non inferiore al limite superiore p'' della p in R si ponga

$$J = \frac{1}{\overline{p}} \int_R p\, f\, d(x, y).$$

Seguendo un procedimento sviluppato da HOBSON [12] si può dimostrare che vale la seguente disuguaglianza

$$\text{(B)} \qquad \lambda' \leq J \leq \lambda''$$

dove λ', λ'' indicano il limite inferiore a quello superiore dei numeri

$$\int_I f\, d(x, y)$$

al variare di I nella famiglia degli insiemi di R definiti da

$$I: \qquad p(x, y) > \mu\,, \qquad \mu \leq p''$$

Allora se p è una funzione non crescente rispetto a ciascuna variabile ogni I e uno degli $I = I(\mu)$ del lemma IV; ne segue, ricordando il significato di δ', δ'' (n. 2) che $\delta' \leq \lambda'$, $\lambda'' \leq \delta''$ e quindi, per la (B)

$$\delta' \leq J \leq \delta''$$

e da questa, in virtù del lemma II resta provato il nostro teorema.

([12]) E. W. HOBSON, loc. cit. in ([1]), p. 623-624.