ARNO PREDONZAN

Sull' unirazionalità della varietà intersezione completa di più forme

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__163_0>

SULL' UNIRAZIONALITÀ DELLA VARIETÀ INTERSEZIONE COMPLETA DI PIÙ FORME [1]

Nota [*] *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*).

È noto che la forma generale di qualunque ordine n dello spazio lineare S_r è unirazionale per r opportunamente grande [2].

Nel presente lavoro giungo ad analoga conclusione nel caso più generale della varietà intersezione completa di più forme.

1. - Nello spazio lineare S_r $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ si consideri la varietà $V_s^n \left(s = r - m \geq 0, \ n = \prod_{i=1}^{m} n_i\right)$ intersezione completa di m forme generiche

$$f_i^{n_i}(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

dove

$$n_1, \ n_2, \ldots\ldots, \ n_m \tag{2}$$

sono gli ordini rispettivi delle forme (1) e senza restrizione può supporsi

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots\ldots\ldots \leq n_m .$$

(*) Pervenuta in Redazione il 18 Novembre 1948.

(1) Lavoro comunicato al III Congresso dell' Unione Matematica Italiana (Pisa 23-27 Settembre 1948).

(2) U. MORIN, *Sull' unirazionalità dell' ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta* (Atti del II Congresso dell' Unione Matematica Italiana - Bologna 1940).

Sia ν il massimo degli interi (2) e fra questi siano in numero di $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ quelli che uguagliano, rispettivamente, $1, 2, \ldots, \nu$; cioè si abbia

$$\begin{cases} n_1 = n_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = n_{a_1} = 1 \\ n_{a_1+1} = n_{a_1+2} = \ldots\ldots\ldots = n_{a_1+a_2} = 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_{a_1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}+1} = \ldots = n_{a_1+a_2+\ldots+a_\nu} = \nu \end{cases}$$

con

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_\nu = m \ ,$$

$$\begin{cases} 0 \leq a_t \leq m-1 & (t = 1, 2, \ldots, \nu-1) \ , \\ 1 \leq a_\nu \leq m \ . \end{cases}$$

Mi propongo di dimostrare che:

La V_s^n è unirazionale per $n_1, n_2, \ldots, n_m$ qualunque e per ogni r che soddisfi alla limitazione

$$r \geq r_\nu \ , \tag{3}$$

dove r_ν è definito dalle relazioni

$$\begin{cases} r_\nu = \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - a_1 r_{\nu-1} \\ r_{\nu-1} = \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i - 1 + r_{\nu-2}}{r_{\nu-2}} - a_2 r_{\nu-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 = \sum_{i=a_1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}+1}^{m} \binom{n_i - \nu + 1 + r_0}{r_0} - a_\nu r_0 \\ r_0 = 0 \ ; \end{cases} \tag{4}$$

il che equivale a dire che, ove sia verificata la (3), *le coordinate* $x_0, x_1, \ldots, x_r$ *del punto generico della* V_s^n *possono esprimersi come funzioni razionali*

$$(5) \qquad \rho\, x_j = F_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) \qquad (j = 0, 1, \ldots, r)$$

di s *parametri non omogenei* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$; *e detto punto generico deve ottenersi, mediante le* (5), *un numero finito di volte.*

2. - È noto che sulla V_s^n giacciono degli spazi lineari $S_{r_{\nu-1}}$ se risulta (3)

$$(6) \quad D = (r - r_{\nu-1})\,(r_{\nu-1} + 1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} \geq 0 \ (4),$$

dove D eguaglia la dimensione del loro insieme.

Dalla (6), tenuto conto delle (3), (4), si deduce

$$\begin{aligned} D &\geq (r_\nu - r_{\nu-1})\,(r_{\nu-1} + 1) - (r_\nu + a_1\, r_{\nu-1}) = \\ &= r_{\nu-1}\,(r_\nu - r_{\nu-1} - a_1 - 1) = \\ &= r_{\nu-1} \left[\sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - a_1\,(1 + r_{\nu-1}) - (1 + r_{\nu-1}) \right] = \\ &= r_{\nu-1} \left[\sum_{i=1}^{a_1} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} + \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - \right. \\ &\qquad \left. - a_1\,(1 + r_{\nu-1}) - (1 + r_{\nu-1}) \right] = \\ &= r_{\nu-1} \left[\sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - (1 + r_{\nu-1}) \right] \geq 0 \,. \end{aligned}$$

(3) A. Predonzan, *Intorno agli* S_k *giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme* (Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei - 1948).

(4) Il caso $n_1 = n_2 = \ldots = n_{m-1} = 1$, $n_m = 2$, $r_{\nu-1} \geq 2$ in cui cade in difetto la sufficienza della (6) non può verificarsi perchè per $n_1 = n_2 = \ldots = n_{m-1} = 1$, $n_m = 2$ risulta, in virtù delle (4), $r_{\nu-1} = r_1 = 1$.

Si può quindi concludere che per $r \geq r_\nu$ sulla generica V_s^n dell' S_r giacciono degli spazi lineari $S_{r_{\nu}-1}$.

3. - Siano W^ν, $W^{\nu-1}, \ldots, W^1$, ν sistemi algebrici irriducibili definiti, in modo ricorrente, come segue:

W^ν, sistema costituito dalla totalità delle varietà V_s^n $\left(s = r - m \geq 0,\ n = \prod_{i=1}^{m} n_i\right)$ intersezione completa di m forme generiche, degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_m$, di uno spazio lineare S_r;

$W^{\nu-1}$, sistema costituito dalla totalità delle varietà $V_{\bar{s}}^{\bar{n}}$ $\left[\bar{s} = \bar{r} - (m - a_1) \geq 0,\ \bar{n} = \prod_{i=a_1+1}^{m} (n_i - 1)\right]$ intersezione completa di $m - a_1$ forme generiche, degli ordini $n_{a_1+1} - 1,\ n_{a_1+2} - 1, \ldots, n_m - 1$, di uno spazio lineare $S_{\bar{r}}$.

. . . .

W^1, sistema costituito dalla totalità delle varietà $V_{s^*}^{n^*}$ $\left[s^* = r^* - (m - a_1 - \ldots - a_{\nu-1}) \geq 0,\ n^* = \prod_{i=a_1+\ldots+a_{\nu-1}+1}^{m} (n_i - \nu + 1)\right]$ intersezione completa di $m - a_1 - \ldots - a_{\nu-1}$ forme generiche, degli ordini $n_{a_1+\ldots+a_{\nu-1}+1} - \nu + 1, \ldots, n_m - \nu + 1$, di uno spazio lineare S_{r^*}.

Per quanto si è detto nel n. 2 sulla generica V_s^n di W^ν giacciono, ove sia $r \geq r_\nu$, degli spazi lineari $S_{r_{\nu}-1}$; eppertanto, per $\bar{r} \geq r_{\nu-1}$, vi sono degli $S_{r_{\nu}-2}$ situati sulla generica $V_{\bar{s}}^{\bar{n}}$ del sistema $W^{\nu-1}$.

Si supponga ora che la generica $V_{\overline{s}}^{\overline{n}}$ di $W^{\nu-1}$ sia unirazionale per $\overline{r} \geq r_{\nu-1}$ e che i coefficienti delle sue equazioni parametriche si possano far razionalmente dipendere dai coefficienti delle forme di cui la $V_{\overline{s}}^{\overline{n}}$ è intersezione completa e dai parametri che individuano un $S_{r_{\nu-2}}$ ad essa appartenente. Di conseguenza dimostreremo che pure la generica V_s^n del sistema W^{ν} è unirazionale per $r \geq r_{\nu}$ e che i coefficienti delle sue equazioni parametriche si possono far razionalmente dipendere dai coefficienti delle forme che la determinano e dai parametri che individuano un $S_{r_{\nu-1}}$ situato sulla V_s^n stessa. E poichè è evidente che analoga proprietà vale per la generica $V_{s^*}^{n^*}$ del sistema W^1 ([5]), resterà così provata, con procedimento ricorrente, l'unirazionalità della V_s^n di equazioni (1) qualunque siano i valori che abbiano gli interi (2) purchè risulti soddisfatta la limitazione (3) ([6]).

4. - Nel caso $n_1 = n_2 = \ldots . = n_{m-1} = 1 , \; n_m \geq 2$, cioè $a_1 = m - 1$, la V_s^n riducesi ad una forma di ordine $n = n_m = \nu$ di un S_{r-m+1}, per cui ad essa può applicarsi il risultato del lavoro citato in ([2]). Supporremo perciò

$$2 \leq n_{m-1} \leq n_m \quad , \quad \text{cioè } 0 \leq a_1 \leq m - 2 \ ,$$

dal che segue $r_{\nu-1} \geq 2$. Avuto riguardo alle (3), (4), si ha quindi

$$r \geq r_\nu = \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - a_1 \, r_{\nu-1} = \sum_{i=1}^{a_1} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} +$$

$$+ \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} - a_1 \, r_{\nu-1} = a_1 + \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1}}{r_{\nu-1}} =$$

([5]) Basta notare che la $V_{s^*}^{n^*}$ riducesi ad uno spazio lineare $S_{r^*-a_\nu}$ intersezione di a_ν iperpiani generici dell' S_{r^*}.

([6]) Il procedimento ricorrente è poi condotto in guisa che la scelta di un $S_{r_{\nu-2}}$ sulla $V_{\overline{s}}^{\overline{n}}$ viene eseguito in modo da non introdurre alcuna nuova irrazionalità (mentre invece irrazionalità - aritmetiche, ma non algebriche - si introducono scegliendo $S_{r_{\nu-1}}$ sulla V_s^n).

$$= a_1 + \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1} - 1}{r_{\nu-1}} + \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1} - 1}{r_{\nu-1} - 1} \geq$$

$$\geq a_1 + \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1} - 1}{r_{\nu-1}} + \sum_{i=a_1+1}^{m} \left(n_i + r_{\nu-1} - 1\right) >$$

$$> a_1 + \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1} - 1}{r_{\nu-1}} + 2\, r_{\nu-1} + 1 \geq a_1 +$$

$$+ \sum_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} \binom{n_i + r_{\nu-1} - 1}{r_{\nu-1}} + 2\, r_{\nu-1} + 1 \geq a_1 + a_2\,(1 + r_{\nu-1}) +$$

$$+ 2\, r_{\nu-1} + 1 \geq a_1 + a_2\, r_{\nu-2} + 2\, r_{\nu-1} + 1 \,,$$

da cui

$$r - a_1 - r_{\nu-1} > \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + r_{\nu-1} - 1}{r_{\nu-1}} \,, \tag{7}$$

$$r - a_1 - 2\, r_{\nu-1} - a_2\, r_{\nu-2} - 1 > 0 \,. \tag{8}$$

Sempre in virtù delle (4) si ha poi

$$r_{\nu-1} - m + a_1 = \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i - 1 + r_{\nu-2}}{r_{\nu-2}} - a_2\, r_{\nu-2} - m +$$

$$+ a_1 \geq (m - a_1)\,(1 + r_{\nu-2}) - a_2\, r_{\nu-2} - m + a_1 =$$

$$= r_{\nu-2}\,(m - a_1 - a_2) \geq 0 \,,$$

cioè

$$r_{\nu-1} - m + a_1 \geq 0 \,. \tag{9}$$

Posto, per semplificare,

$$r_{\nu-1} = k \ , \qquad r_{\nu-2} = h \ ,$$

$$r - a_1 = R \ , \qquad m - a_1 = \overline{m} \ ,$$

le (7), (8), (9), rispettivamente, divengono

$$R - k > \sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i + k - 1}{k} , \tag{7'}$$

$$R - 2k - a_2 h - 1 > 0 \ , \tag{8'}$$

$$k - \overline{m} \geq 0 \ . \tag{9'}$$

5. - Supposto $a_1 > 0$, le prime a_1 equazioni del sistema (1) rappresentano a_1 iperpiani che con la loro intersezione determinano un S_R (subordinato all' S_r) al quale appartiene la V_s^n.

Eseguendo un cambiamento di coordinate

$$y = S(x) \tag{10}$$

per il quale l' S_R divenga lo spazio della piramide fondamentale delle coordinate di equazioni

$$\rho\, y_j = 0 \qquad (j = R + 1, \ldots, r) , \tag{11}$$

le (1) si trasformano in equazioni del tipo

$$\begin{cases} g_i^1 \,(y_{R+1}, y_{R+2}, \ldots, y_r) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, a_1) \\ g_i^{n_i} \,(y_0, y_1, \ldots, y_r) = 0 & (i = a_1 + 1, \ldots, m) , \end{cases}$$

dove le prime a_1 forme sono a_1 iperpiani dell' S_r la cui intersezione è l' S_R (11), mentre le $g_{a_1+1}^{n_{a_1+1}}, \ldots, g_m^{n_m}$ rappresentano $\overline{m}$ forme degli ordini rispettivi $n_{a_1+1}, \ldots, n_m$ per cui risulta

$$2 \leq n_{a_1+1} \leq \ldots \leq n_m \ .$$

Le equazioni della V_s^n nell' S_R divengono allora

$$(12) \qquad h_i^{n_i}(y_0, y_1, \ldots, y_R) = 0 \qquad (i = a_1 + 1, \ldots, m),$$

essendo $h_{a_1+1}^{n_{a_1+1}}, \ldots, h_m^{n_m}$ le $\overline{m}$ forme degli ordini rispettivi $n_{a_1+1}, \ldots, n_m$, che si ottengono uguagliando a zero nelle $g_{a_1+1}^{n_{a_1+1}}, \ldots, g_m^{n_m}$ i coefficienti dei termini contenenti le variabili $y_{R+1}, \ldots, y_r$ (7). I coefficienti delle (12) risultano manifestamente funzioni razionali dei coefficienti delle (1).

6. Nel sistema ∞^D degli S_k giacenti sulla V_s^n (n. 2) di equazioni (12) se ne scelga uno qualunque e con un cambiamento di coordinate

$$(13) \qquad x = T(y)$$

lo si trasformi nello spazio della piramide fondamentale delle coordinate di equazioni

$$(14) \qquad x_j = 0 \qquad (j = k + 1, \ldots, R).$$

Le (12), in virtù della (13), divengono del tipo

$$(15) \quad \sum_{j=k+1}^{R} x_j f_{ij}^{n_i-1}(x_0, x_1, \ldots, x_k) + H_i^{n_i}(x_0, x_1, \ldots, x_R) = 0$$

dove le $f_{ij}^{n_i-1}$ sono forme degli ordini $n_i - 1$ nelle variabili $x_0, x_1, \ldots, x_k$, mentre le $H_i^{n_i}$ sono forme degli ordini n_i nelle variabili $x_0, x_1, \ldots x_R$ ciascun termine delle quali è almeno di secondo grado nel complesso delle variabili $x_{k+1}, \ldots, x_R$. I coefficienti della (13) dipendono razionalmente dai parametri che individuano l' S_k di equazioni (14), quindi i coefficienti delle (15) sono funzioni razionali di detti parametri e dei coefficienti delle (12).

(7) Si noti che la condizione (3) non viene a modificarsi passando dalle (1) alle (12). Detto R_ν il valore di r_ν corrispondente alle forme (12) si ha infatti dalle (4) $r_\nu - a_1 = R_\nu$, quindi dalla $r \geq r_\nu$ segue la $R \geq R_\nu$ e viceversa.

7\. - Siano, nell' S_R, $A_0(1, 0, \ldots, 0)$, $A_1(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots, A_R(0, 0, \ldots, 1)$ i vertici della piramide fondamentale delle coordinate e si indichi con $Z(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_R)$ un punto generico della V_s^n. L' insieme dei punti $P(x_0, x_1, \ldots, x_R)$ per cui si abbia

$$(16) \qquad P \equiv \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k + \mu Z,$$

dove $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k, \mu$ sono $k+2$ parametri arbitrari non tutti nulli, viene a costituire l' S_{k+1} congiungente Z e l' S_k (14). Dalle (16) segue che le coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_R$ del punto generico del considerato S_{k+1} devono soddisfare alle condizioni

$$(17) \qquad \mu x_j = \overline{x}_j \qquad (j = k+1, \ldots, R),$$

per cui le equazioni dell' S_{k+1} possono porsi nella forma

$$(18) \qquad \overline{x}_{k+1} x_j - \overline{x}_j x_{k+1} = 0 \qquad (j = k+2, \ldots, R).$$

Intersecando la V_s^n con l' S_{k+1} si ottiene una varietà, rappresentata dal sistema delle equazioni (15), (18), che si spezza nell' S_k di equazioni (14) e in una varietà $V_{k+1-\overline{m}}^{\overline{n}}$ $[k+1-\overline{m}>0$ per la (9')] intersezione completa di $\overline{m}$ forme dell' S_{k+1} degli ordini $n_{a_1+1}-1, \ldots, n_m-1$.

Eliminando tra le (15), (18) le variabili $x_{k+2}, \ldots, x_R$, si ottiene un sistema di equazioni del tipo

$$(19) \qquad \overline{x}_{k+1}^{n_i-1} \sum_{j=k+1}^{R} \overline{x}_j f_{ij}^{n_i-1}(x_0, x_1, \ldots, x_k) +$$
$$+ x_{k+1} K_i^{n_i-2}(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}; \overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_R) = 0$$
$$(i = a_1+1, \ldots, m),$$

dove le $K_i^{n_i-2}$ sono forme degli ordini n_i-2 nelle variabili $x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}$. Le (19) rappresentano la proiezione della $V_{k+1-\overline{m}}^{\overline{n}}$ dall' S_{R-k-2} $(A_{k+2}, \ldots, A_R)$ sull' S_{k+1} $(A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_{k+1})$.

L' S_k di equazioni (14) taglia la $V^{\bar{n}}_{k+1-\bar{m}}$ in una varietà $V^{\bar{n}}_{k-\bar{m}}$ $[k-\bar{m} \geq 0$ per la (9')] intersezione completa delle $\bar{m}$ forme dell' S_k stesso

$$(20) \qquad \sum_{j=k+1}^{R} \bar{x}_j \, f^{n_i-1}_{ij}(x_0, x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (i = a_1 + 1, \ldots, m),$$

degli ordini $n_{a_1+1} - 1, \ldots, n_m - 1$, rispettivamente.

Dalla (9') segue che i parametri $\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_R$ che compaiono nelle (20) vengono ad assumere, al variare di Z sulla V^n_s, tutti i valori possibili.

8. – Vogliamo provare che il sistema delle $V^{\bar{n}}_{k-\bar{m}}$ generato dalle (20) al variare di Z sulla V^n_s, cioè dei parametri $\bar{x}_{k+1}$, $\ldots$, $\bar{x}_R$, viene a coincidere con quello di tutte le $V^{\bar{n}}_{k-\bar{m}}$ dell' S_k. Basterà far vedere che si possono determinare le $\bar{x}_{k+1}$, $\ldots$, $\bar{x}_R$ in modo che risulti

$$(21) \qquad \sum_{j=k+1}^{R} \bar{x}_j \, f^{n_i-1}_{ij}(x_0, x_1, \ldots, x_k) \equiv \varphi^{n_i-1}_i(x_0, x_1, \ldots, x_k)$$
$$(i = a_1 + 1, \ldots, m),$$

dove $\varphi^{n_{a_1+1}-1}_{a_1+1}, \ldots, \varphi^{n_m-1}_m$ sono $\bar{m}$ forme generiche dell' S_k degli ordini rispettivi $n_{a_1+1} - 1, \ldots, n_m - 1$.

Poniamo

$$f^{n_i-1}_{ij}(x_0, x_1, \ldots, x_k) \equiv \Sigma\, a^{ij}_{q_1 q_2 \ldots q_{n_i-1}} \, x_{q_1} x_{q_2} \ldots x_{q_{n_i-1}},$$

$$\varphi^{n_i-1}_i(x_0, x_1, \ldots, x_k) \equiv \Sigma\, \alpha^{i}_{q_1 q_2 \ldots q_{n_i-1}} \, x_{q_1} x_{q_2} \ldots x_{q_{n_i-1}},$$

le due sommatorie essendo estese a tutte le $\binom{n_i + k - 1}{k}$ combinazioni con ripetizione $(q_1 q_2 \ldots q_{n_i-1})$ degli indici $0, 1, \ldots, k$. Segue che, affinchè siano verificate le (21), deve essere risolubile il sistema di $\sum_{i=a_1+1}^{m}\binom{n_i+k-1}{k}$ equazioni lineari nelle $R-k$ incognite $\overline{x}_{k+1},\ldots,\overline{x}_R$

$$(22)\qquad \sum_{j=k+1}^{R}\overline{x}_j\,a^{ij}_{q_1 q_2\ldots q_{n_i-1}}=\alpha^{i}_{q_1 q_2\ldots q_{n_i-1}}\qquad (i=a_1+1,\ldots,m)$$

e dove gli indici $q_1\ q_2\ldots\ q_{n_i-1}$ variano attraverso tutte le combinazioni con ripetizione precedentemente considerate).

In virtù della (7′) e tenuto conto che dalla genericità delle forme (1) discende quella delle (12), quindi delle $f_i^{n_i-1}$, si conclude che il sistema (22) ammette soluzioni nelle $\overline{x}_{k+1},\ldots,\overline{x}_R$.

9. – Per quanto si è detto nel n. 2 risulta che sulla generica $V^{\overline{n}}_{k-\overline{m}}$ dell' S_k sono situati degli spazi lineari S_h e che la dimensione del loro insieme è

$$(23)\qquad D_1=(k-h)(h+1)-\sum_{i=a_1+1}^{m}\binom{n_i-1+h}{h}.$$

Sia Ω un sistema razionale di dimensione $k+a_2 h$ scelto nel sistema razionale degli S_h dell' S_k. Dalla (23) e tenuto conto che, in virtù delle (4), si ha

$$k+a_2 h=\sum_{i=a_1+1}^{m}\binom{n_i-1+h}{h},$$

segue che sono in numero finito gli S_h di Ω situati sulla generica $V^{\overline{n}}_{k-\overline{m}}$ dell' S_k.

Un S_h generico di Ω viene a dipendere razionalmente da $k+a_2 h$ parametri non omogenei $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{k+a_2 h}$; per cui le coordinate $x_0,x_1,\ldots,x_k$ del suo punto generico possono esprimersi con

$$\sigma x_j=\psi_j(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{k+a_2 h};\ t_0,t_1,\ldots,t_h)\qquad (j=0,1,\ldots,k),$$

dove le $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k$ sono funzioni lineari nei parametri omogenei $t_0, t_1, \ldots, t_h$ i cui coefficienti dipendono razionalmente dagli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}$.

Le condizioni affinchè ad una $V^{\overline{n}}_{k-\overline{m}}$ di equazioni (20) appartenga il considerato S_h risultano espresse dalle identità rispetto ai parametri $t_0, t_1, \ldots, t_h$

$$(24) \qquad \sum_{j=k+1}^{R} \overline{x}_j f_{ij}^{n_i-1} [\phi_0(\xi_1, \ldots, \xi_{k+a_2h}; t_0, \ldots, t_h), \ldots$$
$$\ldots, \phi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{k+a_2h}; t_0, \ldots, t_h)] \equiv 0$$
$$(i = a_1 + 1, \ldots, m),$$

essendo le (24) $\overline{m}$ forme nelle variabili $t_0, t_1, \ldots, t_h$ degli ordini rispettivi $n_{a_1+1} - 1, \ldots, n_m - 1$. Il coefficiente del termine generico della forma i^{esima} può porsi nella forma

$$\sum_{j=k+1}^{R} \overline{x}_j b_{q_i}^{ij}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}),$$

dove le $b_{q_i}^{ij}$ dipendono razionalmente dai parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}$. Segue che, affinchè risultino verificate le (24), deve essere

$$(25) \qquad \sum_{j=k+1}^{R} \overline{x}_j b_{q_i}^{ij}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}) = 0$$
$$\left[q_i = 1, 2, \ldots, \binom{n_i - 1 + h}{h};\ i = a_1 + 1, \ldots, m\right].$$

Dalla genericità delle $f_{ij}^{n_i-1}$ e dei parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}$ discende che le $\sum_{i=a_1+1}^{m} \binom{n_i - 1 + h}{h} = k + a_2 h$ condizioni lineari (25) imposte alle $\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_R$ sono linearmente indipendenti: epperciò gli $R - k$ parametri $\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_R$ di una $V^{\overline{n}}_{k-\overline{m}}$ del sistema (20) su cui giaccia un generico S_h di Ω possono esprimersi come funzioni lineari di $(R - k) - (k + a_2 h) - 1 = R - 2k - a_2 h - 1$ [> 0 per la (8')] parametri non omogenei

$\xi_{k+a_2h+1}, \ldots, \xi_{R-k-1}$; ed i coefficienti di dette funzioni sono funzioni razionali dei parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}$ che individuano l' S_h di Ω. Si ha complessivamente

$$(26) \qquad \overline{x}_j = \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-k-1}) \qquad (j = k+1, \ldots, R),$$

dove le $\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_R$ sono funzioni razionali dei parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{R-k-1}$.

Fissati arbitrariamente i valori delle $\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_R$ si possono in corrispondenza determinare le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{R-k-1}$ in modo che le (26) risultino soddisfatte. Segue che, al variare in quest'ultime delle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{R-k-1}$, si ottengono tutti i valori delle $\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_R$, quindi tutte (ed ognuna un numero finito di volte) le varietà $V^{\overline{n}}_{k+1-\overline{m}}$ del sistema delle (19); e su ciascuna di queste i parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}$ individuano razionalmente un S_h del sistema Ω su essa varietà giacente.

10. – Per quanto si è supposto nel n. 3 la $V^{\overline{n}}_{k+1-\overline{m}}$ (19), poichè appartenente al sistema $W^{\nu-1}$, è unirazionale ed i coefficienti delle relative equazioni parametriche, in $k+1-\overline{m}$ parametri non omogenei $\xi_{R-k}, \ldots, \xi_s$, si possono far razionalmente dipendere dai coefficienti delle (19) e dai parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+a_2h}$ che determinano l' S_h di Ω appartenente ad essa. Si ha cioè, avuto riguardo alle (26), che le coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}$ del punto generico della $V^{\overline{n}}_{k+1-\overline{m}}$ possono esprimersi come funzioni razionali

$$(27) \qquad \lambda x_j = \Psi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) \qquad (j = 0, 1, \ldots k+1).$$

Dalle (17), in virtù delle (26), discende

$$(28) \qquad \mu x_j = \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{R-k-1}) \qquad (j = k+1, \ldots, R)$$

e dalle (27), (28), infine si ottiene

$$(29)\quad \begin{cases} \rho\, x_j = \Phi_{k+1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{R-k-1})\, \Psi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 0,\, 1, \ldots,\, k+1) \\ \rho\, x_j = \Psi_{k+1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)\, \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{R-k-1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = k+2, \ldots,\, R)\,. \end{cases}$$

Trasformando le (29) con la sostituzione lineare (13), quindi associando alle equazioni così ottenute le (11) e operando successivamente con le (10) si ottengono le (5); ed i coefficienti di queste vengono a dipendere razionalmente dai coefficienti delle (15), quindi delle (12), infine delle (1) e dai parametri che individuano l' S_k (14) contenuto nella V_s^n. Per il procedimento che ci fa pervenire alle (29) viene ad essere soddisfatta la condizione che il punto generico della V_s^n si ottiene dalle (5) un numero finito di volte al variare dei parametri non omogenei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$.

Rimane così stabilita la proprietà enunciata nel n. 1.