

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

S. GHEZZO

Intorno ad un teorema sulle quasi-traiettorie di una traslazione piana generalizzata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 18 (1949), p. 177-180

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__177_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

INTORNO AD UN TEOREMA SULLE QUASI-TRAIETTORIE DI UNA TRASLAZIONE PIANA GENERALIZZATA

Nota (*) di S. GHEZZO (a Venezia)

Il teorema fondamentale di BROUWER sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata t , afferma che :

Una curva β del piano taglia la propria immagine nella t , quando gli estremi di β staccano su una traiettoria $\sigma(\lambda)$ di t un arco α , che contenga nel proprio interno un arco di traslazione λ e che formi con β una curva semplice e chiusa (1).

Questo teorema è stato esteso alle quasi-traiettorie da G. SCORZA DRAGONI (2).

In questa Nota mi propongo di far vedere che la dimostrazione dello SCORZA DRAGONI si può adattare in maniera pressochè immediata a casi ancora più ampi, suggeritimi del caso a cui accenna lo SCORZA DRAGONI in una sua Nota in corso di stampa (3).

1. - Sia t una traslazione generalizzata del piano π . E sia I un insieme chiuso (e limitato) tale che, per ogni numero positivo δ , esista un arco di traslazione λ di t il quale contenga I

(*) Pervenuta in Redazione il 30 luglio 1948.

(1) L. E. J. BROUWER, *Beweis des ebenen Translationssatzes* [«*Mathematische Annalen*» vol. 72 (1912), pp. 37-54] p. 44, teor. 6.

(2) G. SCORZA DRAGONI, *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un automorfismo del piano* [«*Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*» Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie VIII, vol. 1, fasc. 2, pp. 156-161.

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Alcuni teoremi sulle traslazioni piane generalizzate*, in corso di stampa sugli «*Annali Triestini*» n. 8.

nel proprio δ — intorno (4) e sia contenuto nel δ — intorno di I . Un tale arco λ sarà detto una δ — *approssimazione di I* .

È evidente che prefissati un qualunque numero $\sigma > 0$ ed un n intero, per δ sufficientemente piccolo, l'arco $t^n(\lambda)$ risulta una σ — *approssimazione di $t^n(I)$* , se λ è una δ — *approssimazione di I* .

2. - Osserviamo inoltre che:

Un punto L di $t^{-1}(I) \dot{+} t^{-2}(I) \dot{+} \dots$ che non appartenga ad I , non appartiene nemmeno a $t(I) \dot{+} t^2(I) \dot{+} \dots$, e viceversa (5).

Infatti se ciò non fosse esisterebbe un intero negativo $-r$ tale da aversi $t^{-r}(I) \cdot L = L$ e $t^{-r+h}(I) \cdot L = 0$ per ogni $0 < h \leq r$, ed un intero positivo s tale che $t^s(I) \cdot L = L$ e $t^{s-k}(I) \cdot L = 0$ per ogni $0 < k < s$.

Quindi L non appartiene all'insieme $\tau = t^{-r+1}(I) \dot{+} \dots \dot{+} \dot{+} I \dot{+} \dots \dot{+} t^{s-1}(I)$, e poichè τ è chiuso (al pari di I) esiste un cerchio Γ di centro L e raggio ρ così piccolo che $\Gamma \cdot t(I) = 0$ e che la distanza di Γ da τ risulti positiva (il che è possibile perchè essendo τ chiuso ed $L \cdot \tau = 0$, L non può esser d'accumulazione per τ).

Sia λ una δ — *approssimazione di I* . Allora, se δ è abbastanza piccolo $t^{-r}(\lambda)$ e $t^s(\lambda)$ hanno entrambi punti interni a Γ , mentre $t^{-r+1}(\lambda) \dot{+} \dots \dot{+} t^{s-1}(\lambda)$ risulta esterna a Γ . Ma ciò è notoriamente assurdo (6); donde la conclusione.

3. - Consideriamo ora una curva β semplice e aperta, priva

(4) Per δ — intorno di un insieme γ di π s'intende l'insieme di tutti i punti di π che hanno da γ una distanza minore o uguale di δ .

(5) Il ragionamento svolto in questo n. 2 è quello con cui G. SCORZA DRAGONI dimostra il teorema analogo relativo ai quasi-segmenti di traslazione, v. G. SCORZA DRAGONI, *Sugli archi di traslazione di un automeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [Memorie della R. Accademia d'Italia], Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), n. 11, pag. 15].

(6) G. SCORZA DRAGONI, loc. cit. (5), p. 10, n. 5.

di punti comuni con I , e con l' estremo A nell' insieme $t^{-1}(I) \dot{+} t^{-2}(I) \dot{+} \dots$, e l' altro B nell' insieme $t(I) \dot{+} t^2(I) \dot{+} \dots$.

Sia p il piú grande intero negativo tale che $t^p(I)$ contenga A , e q il piú piccolo intero positivo tale che $t^q(I)$ contenga B .

I punti A e B , in base all' osservazione del n. 2, risultano distinti, non potendo A appartenere a $t^q(I)$ nè B a $t^p(I)$.

Quindi β non è degenero, e si può anzi supporre che β non abbia punti comuni con l' insieme $t^{p+1}(I) \dot{+} \dots \dot{+} t^{q-1}(I)$ (basta eventualmente sostituire a β un suo sottoarco non degenero).

Ora poichè gli insiemi

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} t^n(A) \quad \text{e} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} t^n(B)$$

non hanno punti di accumulazione al finito (⁷), si verifica una delle seguenti alternative:

a) o esiste un intero relativo m tale che $B = t^m(A)$ (e quindi $A = t^{-m}(B)$);

b) o le distanze di A dall' insieme $\sum_{-\infty}^{+\infty} t^n(B)$, e di B dal-

l' insieme $\sum_{-\infty}^{+\infty} t^n(A)$ sono positive.

In ogni caso I , essendo limitato, contiene un numero finito di punti del tipo $t^r(A)$ e $t^s(B)$.

Ne segue che esistono sempre due interi relativi $h \leq p$ e $k \geq q$ tali che

$$\begin{aligned} A \cdot t^h(I) = A & \quad \text{e} \quad A \cdot t^v(I) = 0 & \quad \text{se } v < h \\ B \cdot t^k(I) = B & \quad \text{e} \quad B \cdot t^v(I) = 0 & \quad \text{se } v > k. \end{aligned}$$

Osserviamo qui che nel caso *a)* risulta $m \geq q - h$ (⁸).

(⁷) BROUWER, loc. cit. (1), p. 45, teor. 8.

(⁸) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, loc. cit. (2), pag. 158, n. 5.

4. - Introduciamo ora un numero 2η positivo e minore delle distanze :

I°) di β da I ,

II°) di A da $\sum_{p+1}^{q+1} t^p(I)$,

III°) di A da $t^{h-1}(I)$,

IV°) di B da $\sum_{p-1}^{q-1} t^p(I)$,

V°) di B da $t^{h+1}(I)$.

Si consideri una ϵ - approssimazione λ di I , scegliendo il numero ϵ minore di η e tale che, posto

$$\varphi = \sum_{p-1}^{q-1} t^p(\lambda) \quad \text{e} \quad \phi = \sum_{p+1}^{q+1} t^p(\lambda),$$

le distanze di A da ϕ e da $t^{h-1}(\lambda)$ e di B da φ e da $t^{h+1}(\lambda)$ superino η ;

Dopo di che basta seguire i ragionamenti svolti nei n° 6-10 della Nota citata in (2) dallo SCORZA DRAGONI per concludere che :

Se t è una traslazione piana generalizzata ed I un insieme chiuso del piano soddisfacente alle condizioni del n. 1. Una curva semplice e aperta β di estremi A e B taglia la propria immagine $t(\beta)$, se A appartiene a $t^{-1}(I) \dot{+} t^{-2}(I) \dot{+} \dots$, B appartiene a $t(I) \dot{+} t^2(I) \dot{+} \dots$, e $\beta \cdot I = 0$.