GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate e sua maggiore determinazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 16 (1947), p. 86-158
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1947__16__86_0>

UN TEOREMA FONDAMENTALE SULLE TRASLAZIONI PIANE GENERALIZZATE E SUA MAGGIORE DETERMINAZIONE

Memoria (*) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI *(a Padova).*

In quèsta Memoria mi propongo di affinare ulteriormente un mio recente teorema (1) sulle traslazioni piane generalizzate. I risultati stabiliti in questa Memoria si trovano esposti in parte in una mia Nota lincea (2). Dico: in parte.

Invero, i teoremi che costituiscono lo scopo della ricerca attuale sono, sì, identici nella forma a quelli della Nota citata in (2); ma ne sono notevolmente più espressivi nella sostanza: ciò è dovuto al fatto, che sono riuscito a imporre condizioni più precise [vedi la successiva nota (11)] e più significative [vedi il n. 5] a quelli, che chiamo punti quasi-fondamentali e semi-fondamentali.

Avverto infine che il teorema II) di questa Memoria fornisce un risultato meno espressivo del III). Ma è molto probabile che il primo sia atto a sostituire il secondo in tutte le applicazioni concrete; epperò ho preferito enunciarlo a parte, dato che è suscettibile di una dimostrazione molto più corta.

Anche la dimostrazione del teorema IV) si deve poter semplificare notevolmente, se si rinuncia a una parte apparentemente

(*) Pervenuta in Redazione il 5 Novembre 1946.

(1) G. SCORZA DRAGONI, *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [« Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di scienze fis. mat. e nat., serie 8ª, vol. I (1946), pagg. 697-704], n. 1. Questa nota verrà spesso ricordata con la sigla N. I).

(2) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate* [« Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di scienze fis., mat. e nat., serie 8ª, vol. I (1946), pagg. 1163-1166]. Questa Nota verrà ricordata anche con la sigla N. II).

piccola dei risultati ivi raggiunti. Ma non so ancora quale utilità potrebbe avere il teorema meno espressivo che si verrebbe così a formulare. Perciò il teorema IV) verrà dimostrato direttamente in tutta la sua interezza, mentre verrà dedicato solo un rapido cenno a quel risultato meno completo, ma più agevole a stabilirsi.

Il § 1 è dedicato a una esposizione dettagliata del contenuto della Memoria; esso naturalmente in molti punti è una riproduzione letterale della seconda delle mie Note citate. I §§ 2 e 3 contengono tutta una serie di lemmi, quelli del § 2 in gran parte già noti, utili per il seguito. I §§ 4, 5 e 6 sono dedicati alle dimostrazioni dei teoremi, enunciati nel § 1. La delicatezza degli argomenti trattati e l'importanza a cui essi potrebbero assurgere, nello sviluppo di una teoria sulla struttura degli autoomeomorfismi di una superficie orientabile, giustifichino la lunghezza e la laboriosità delle dimostrazioni.

§ 1.

Preliminari. Posizione del problema. Risultati.

1. – Preliminari. – Rammento qualche definizione e ne introduco qualche altra, per poter procedere con una certa speditezza.

Lo spazio ambiente sia un piano π, nel quale si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Sia t una *traslazione piana generalizzata* di π; cioè t è un autoomeomorfismo di π, conserva il senso delle rotazioni e non lascia alcun punto invariato (3).

La spezzata semplice e aperta

$$\lambda = Q_0 Q_1 \dot{+} \dots \dot{+} Q_{n-1} Q_n ,$$

(3) Per un'esposizione riassuntiva di teoremi di Brouwer, v. Kerékjártó e miei, relativi alla t, si vegga G. Scorza Dragoni, *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [« Memorie della R. Accademia d' Italia », Classe di scienze fis., mat. e nat., vol. IV (1933), pagg. 159-212], § 2; e *Una estensione dell' ultimo teorema geometrico di Poincaré* [*ibidem*, pagg. 213-269], § 2. Queste Memorie nel seguito sono rispettivamente citate con le sigle M. I) e M. II).

di n lati, cogli estremi in Q_0 e Q_n e, se $n > 1$, coi vertici [4] in $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, abbia ciascuno dei suoi lati diretto come uno degli assi di π. Inoltre λ sia un *arco di traslazione* (di t); cioè l'intersezione $\lambda \cdot t(\lambda)$, di λ e della propria immagine $t(\lambda)$ nella t, si riduca ad uno ed uno solo dei due estremi di λ, estremo anche per $t(\lambda)$. Ammesso che sia $Q_n = \lambda \cdot t(\lambda)$ e posto $P = Q_0$, risulta $Q_n = t(P)$. Il punto P è individuato, una volta dato λ; esso è l'*origine* di λ, mentre $t(P)$ ne è il *termine*. Il verso a cui riferiremo λ (anche tacitamente) nel seguito, è quello che da P porta a $t(P)$; lo diremo *positivo*. I punti $Q_1 \ldots, Q_{n-1}$ sono perfettamente individuati anch'essi, una volta dato λ, dalla condizione che $P = Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}, Q_n = t(P)$ si debbano seguire su λ (nel verso positivo) nell'ordine degli indici crescenti.

La linea $\sigma(\lambda) = \ldots \dot{+} t^{-2}(\lambda) \dot{+} t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda) \dot{+} t^2(\lambda) \dot{+} \ldots$, cioè la *traiettoria generata* da λ, è notoriamente omeomorfa ad una retta [5], essa individua in π due insiemi aperti e connessi, i *campi adiacenti* a $\sigma(\lambda)$, costituiti da quei punti di π che non appartengono a $\sigma(\lambda)$ e che si possono congiungere con un punto di $\sigma(\lambda)$, prefissabile ad arbitrio, mediante una curva semplice e aperta che abbia soltanto un punto, anzi un estremo, su $\sigma(\lambda)$.

Queste ultime nozioni valgono anche per un qualunque arco di traslazione (di t). Ma nelle ipotesi attuali, se $\Sigma(\lambda)$ è un campo adiacente a $\sigma(\lambda)$, e se Q_i è un vertice di λ (il che implica che sia $n > i > 0$), i punti *interni* dell'angolo retto $\widehat{Q_{i-1} Q_i Q_{i+1}}$ e sufficientemente prossimi a Q_i sono o tutti interni o tutti esterni a $\Sigma(\lambda)$ [6]: in corrispondenza, Q_i è di *prima* o di *seconda categoria* rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

2. - I PUNTI FONDAMENTALI E QUASI-FONDAMENTALI. - Un punto F di λ è un punto *fondamentale* [7] di λ, relativo a

(4) Vertici effettivi, nel senso che (se $n > 1$) due lati consecutivi di λ non siano mai allineati.

(5) Il teorema è di BROUWER; ved. il primo dei passi citati in (3).

(6) Questo fatto è una conseguenza, fra l'altro, della circostanza che $\sigma(\lambda)$ è omeomorfa ad una retta; cfr. M. I), n. 26.

(7) In tutti i miei lavori precedenti, la definizione di punto fondamentale veniva data soltanto per punti *interni* a λ (cioè contenuti in λ ma diversi

$\Sigma(\lambda)$, se esiste un raggio ρ (cioè, una semiretta ρ) di origine F, con la direzione di uno degli assi, soddisfacente alle

$$\rho \cdot \sigma(\lambda) = F, \qquad \rho \cdot \Sigma(\lambda) = \rho - F$$

ed alla

$$\rho \cdot t(\rho) = 0;$$

oppure, se esiste un segmento $\tau = FT$, con la direzione di uno degli assi, soddisfacente alle

$$\tau \cdot \sigma(\lambda) = F, \qquad \tau \cdot \Sigma(\lambda) = \tau - F$$

ed alle

$$\tau \cdot t(F) = \tau \cdot t^{-1}(F) = 0, \qquad \tau \cdot t(\tau) \subset T + t(T)$$

– le quali ultime due relazioni dicono che τ è uno *pseudoarco di traslazione di prima specie di origine* F (8), di guisa che, come è noto, $\tau \cdot t(\tau)$ si riduce o a T o a $t(T)$ –. Il raggio ρ e il segmento τ sono detti *fondamentali* per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Un punto F' di λ è detto *quasi-fondamentale* rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se esiste un segmento di traslazione $\gamma = G\,t(G)$, con la direzione di uno degli assi, contenente F' e tale da aversi, oltre alla

$$\gamma \cdot \lambda \supset F',$$

anche

$$\gamma \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda), \qquad \gamma \cdot \Sigma(\lambda) \neq 0,$$

e

$$\gamma \cdot [t(\lambda) \dot{+} t^{-1}(\lambda) \dot{+} t^2(\lambda) \dot{+} t^{-2}(\lambda) \dot{+} \ldots] \subset G + t(G);$$

allora γ è detto un segmento *quasi-fondamentale* rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$.

dagli estremi di λ). Naturalmente l'averla ampliata, nel senso qui chiarito, non rappresenta nessuna novità degna di rilievo. E se ho richiamato l'attenzione su questo fatto, è stato soltanto per evitare dei possibili equivoci.

(8) La definizione di pseudoarco di traslazione di prima specie di origine F si trasporta subito, formalmente inalterata, anche al caso che τ sia una curva semplice e aperta di estremi F e T.

Le condizioni scritte implicano che γ abbia punti in $\Sigma(\lambda)$, che γ sia contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$, che γ non contenga nell'interno nessun punto di $\sigma(\lambda)$ non interno a λ; ma non escludono affatto che punti interni a γ possano essere interni a λ. Se questo non accade, cioè se l'interno di γ è interno a $\Sigma(\lambda)$, F' e γ sono un punto e un segmento quasi–fondamentali *in senso stretto*, rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$.

Suppongasi dunque che F' ed $\gamma = G\,t(G)$ siano appunto tali (e che γ contenga F'). Allora F' non può essere interno a γ, perchè γ non può contenere nell'interno nessun punto interno a λ e nessuno dei due estremi di λ, che appartengono anche uno a $t^{-1}(\lambda)$ e l'altro a $t(\lambda)$. Quindi F' è un estremo di γ; e γ ha entrambi gli estremi su $\sigma(\lambda)$ e l'interno in $\Sigma(\lambda)$. E la nozione di punto quasi–fondamentale in senso stretto presenta affinità notevoli con quella di punto fondamentale; tanto notevoli che non è escluso che possa essere utile, ai fini di una maggiore armonia, riunire quelle due nozioni in una sola. Ma son, queste, cose su cui ritornare, se mai, in sede di una esposizione sistematica di tutta la teoria. Così pure sorvoliamo sul fatto che si può seguire un procedimento, in un certo senso, inverso, ampliare cioè la nozione di punto fondamentale in maniera da imporre condizioni meno restrittive delle $\tau \cdot \Sigma(\lambda) = \tau - F$ e $\rho \cdot \Sigma(\lambda) = \rho - F$.

Se γ è un segmento quasi-fondamentale, si dimostra [ved. il successivo lemma IX)] che uno dei campi adiacenti a $\sigma(\gamma)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$.

3. – I PUNTI SEMI-FONDAMENTALI. – Dalla dimostrazione del successivo lemma IX) si trae che uno dei campi adiacenti a $\sigma(\gamma)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$, anche se γ è un qualunque arco di traslazione (di t), che soddisfaccia alle $\gamma \cdot \sigma(\lambda) \neq 0$, $\gamma \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$.

Orbene, un punto F'' di λ si dice *semi-fondamentale* rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se esiste un arco di traslazione φ (di t), il quale goda delle seguenti proprietà;

1) φ è costituito da due segmenti ortogonali fra di loro, anzi ciascuno con la direzione di uno degli assi:

2) φ contiene F'';

3) φ contiene punti interni a $\Sigma(\lambda)$, e quindi esterni a $\sigma(\lambda)$;

4) φ è contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$, - di guisa che, attesa la 2) e visto il lemma IX), uno, $\Sigma(\varphi)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\varphi)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ -;

5) φ non contiene nell'interno nessuno dei punti delle due semilinee $\sigma_i(\lambda) = t^{-1}(\lambda) \dot{+} t^{-2}(\lambda) \dot{+} \ldots$, $\sigma_r(\lambda) = t(\lambda) \dot{+} t^2(\lambda) \dot{+} \ldots$; cioè l'intersezione $\varphi \cdot [\sigma_i(\lambda) + \sigma_r(\lambda)]$ è contenuta nell'insieme costituito dagli estremi di φ;

6) φ possiede, nell'unico suo vertice, un vertice di prima categoria rispetto a $\Sigma(\varphi)$;

7) se φ' è quell'eventuale lato di φ che non incontra λ e φ'' l'altro, esiste un segmento φ^* tale, che $\varphi' \dot{+} \varphi^*$ costituisca un unico segmento; che $\varphi' \dot{+} \varphi^*$ abbia un estremo e un estremo soltanto su λ; che $(\varphi' \dot{+} \varphi^*) \cdot \sigma(\lambda)$ coincida con $\varphi' \cdot \sigma(\lambda) \dot{+} \varphi^* \cdot \lambda$. - di guisa che i punti interni di $\varphi' \dot{+} \varphi^*$ appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$ - e che φ^* non incontri $t(\varphi^*)$, $t(\varphi')$, $t(\varphi'')$, $t^{-1}(\varphi')$ e $t^{-1}(\varphi'')$, cioè non incontri $t(\varphi^*)$, $t(\varphi)$ e $t^{-1}(\varphi)$. Volendo è lecito supporre che φ' e φ^* abbiano soltanto un punto comune (il vertice di φ, necessariamente). E allora o $\varphi^* \dot{+} \varphi'' \dot{+} t(\varphi')$ o $\varphi^* \dot{+} \varphi'' \dot{+} t^{-1}(\varphi')$ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, il quale ha come origine l'estremo di φ^* diverso dal vertice di φ; ed è facile dedurre, dai risultati del n. 25 di M. I), che in queste condizioni $\varphi^* - \varphi \cdot \varphi^*$ appartiene al campo adiacente a $\sigma(\varphi)$ e diverso da $\Sigma(\varphi)$.

L'arco φ è detto *semi-fondamentale* rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$.

I punti e gli archi semi-fondamentali ora definiti saranno detti semi-fondamentali *in senso lato*, quando si voglia porre in netto rilievo che non si tratta dei punti e degli archi *semi-fondamentali in senso stretto,* dei quali diremo subito.

Un punto F'' di λ si dice *semi-fondamentale in senso stretto* rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se esiste un arco di traslazione φ il quale

1') soddisfaccia alle precedenti condizioni 1), 2), 3), 4), 5), 6) e

2') goda delle seguenti proprietà:

a) se il numero n dei lati di λ è uguale a 2, il vertice di φ è il vertice di λ;

b) se il numero n dei lati di λ è maggiore di 2, si presenta una delle seguenti circostanze:

o il vertice di φ è interno a λ;

oppure uno almeno, φ'', dei lati di φ contiene punti della spezzata $Q_1 Q_2 \dotplus \ldots \dotplus Q_{n-2} Q_{n-1}$; mentre l'altro, φ', o contiene punti di questa spezzata, o ha al più un estremo (esterno a questa spezzata e diverso dal vertice di φ) su λ;

c) se si presenta quest'ultima sotto-alternativa, esiste un segmento φ^* tale, che $\varphi' \dotplus \varphi^*$ formi un unico segmento; che φ^* non incontri $t(\varphi^*)$, $t(\varphi)$ e $t^{-1}(\varphi)$; che φ^* abbia un estremo e un estremo soltanto su λ e questo appartenga alla spezzata $Q_1 Q_2 \dotplus \ldots \dotplus Q_{n-2} Q_{n-1}$; e che $\varphi' \dotplus \varphi^*$ non abbia altri punti comuni con $\sigma(\lambda)$ all'infuori di quelli di $\varphi' \cdot \sigma(\lambda)$ e di $\varphi^* \cdot \lambda$, – di guisa che i punti interni di $\varphi' \dotplus \varphi^*$ appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$.

Si noti che la 2') implica la 7), sicchè punti ed archi, semi-fondamentali in senso stretto, lo sono anche in senso lato.

Il concetto di punto (o arco) semi-fondamentale in senso stretto non si pone, se $n = 1$. Peraltro la nozione veramente utile dal punto di vista applicativo è forse quella in senso lato. E se ho introdotto quella in senso stretto, è stato perchè io non sono riuscito a dimostrare l'esistenza degli enti semi-fondamentali in senso lato, se non attraverso l'esistenza di quelli semi-fondamentali in senso stretto.

4. – Posizione del problema. – Nella prima delle mie Note citate, cioè in N. I), io ho dimostrato che:

A) *Se π è un piano, nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali; t una traslazione piana generalizzata di π; λ un arco di traslazione di t, costituito da una spezzata di un numero finito, n, di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi; $\Sigma(\lambda)$ uno dei due campi adiacenti alla traiettoria generata da λ,*

o esiste una spezzata semplice e aperta ψ, costituita da un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi, dotata delle proprietà seguenti: ψ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie (9) *e l'arco di traslazione contenuto*

(9) ved. nota (8); si vegga anche M. I), § 5.

in ϕ *è un segmento; l'origine* L *di* ϕ *(di* ϕ, *in quanto pseudoarco di traslazione, beninteso) è interna a* λ; $\phi - L$ *appartiene a* $\Sigma(\lambda)$, *di guisa che* $\phi \cdot \sigma(\lambda)$ *si riduce ad* L;

oppure esiste una semilinea semplice e aperta l, *costituita da un numero finito di segmenti e da un raggio, ciascuno con la direzione di uno degli assi, dotata delle seguenti proprietà:* l *non incontra la propria immagine nella* t; *l'origine* L *di* l *è interna a* λ; $l - L$ *appartiene a* $\Sigma(\lambda)$, *di guisa che* $l \cdot \sigma(\lambda)$ *si riduce ad* L.

Le due alternative non si escludono a vicenda.

Secondo quanto ho fatto vedere in una Nota successiva ([10]), le circostanze dette si presentano per qualunque arco di traslazione di t.

Ma agli effetti dello studio delle traslazioni piane generalizzate, è molto più interessante, e di un interesse forse addirittura preminente, restringere il campo di variabilità degli enti associati a λ, anzichè ampliare il campo di variabilità di λ oltre quello delle poligonali (semplici), con un numero finito di lati, ciascuno diretto come uno degli assi.

Nel fatto, per esempio, è noto che:

B) *Se* λ *è un segmento di traslazione, i punti fondamentali di* λ *relativi a* $\Sigma(\lambda)$ *riempiono almeno un sottosegmento di* λ,

cioè, che, se nel teorema A) è $n = 1$, alla spezzata ϕ ed alla semilinea l si può imporre di essere rispettivamente un segmento e un raggio – e il teorema risale a V. Kerékjártó.

È facile riconoscere (ved. n. 40) che una simile circostanza non si presenta nel caso generale. Ma non ostante ciò, si può sempre cercare di rendere più espressivo il teorema A), anche se $n > 1$. Ed è appunto questo l'argomento cui è dedicata in modo precipuo la Memoria presente.

([10]) G. Scorza Dragoni, *Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, che conservi il senso delle rotazioni, e sia privo di punti uniti* [« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di scienze fis., mat. e nat., serie 8ª, vol. I (1946), pagg. 918-922].

5. - IL TEOREMA I). - Ciò premesso, la quistione proposta è qui risolta dal seguente

TEOREMA I) : *Se π è un piano, nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali ; t una traslazione generalizzata di π; λ un arco di traslazione di t, costituito da una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno diretto come uno degli assi; $\Sigma(\lambda)$ uno dei due campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\lambda)$ generata da λ,*

l'arco λ contiene almeno un punto interno che sia fondamentale, o quasi-fondamentale o semi-fondamentale rispetto a $\Sigma(\lambda)$;

il quale teorema può essere considerato come il risultato centrale della Memoria e verrà stabilito per gradi.

La proposizione enunciata coincide formalmente con la C) di N. II). Però in N. II), nella definizione di punto quasi-fondamentale non compare la

$$\gamma \cdot [t^{-1}(\lambda) \dot{+} t(\lambda) \dot{+} t^{-2}(\lambda) \dot{+} t^{2}(\lambda) \dot{+} \dots] = G + t(G) \text{ (11)},$$

mentre in quella di punto semi-fondamentale non compaiono nè la 5), nè la 7) [o la 2')] del n. 3.

L'aggiunta di queste condizioni aumenta notevolmente la portata del teorema. Tanto che io mi sono deciso a imporre ai punti semi-fondamentali anche la 7) del n. 3, non ostante che ciò renda le dimostrazioni molto più difficili. E mi ci sono deciso, perchè non so ancora se la 7) del n. 3 sia, o non sia, essenziale per poter applicare con successo il teorema I) allo studio della struttura degli autoomeomorfismi di una superficie bilatera. Naturalmente in questa seconda alternativa, converrà dare al teorema I) un significato meno espressivo dell'attuale.

(11) Veramente in N. II) i segmenti quasi-fondamentali erano assogettati alla condizione $\gamma \subset \lambda \dot{+} \Sigma(\lambda)$, più restrittiva della relazione del testo. E così le spezzate semi-fondamentali erano assogettate alla $\varphi \subset \lambda + \Sigma(\lambda)$, più restrittiva della 5), che verrà ricordata subito dopo nel testo. Ma si è trattato di errori materiali di trascrizione. In N. II) io intendevo scrivere $\gamma \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ e $\varphi \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; e non sapevo ancora che a γ e a φ si poteva imporre di non contenere nell'interno punti di $\sigma(\lambda)$, che non fossero interni a λ.

6. - I TEOREMI II) E III). - Il primo caso in cui dimostrerò il teorema I), si è quello che gli eventuali vertici di λ siano tutti di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

In questo caso, poichè il teorema I) è vero, se il numero n dei lati di λ si riduce ad 1 [ved. n. 4, B)], è spontaneo chiedersi se non si possa dimostrare quel teorema per induzione completa. Nel fatto è così: però il procedimento induttivo è tale che per poterlo rendere conclusivo è necessario piegarlo a dimostrare una proposizione ancora più penetrante; e cioè il

TEOREMA II): *Ferme le altre ipotesi del teorema* I), *ammesso che tutti gli eventuali vertici di* λ *siano di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$ *e detto di nuovo* n *il numero dei lati di* λ,

se $n = 1$, λ *ammette punti interni, fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n = 2$, *ogni lato di* λ *contiene almeno un punto interno, fondamentale rispetto a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

se $n > 2$, *la spezzata costituita dai lati di* λ *diversi da quelli estremi contiene almeno un punto interno, fondamentale o quasi-fondamentale rispetto a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$.

Come si vede, il teorema II) garentisce l'esistenza di almeno un punto fondamentale o di almeno un punto quasi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, e permette di dire qualcosa sui lati di λ, che contengano certamente punti di quei tipi.

Anzi il teorema II) può essere ancora precisato, nel senso che sussiste il seguente

TEOREMA III): *Ferme le ipotesi del teorema* II),

se $n = 1$, *esistono punti, interni a* λ, *fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n = 2$, *esistono, per ogni lato di* λ, *punti interni a quel lato e fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n > 2$, *esistono punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *interni alla spezzata costituita dai lati di* λ *diversi da quelli estremi.*

La dimostrazione del teorema II) si svolge in parte sulla traccia di quella sviluppata in N. I). Ma io la riprendo integralmente, per fornire un quadro completo. Avrò così anche occasione di riprendere in esame il caso $n = 4$ del teorema II), e quindi una particolare configurazione per λ, a proposito della quale in N. I) mi è sfuggita una delle possibili alternative.

È poi evidente che:

D) *Nelle ipotesi del teorema* II), *i punti fondamentali o quasi-fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *non possono mai cadere nei vertici di* λ.

Infatti si supponga $n > 1$ (la proposizione, invero, ha senso, soltanto se si fa questa ipotesi). Allora, un segmento o un raggio, diretto come uno degli assi e che passi per un vertice [di λ di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$], o ha dei punti esterni a $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ o ha dei punti, a sè interni, che sono interni a uno dei due lati di λ, aventi quel vertice come estremo. Quindi un vertice di λ [di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$] non può essere un punto di λ fondamentale rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

Inoltre, se $\gamma = Gt(G)$ è un segmento semi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, γ non può contenere nell'interno un vertice di λ [di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$], perchè altrimenti γ non sarebbe contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$. Sicchè ci basta escludere che possano essere vertici di λ i punti G e $t(G)$.

Possiamo limitarci a ridurre a un assurdo l'ipotesi che G sia un vertice di λ, perchè l'altra si riconduce a questa, scambiando gli uffici di t e t^{-1}.

Suppongasi dunque che G sia un vertice di λ. Allora γ contiene nell'interno punti interni a un lato c di λ; ed è o $\gamma \subset c$ e $\gamma \neq c$, o $\gamma = c$, o $\gamma \supset c$ e $\gamma \neq c$. Le prime due alternative vanno escluse, perchè c non ha punti comuni con la propria immagine (in quanto parte propria di λ), mentre $\gamma \cdot t(\gamma) \neq 0$. La terza alternativa implica che γ contiene nell'interno un estremo di c. Questo non può essere un vertice di λ, per quanto s'è visto. Indi esso è un estremo di λ. Ma allora γ conterrebbe nell'interno punti di $t^{-1}(\lambda)$ o $t(\lambda)$, il che è escluso per definizione.

Nel ragionamento svolto è implicito che:

E) *Ferme le ipotesi del teorema* II), *i punti quasi-fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *sono quasi-fondamentali in senso stretto;* e che:

F) *Ferme le ipotesi del teorema* I), *i punti fondamentali di* λ *e* $\Sigma(\lambda)$ *non possono cadere nei vertici di* λ *di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$.

7. – Il teorema IV). – Il teorema II) dice in sostanza che il teorema I) è vero, se il numero m dei vertici di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, è nullo.

Quindi è spontaneo chiedersi, se non si debba poter procedere per induzione anche nel dimostrare il teorema I).

E ciò accade nel fatto. Però anche stavolta il procedimento induttivo è tale, da rendere consigliabile di sostituire il teorema I) con una proposizione ancora più penetrante; o precisamente col

Teorema IV): *Nelle ipotesi del teorema* I), *detto* n *il numero dei lati di* λ *ed* m *quello degli (eventuali) vertici di* λ *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$,

α) *se* $n = 1$, λ *contiene nell'interno punti fondamentali rispetto a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

β) *se* $n = 2$ *e* $m = 0$, *ogni lato di* λ *contiene nell'interno punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

γ) *se* $n = 2$ *e* $m = 1$, *il vertice di* λ *o è fondamentale, o quasi-fondamentale, o semi-fondamentale, in senso stretto* (12), *per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

invece:

δ) *se il numero* n *è maggiore di* 2,

o:

δ_1) *uno (almeno) dei lati di* λ, *diversi da quelli estremi, contiene (almeno) un punto fondamentale per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

oppure:

δ_2) *uno (almeno) dei vertici di* λ, *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *è quasi-fondamentale per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

oppure:

δ_3) *uno (almeno) dei vertici di* λ, *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *è semi-fondamentale in senso stretto per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$.

Le tre alternative δ_1), δ_2) *e* δ_3) *non si escludono a vicenda.*

(12) Questo attributo «in senso stretto» va riferito soltanto alla parola «semi-fondamentale», e non alla parola quasi-fondamentale.

Se nell'enunciato del teorema I) si intende che nella definizione di un punto semi-fondamentale sia soppressa la condizione 7) del n. 3, per pervenire a una dimostrazione di quel teorema, basta dimostrare il teorema IV), sostituendo nella tesi i punti semi-fondamentali in senso stretto con punti semi-fondamentali, nel senso più ampio attuale [cioè sopprimendo la condizione 7)]. E la dimostrazione del teorema IV) dovrebbe allora risultare notevolmente più semplice.

8. - Un ultimo avvertimento. Il teorema I) sarà dimostrato o con la costruzione effettiva di un punto fondamentale, o quasi- o semi-fondamentale ben determinato; o con la dimostrazione che il luogo dei punti richiesti riempie almeno un sottosegmento di λ; o con la riduzione ad un caso in cui il problema sia da considerarsi già risolto. Tutte queste circostanze permettono, se si vuole, di associare a λ e $\Sigma(\lambda)$ un relativo punto fondamentale, o quasi-, o semi-fondamentale, secondo una legge di scelta fissata esplicitamente.

§ 2.

LEMMI.

9. - CONVENZIONI E RICHIAMI. - Nel seguito π, t, λ, $\sigma(\lambda)$, $\Sigma(\lambda)$, m, n, P, $t(P)$, Q_0, $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ e Q_n hanno sempre il significato chiarito nei nn. 1 - 7; in particolare: m è il numero (eventualmente nullo) dei vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; n è il numero dei lati di λ; inoltre Q_0 e Q_n coincidono rispettivamente con P e $t(P)$.

Rammentiamo di nuovo che $\sigma(\lambda)$ si può porre in corrispondenza biunivoca e bicontinua con una retta.

Ricordiamo pure che:

Una curva semplice e aperta c taglia la propria immagine $t(c)$ nella t, se esiste un arco di traslazione ω (di t), nonché tre interi relativi x, y e z tali da aversi $x < y < z$, $c \cdot t^x(\omega) \neq 0$, $c \cdot t^z(\omega) \neq 0$ e invece $c \cdot t^y(\omega) = 0$;

il quale enunciato costituisce il così detto teorema fondamentale di BROUWER sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata (13).

10. – PRIMI LEMMI. – In questo e nei due numeri successivi indico alcune proposizioni preliminari, tutte già note (se non altro sostanzialmente) ed in parte aventi anzi dignità di teoremi.

Intanto rammento che, secondo BROUWER:

I). *Se ω è un arco di traslazione di t e se la curva semplice e aperta c, di estremi A e B, ha soltanto gli estremi sulla traiettoria $\sigma(\omega)$, l'interno di c è contenuto in uno stesso campo adiacente a $\sigma(\omega)$* (14);

di guisa che:

II). *Se ω è un arco di traslazione di t e la curva semplice e aperta c, di estremi A e B, ha soltanto gli estremi su $\sigma(\omega)$, la curva semplice e chiusa j, individuata da c e dall'arco α di ω di estremi A e B, non separa dall'infinito nessun punto di $\sigma(\omega)$,*

atteso che $\sigma(\omega)$ non ha punti multipli e che:

III). *Le due semilinee $\sigma_f(\omega) = t(\omega) \dot{+} t^2(\omega) \dot{+} \ldots$, $\sigma_i(\omega) = t^{-1}(\omega) \dot{+} t^{-2}(\omega) \dot{+} \ldots$ sono entrambe illimitate.*

Dai lemmi I) e II) si trae che:

IV). *Se ω è un arco di traslazione (di t), se la curva semplice e aperta c ha soltanto gli estremi A e B su $\sigma(\omega)$ e se α è l'arco individuato su $\sigma(\omega)$ da A e B, posto $j = \alpha \dot{+} c$ e detti J l'insieme, chiuso e limitato, racchiuso da j e $\Sigma(\omega)$ il campo adiacente a $\sigma(\omega)$ e contenente l'interno di c, $\Sigma(\omega)$ contiene anche tutti i punti di $J - \alpha$.*

(13) L'importanza di questo teorema è grandissima. Per una bibliografia su di esso, si veda: G. SCORZA DRAGONI: ***Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano*** [«Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», Classe di scienze fis., mat. e nat., serie 8ª, vol. I (1946), pagg. 156-161].

(14) Questo teorema segue subito dalla definizione di campo adiacente data nel n. **1**. Nel fatto, per legittimare quella definizione, bisogna dimostrare, fra l'altro un teorema analogo al lemma I).

Per la bibliografia rimando al n. 9 di M. I). Avverto poi che non tutte queste proposizioni sono per me essenziali in una forma così generale. Ma qui non conviene insistere su circostanze simili. Piuttosto è preferibile esplicitare alcune conseguenze immediate di quelle proposizioni.

11. - Intanto, a norma del teorema fondamentale di Brouwer, ricordato nel n. 9, è evidente che:

V). *Se* ω *è un arco di traslazione* (*di* t) *e se la curva semplice e aperta* c *di estremi* A *e* B *non taglia* $t(c)$ *e soddisfa alla*

$$c \cdot \omega \neq 0$$

ed alla

$$c \cdot [t^{-1}(\omega) \dotplus \omega \dotplus t(\omega)] \subset A + B,$$

risulta

$$c \cdot \sigma(\omega) \subset A + B\,;$$

di guisa che, se $c \cdot [t^{-1}(\omega) \dotplus \omega \dotplus t(\omega)] = A + B$, ha senso considerare l'insieme J del lemma IV).

Inoltre:

VI). *Se* ω *è un arco di traslazione* (*di* t) *e se per la curva semplice e aperta* c *di estremi* A *e* B *riesce*

$$c \cdot t(c) = 0, \quad c \cdot \omega \neq 0, \quad c \cdot [t^{-1}(\omega) \dotplus \omega \dotplus t(\omega)] = A + B,$$

detto α *l'arco di* $\sigma(\omega)$ *di estremi* A *e* B *e posto* $j = \alpha \dotplus c$, *per l'insieme chiuso e limitato* J, *racchiuso da* j, *riesce*

$$J \cdot t(J) = 0\,;$$

infatti j è semplice e chiusa [lemma V)], quindi la definizione di J non è illusoria; J non contiene nell'interno nessun punto di $\sigma(\omega)$ [lemma II)] e, in particolare, nessun punto di $t(\alpha)$; α e $t(\alpha)$ possono avere al più un estremo comune, perchè c e $t(c)$ non si tagliano [teorema di Brouwer, n. 9], e anche questa eventualità va esclusa, per la $c \cdot t(c) = 0$; $c \cdot \sigma(\omega)$ si riduce ad $A + B$ [lemma V)] e quindi $c \cdot t(\alpha)$ e $\alpha \cdot t(c)$ sono insiemi vuoti; epperò $j \cdot t(j) = 0$; $t(j)$ contiene l'arco $t(\alpha)$ che non è interno a J; quindi è $J \cdot t(J) = 0$, - cfr. M. I), pag. 188 -; mentre un ragionamento analogo prova che:

VII). *Se* ω *è un arco di traslazione* (*di* t) *e se per la curva semplice e aperta* c *di estremi* A *e* B *riesce*

$$c \cdot t(c) = B\,(^{15}),\quad c \cdot \omega \neq 0,\quad c \cdot [t^{-1}(\omega) \dot{+} \omega \dot{+} t(\omega)] = A + B\,(^{16}),$$

detto α *l'arco di* $\sigma(\omega)$ *di estremi* A *e* B *e posto* $j = \alpha \dot{+} c$, *per l'insieme chiuso e limitato* J, *delimitato dalla curva semplice e chiusa* j, *riesce*

$$J \cdot t(J) = B\,;$$

e, più generalmente, che:

VIII). *Il lemma precedente continua a sussistere, se si sostituisce l'ipotesi* $c \cdot t(c) = B$ *con quella, che* $c \cdot t(c)$ *non si tagliano, e la tesi* $J \cdot t(J) = B$ *con la tesi* $J \cdot t(J) = c \cdot t(c)$.

12. - Dimostriamo ora che:

IX). *Se* ω *ed* o, *con* $\omega \cdot o \neq 0$, *sono due archi di traslazione* (*di* t), *se* o *è contenuto in* $\sigma(\omega) + \Sigma(\omega)$, $\Sigma(\omega)$ *essendo uno dei due campi adiacenti a* $\sigma(\omega)$, *uno*, $\Sigma(o)$, *dei due campi adiacenti a* $\sigma(o)$ *è contenuto in* $\Sigma(\omega)$, *mentre l'altro*, $\Sigma'(o)$, *contiene tutti i punti di* $\sigma(\omega) - \sigma(\omega) \cdot \sigma(o)$; *di guisa che* ω *è contenuto in* $\sigma(o) + \Sigma'(o)$, *e quindi uno*, $\Sigma'(\omega)$, *dei campi adiacenti a* $\sigma(\omega)$ *è contenuto in* $\Sigma'(o)$, *mentre l'altro, e precisamente* $\Sigma(\omega)$, *contiene tutti i punti di* $\sigma(o) - \sigma(o) \cdot \sigma(\omega)$.

Il lemma è sostanzialmente contenuto nel lemma V) di N. I), - senza esaurirlo affatto -; ed è banale se $\sigma(o)$ coincide con $\sigma(\omega)$.

(15) Allora c è un arco di traslazione, ed è $B = t(A)$.

(16) Non è escluso che A e B siano gli estremi di ω.

Supponiamo dunque $\sigma(o) \neq \sigma(\omega)$. Allora, poichè o ed ω sono entrambi due archi di traslazione, entrambi gli insiemi $o - o \cdot \omega$ ed $\omega - \omega \cdot o$ sono diversi da zero.

Poichè o è contenuto in $\sigma(\omega) + \Sigma(\omega)$ e poichè una traiettoria e un campo adiacente ad una traiettoria sono invarianti nella t [17], nelle ipotesi del lemma, $\sigma(o)$ è contenuta in $\sigma(\omega) + \Sigma(\omega)$. Quindi $\sigma(o)$ e $\sigma(\omega)$ non si tagliano mai. Di qui e dall'essere $\sigma(o) \cdot \sigma(\omega) \neq 0$ segue che $\sigma(\omega) - \sigma(\omega) \cdot \sigma(o)$ è contenuto per intero in uno, $\Sigma'(o)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(o)$. Inoltre, poichè $\sigma(\omega) - \sigma(\omega) \cdot \sigma(o) \neq 0$, $\Sigma'(o)$ è individuato.

Sia $\Sigma(o)$ il campo adiacente a $\sigma(o)$ diverso da $\Sigma'(o)$ e sia N un punto di o interno a $\Sigma(\omega)$, punto che esiste di certo, perchè o non è interamente contenuto in $\sigma(\omega)$, attesa la $\sigma(o) \neq \sigma(\omega)$. Allora i punti di $\Sigma(o)$ sufficientemente prossimi ad N sono interni a $\Sigma(\omega)$ e di qui e dalla definizione di campo adiacente ad una traiettoria, oltre che dalla $\Sigma(o) \cdot \sigma(\omega) = 0$, è facile concludere nel senso voluto.

Dimostriamo ora che:

X). *Se ω è un arco di traslazione (di t) e c è una curva semplice e aperta, di estremi A e B, per la quale sia*

$$c \cdot t(c) \subset B$$

e

$$c \cdot \omega = c \cdot [t^{-1}(\omega) \dot{+} \omega \dot{+} t(\omega)] = A + B,$$

detto α l'arco (di $\sigma(\omega)$, cioè) di ω di estremi A e B, l'arco

$$o = (\omega - \alpha) + c$$

è un arco di traslazione,

il quale lemma è implicitamente riconosciuto vero, sia pure soltanto in parte, in loc. cit. nota [18], n. 8.

Infatti, nelle ipotesi poste, se $c \cdot t(c) = B$, c è un arco di traslazione, e gli estremi di c coincidono con quelli, Q e $t(Q)$, di ω. Ma allora $o = c$, e l'affermazione è evidente.

(17) Per le traiettorie la cosa è evidente, per i campi adiacenti la cosa segue dall'invarianza delle traiettorie e dal fatto che t conserva il senso delle rotazioni.

Se $c \cdot t(c) = 0$, uno dei due punti A e B è interno a ω; e o e t(o) hanno un estremo comune, precisamente l'estremo $t(Q)$ di ω. Proviamo che è o $\cdot$ t(o) $= t(Q)$. Infatti, un punto R_1 di o [diverso da $t(Q)$ e] interno a c non appartiene certo a $t(c)$, perchè $c \cdot t(c) = 0$; ma non appartiene nemmeno a $t(\omega)$, perchè nelle ipotesi attuali esso è [lemmi V) e I)] interno a uno dei campi adiacenti a $\sigma(\omega)$; un punto R_2 di o, diverso da $t(Q)$ e non interno a c, appartiene a ω, e come tale esso non appartiene a $t(\omega)$, perchè $\omega \cdot t(\omega) = t(Q)$; e non appartiene nemmeno all'interno di $t(c)$, perchè l'interno di $t(c)$ appartiene a uno dei campi adiacenti a $\sigma(\omega)$. Dopo di che si applichi il teorema del n. 11 di M. I).

Inoltre, dai lemmi I), V) e IX) è facile dedurre che:

XI). *Nelle ipotesi del lemma precedente, tutti i punti di* o $-$ o $\cdot\, \omega = c - (A + B)$ *sono contenuti in uno stesso campo,* $\Sigma(\omega)$, *adiacente a* $\sigma(\omega)$; *di guisa che uno,* Σ(o), *dei due campi adiacenti a* σ(o) *è contenuto per intero in* $\Sigma(\omega)$, *mentre l'altro,* Σ'(o), *contiene* $\sigma(\omega) - \sigma(\omega) \cdot \sigma$(o); *inoltre* $\Sigma(\omega)$ *contiene* σ(o) $- \sigma$(o) $\cdot\, \sigma(\omega)$ *e l'altro,* $\Sigma'(\omega)$, *dei due campi adiacenti a* $\sigma(\omega)$ *è contenuto in* Σ'(o).

Dimostriamo infine che:

XII). *Se* ω *ed* o *sono due archi di traslazione di* t, *con*

$$\omega \cdot \text{o} \neq 0, \qquad \text{o} \subset \sigma(\omega) + \Sigma(\omega),$$

$\Sigma(\omega)$ *essendo un campo adiacente a* $\sigma(\omega)$; *se* o *non contiene nell'interno nessun punto di* $\sigma_i(\omega) = t^{-1}(\omega) \dotplus t^{-2}(\omega) \dotplus \ldots$ *nè di* $\sigma_f(\omega) = t(\omega) \dotplus t^2(\omega) \dotplus \ldots$; *se* c *è una curva semplice e aperta contenuta in* σ(o) $+ \Sigma$(o), Σ(o) *essendo* [*lemma* IX)] *il campo adiacente a* σ(o) *contenuto in* $\Sigma(\omega)$; *se* c *non contiene nell'interno nessun punto di* σ_i(o) $= t^{-1}$(o) $\dotplus t^{-2}$(o) $\dotplus \ldots$ *nè di* σ_f(o) $= t$(o) $\dotplus t^2$(o) $\dotplus \ldots$; *allora* c *non contiene nell'interno nessun punto nè di* $\sigma_i(\omega)$ *nè di* $\sigma_f(\omega)$.

Infatti è $c \subset \sigma$(o) $+ \Sigma$(o) $\subset \sigma(\omega) + \Sigma(\omega)$. Un punto C di $\sigma(\omega)$ che appartenga a c, non potendo essere contenuto in $\Sigma(\omega)$, in quanto punto di $\sigma(\omega)$, non appartiene nemmeno a Σ(o) $\subset \Sigma(\omega)$; dunque c è un punto di σ(o). Ma allora, se C è anche interno a

c, esso appartiene ad o ed anzi è interno ad o, perchè gli estremi di o appartengono uno a $\sigma_i(o)$ e l'altro a $\sigma_f(o)$; ma allora C non appartiene nemmeno a $\sigma_i(\omega) + \sigma_f(\omega)$, come volevasi.

13. - CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DI PUNTI FONDAMENTALI. - In conformità di quanto si è detto all'inizio del n. 9, λ *sia un arco di traslazione, costituito da una spezzata con un numero finito di lati, ciascuno diretto come uno degli assi di* π, *e* $\Sigma(\lambda)$ *uno dei campi adiacenti a* $\sigma(\lambda)$.

Allora:

XIII). *Il segmento* $s = KA$ *contiene un segmento fondamentale, relativo a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *di origine* K, *se l'estremo* K *di* s *è interno* (18) *a* λ; *se* s *ha la direzione di uno degli assi e si rivolge verso* $\Sigma(\lambda)$, *nel partire da* K; *se sono soddisfatte le uguaglianze*

$$(s - A) \cdot \lambda = K, \quad (s - A) \cdot t^{-1}(\lambda) = 0, \quad (s - A) \cdot t(\lambda) = 0$$

e la disuguaglianza

$$(s - A - K) \cdot t(s - A - K) \neq 0\,;$$

il quale lemma differisce dal lemma II) di N. I) solo formalmente (e peraltro è una conseguenza pressochè immediata della definizione di punto fondamentale).

Un'osservazione analoga vale a proposito dei lemmi I) e III) di N. I) e dei seguenti:

XIV). *La semiretta* k, *di origine* K, *è essa stessa un raggio fondamentale, relativo a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *oppure contiene un segmento fondamentale, di origine* K, *relativo a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *se il punto* K *è interno a* λ; *se* k *ha la direzione di uno*

(18) Data la definizione di punto fondamentale prescelta, questa ipotesi non è più essenziale; peraltro essa è implicita anche nelle $(s - A) \cdot t^{-1}(\lambda) = (s - A) \cdot t(\lambda) = 0$, che dovrebbero quindi essere sostituite anch'esse dalle $(s - A - K) \cdot t^{-1}(\lambda) = (s - A - K) \cdot t(\lambda) = 0$. Un'osservazione analoga vale anche per i tre lemmi successivi.

degli assi e si rivolge verso $\Sigma(\lambda)$, *nel partire da* K; *e se risulta*

$$k \cdot \lambda = K, \qquad k \cdot t^{-1}(\lambda) = 0, \qquad k \cdot t(\lambda) = 0;$$

e:

XV). *La tesi del lemma precedente è sempre vera, se l'origine* K *della semiretta* k *è interna a* λ *e se* k *ha la direzione di uno degli assi, si rivolge verso* $\Sigma(\lambda)$, *nel partire da* K, *e contiene un segmento* s *tale, che valgano le uguaglianze.*

$$s \cdot \lambda = K, \qquad s \cdot t^{-1}(\lambda) = 0, \qquad s \cdot t(\lambda) = 0$$

e la disuguaglianza

$$(s - K) \cdot \sigma(\lambda) \neq 0;$$

- anzi, in queste ipotesi, k contiene sempre un segmento fondamentale, di origine K, relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$.

Inoltre nella dimostrazione del lemma IV) di N. I) è implicito che:

XVI). *Il segmento* $s = KA$ *è un segmento quasi-fondamentale rispetto a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *se* K *è interno a* λ *ed* A *appartiene a* $\sigma(\lambda)$, *se* s *ha la direzione di uno degli assi, se* s *e* $t(s)$ *hanno punti comuni, ma soltanto punti che siano estremi o di* s *o di* $t(s)$, *e, finalmente, se sono soddisfatte le tre uguaglianze*

$$(s - A - K) \cdot \lambda = 0, \qquad (s - A - K) \cdot t^{-1}(\lambda) = 0,$$
$$(s - A \quad K) \cdot t(\lambda) = 0,$$

- *le quali uguaglianze* (servono soltanto per stabilire che allora è

$$(s - A - K) \cdot \Sigma(\lambda) = s - A - K,$$

e quindi) *possono essere sostituite dalle*

$$s \cdot \sigma(\lambda) \dotplus s \cdot \Sigma(\lambda) = s, \quad s - s \cdot \lambda \neq 0, \quad s \cdot \sigma(\lambda) - s \cdot \lambda = A,$$

atteso che queste, unite alle altre ipotesi del teorema, permettono già di dire che il segmento di traslazione s (19) è un segmento quasi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ –.

Invece nella dimostrazione del lemma V) di N. I) è implicito che:

XVII). *Se* ν *è un arco di traslazione dotato delle seguenti proprietà: è costituito da un numero finito di segmenti, ciascuno diretto come uno degli assi; l'intersezione* $\lambda \cdot \nu$ *non è vuota;* ν *è contenuto in* $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; *allora gli eventuali punti fondamentali di* ν, *relativi a quello contenuto in* $\Sigma(\lambda)$ *dei due campi adiacenti a* $\sigma(\nu)$, *ed appartenenti a* λ, *sono fondamentali anche per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$.

§ 3.

Altri lemmi.

14. – Una condizione sufficiente per l'esistenza di un punto quasi-fondamentale. – Dimostriamo ora che:

XVIII). *Ferme le solite ipotesi su* λ, $\sigma(\lambda)$ *e* $\Sigma(\lambda)$, *sia* ν *un arco di traslazione il quale goda delle seguenti proprietà: è costituito da un numero finito di segmenti, ciascuno diretto come uno degli assi; l'intersezione* $\lambda \cdot \nu$ *non è vuota; i punti dell'intersezione* $\sigma(\lambda) \cdot \nu$, *interni a* ν, *sono interni a* λ; ν *è contenuto in* $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; *allora gli eventuali punti di* ν, *quasi-fondamentali rispetto al campo* $\Sigma(\nu)$, *adiacente a* $\sigma(\nu)$ *e contenuto in* $\Sigma(\lambda)$ [*lemma* IX)], *sono quasi-fondamentali anche per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *non appena appartengano a* λ.

Sia infatti F' un punto di $\lambda \cdot \nu$, quasi-fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$. E sia γ un segmento quasi-fondamentale, relativo a ν e $\Sigma(\nu)$, contenente F'.

(19) Il segmento s è di traslazione per il solo fatto che è $s \cdot \lambda = K$ (perchè $s \cdot \sigma(\lambda) - s \cdot \lambda$ contiene soltanto un punto) e $0 \mp s \cdot t(s) \subset K \dotplus A \dotplus t(K) \dotplus \dotplus t(A)$; – di guisa che o è $A = t(K)$ o è $A = t^{-1}(K)$ –; e ciò in virtù di una mia osservazione; cfr. per es. M. I), n. 11.

Allora è

$$\gamma \cdot \lambda \supset F' ;$$

inoltre risulta

$$\gamma \subset \sigma(\nu) + \Sigma(\nu) \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda),$$

mentre dalle ipotesi e dal lemma XII), postovi $\lambda = \omega$, $\nu = o$, $\gamma = c$, si deduce subito che ogni punto di $\gamma \cdot \sigma(\lambda)$, interno a γ, è anche interno a λ. Donde la conclusione.

15. – Altre condizioni sufficienti per l'esistenza di punti fondamentali e quasi-fondamentali. – Sia λ un arco di traslazione (del tipo considerato nei nn. 9 e 13). Sia $c = AB$ un segmento, diretto come uno degli assi, il quale

non incontri la propria immagine o abbia comune con essa soltanto il punto B;

abbia gli estremi e soltanto gli estremi su λ; di guisa che, se $c \cdot t(c) = B$, c è un segmento di traslazione con $A = P$, $B = t(P)$;

non abbia punti su $t^{-1}(\lambda)$ e $t(\lambda)$, a meno eventualmente degli estremi.

Dai lemmi X) e XI), detto α l'arco di λ di estremi A e B e posto

$$\nu = (\lambda - \alpha) + c,$$

si trae che: ν è un arco di traslazione (dello stesso tipo di λ); che i punti interni a c sono interni a uno stesso campo, $\Sigma(\lambda)$, adiacente a $\sigma(\lambda)$; che uno, $\Sigma(\nu)$, dei campi adiacenti a $\sigma(\nu)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$; mentre l'altro, $\Sigma'(\nu)$, contiene tutti i punti interni ad α.

E ancora, se J è l'insieme chiuso e limitato, delimitato dalla curva semplice e chiusa $j = c \dotplus \alpha$, $J - \alpha$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$, $J - c$ è contenuto in $\Sigma'(\nu)$, mentre J e $t(J)$ hanno comune al più il punto B [lemmi VII), VI), V) e IV)].

Si supponga ora che R' sia un punto di ν, fondamentale rispetto a $\Sigma(\nu)$; e sia w' il segmento o il raggio, fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$, di origine R'.

Allora $w' - R'$ è contenuto in $\Sigma(\nu)$ e quindi in $\Sigma(\lambda)$.

Epperò, se R' appartiene a λ, esso è senz'altro un punto fondamentale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$; la cosa segue peraltro anche dal lemma XVII), che risulta anzi implicitamente dimostrato dalle considerazioni precedenti.

Se R' è interno a c, e quindi a $\Sigma(\lambda)$, sia R il punto *interno* ad α e tale, che il segmento RR' sia normale a c, e che l'interno di RR' appartenga all'interno di J. E si ponga

$$w = RR' \dot{+} w',$$

di guisa che w è un segmento o un raggio diretto come uno degli assi.

Dico che *w è un segmento o un raggio fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$*; di guisa che *R è un punto di λ fondamentale rispetto a $\Sigma(\lambda)$*.

Infatti il segmento RR', privato degli estremi, appartiene a $J - j$ e quindi a $\Sigma(\lambda)$; invece $w' - R'$ è contenuto in $\Sigma(\nu) \subset \Sigma(\lambda)$; sicchè $w - R$ appartiene a $\Sigma(\lambda)$.

Inoltre, se S' è un punto di w', interno a w' se w' è un segmento, diverso da R' se w' è un raggio, il segmento RS' non incontra la propria immagine, perchè

$$R'S' \cdot t(R'S') = 0$$

– atteso che w' o è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine R' o è un raggio che non incontra la propria immagine –; perchè

$$RR' \cdot t(RR') = 0$$

– atteso che RR' appartiene a J e non contiene B, mentre $J \cdot t(J) \subset B$ –; e, finalmente, perchè

$$R'S' \cdot t(RR') = 0 \quad \text{e} \quad RR' \cdot t(R'S') = 0$$

– atteso che $R' \neq t(R')$, mentre i punti di RR' e di $R'S'$ distinti da R' sono rispettivamente interni ai campi $\Sigma'(\nu)$ e $\Sigma(\nu)$, privi di punti comuni e trasformati ciascuno in se stesso dalla t.

Inoltre risulta $w \cdot t(R) = 0$ e $w \cdot t^{-1}(R) = 0$, perchè $w \cdot \sigma(\lambda) = R$, mentre $t^{-1}(R)$ e $t(R)$ sono distinti da R e appartengono a $\sigma(\lambda)$.

Donde la $R' S' \cdot t(R' S') = 0$ [20].

Di qui segue senz'altro che, se w' è un raggio (fondamentale), riesce anche $w \cdot t(w) = 0$.

Invece, se w' è un segmento fondamentale e se S è l'estremo di w' diverso da R', si ha evidentemente $w \cdot t(w) = w' \cdot t(w') \subset S + t(S)$.

Riassùmendo:

XIX). *Se λ ha il significato convenuto una volta per sempre; se c è o un segmento di traslazione (di t) o un segmento che non incontra la propria immagine nella t; se c ha gli estremi e soltanto gli estremi su $\sigma(\lambda)$, gli estremi di c appartenendo anzi a λ, ed è diretto come uno degli assi; se α è l'arco di λ dagli stessi estremi di c, si presentano le seguenti circostanze:*

l'arco $\nu = (\lambda - \alpha) + c$ è un arco di traslazione dello stesso tipo di λ;

i punti interni a c, vale a dire i punti di $\nu - \nu \cdot \lambda$ sono tutti interni a uno stesso, $\Sigma(\lambda)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$;

uno, $\Sigma(\nu)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\nu)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$;

l'altro, $\Sigma'(\nu)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\nu)$ contiene tutti i punti di $\lambda - \lambda \cdot \nu$, cioe tutti i punti interni ad α;

un punto di ν non interno a c e fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$ è tale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$;
mentre

se c contiene nell'interno un punto fondamentale relativo a ν e $\Sigma(\nu)$, α contiene nell'interno un punto fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$.

Inoltre nel ragionamento svolto è implicito che

XX). *Ferme le ipotesi e le notazioni del lemma precedente, si denoti con j la curva semplice e chiusa $c \dot{+} \alpha$ e con J l'insieme chiuso e limitato, delimitato da j; e sia d una curva semplice e aperta, che si spezzi in due sottoarchi d_1 e d_2 tali da aversi*

[20] Per il ragionamento svolto, si cfr. anche M. II), § 3 e nota [58].

$$d_1 \cdot c = d_2 \cdot c = D,$$

D essendo un punto interno a c,

$$d_1 \cdot \Sigma(\nu) = d_1 - D, \quad d_1 \cdot t(d_1) = 0$$

e

$$d_2 \cdot J = d_2;$$

allora d e t(d) non hanno punti comuni.

Ed è al pari evidente che:

XXI). *Ferme tutte le ipotesi del lemma* XIX) *e le notazioni, gli eventuali punti di* $\nu \cdot \lambda$ *quasi-fondamentali per* ν *e* $\Sigma(\nu)$, *sono quasi-fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$; allora infatti $\nu \cdot \sigma(\lambda)$ è uguale a $\nu \cdot \lambda \neq 0$ e i punti di $\nu \cdot \sigma(\lambda)$ interni a ν sono anche interni a λ, di guisa che si può applicare il lemma XVIII).

E che cosa corrisponderà, nelle ipotesi del lemma precedente, ad un punto di ν, quasi-fondamentale rispetto a $\Sigma(\nu)$ e interno a c?

Sia R' un simile punto. Se esso è un punto quasi-fondamentale in senso stretto per ν e $\Sigma(\nu)$, allora, con lo stesso ragionamento usato per dimostrare l'ultima parte del lemma XIX), si riconosce che ad esso corrisponde l'esistenza di un punto fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ interno ad α. Nel caso contrario, sia γ un segmento quasi-fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$, contenente R'. Se γ ha la stessa direzione di c, γ non può essere una parte propria di c, perchè altrimenti sarebbe $\gamma \cdot t(\gamma) = 0$. Indi γ contiene almeno un estremo di c, cioè un punto di $\lambda \cdot \nu$; ma ogni punto di $\gamma \cdot \nu$ è quasi-fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$; quindi, in questo caso, a norma dello stesso lemma XXI), si conclude con l'esistenza di punti di λ, quasi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$. Suppongasi invece che γ sia ortogonale a c. Allora è necessariamente $\gamma \cdot (\nu - c) \neq 0$, perchè altrimenti γ sarebbe quasi-fondamentale in senso stretto per ν e $\Sigma(\nu)$.

E ciò basterebbe per concludere in modo analogo al precedente. Ma è opportuno affinare ulteriormente l'indagine. Nel caso attuale è $\gamma \cdot c = R'$ ed R' è un estremo di γ, chè altrimenti γ taglierebbe ν e non potrebbe essere contenuto in $\sigma(\nu) + \Sigma(\nu)$.

Si consideri ora il primo punto Q' di $\gamma \cdot (\nu - c)$ $(= \gamma \cdot \lambda)$, incontrato su γ a partire da R'. Allora Q' è interno a γ. Infatti, nel caso contrario dovrebbe o essere $R' = t(Q')$, o $R' = t^{-1}(Q')$, e queste relazioni sono incompatibili con le ipotesi che R' sia interno a c e quindi a $\Sigma(\lambda)$. In quanto interno a γ, Q' non può nemmeno essere un estremo di ν (cioè λ), perchè in tal caso apparterebbe a $t^{-1}(\nu)$ o $t(\nu)$, mentre γ non contiene nell'interno punti di $t^{-1}(\nu) + t(\nu)$. Dunque Q' è un vertice di ν (perchè altrimenti γ taglierebbe ν), diverso dagli estremi di c; epperò Q' è anche un vertice di λ. In definitiva:

XXII). *Ferme le ipotesi e le notazioni del lemma* XXI), *se esiste un punto interno a* c *e quasi-fondamentale per* ν *e* $\Sigma(\nu)$, *o uno dei punti interni ad* a *è fondamentale per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *oppure fra gli estremi di* c *e i vertici di* λ *esiste (almeno) un punto quasi-fondamentale per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$.

16. - Continua l'argomento precedente. - I lemmi XIX)-XXII) si applicano al caso che ν differisca da λ per un segmento, che abbia *entrambi* gli estremi su λ. In questo numero ci si occuperà del caso, che ν differisca da λ per un segmento, che possa anche avere soltanto un estremo su λ.

Incomincisi con l'osservare che:

XXIII). *Se* λ *e* ν *sono due archi di traslazione, costituiti entrambi da un numero finito di lati, ciascuno diretto come uno degli assi coordinati; se l'intersezione* $\lambda \cdot \nu$ *non è vuota* (21)*; se* ν *è contenuto nella somma di* $\sigma(\lambda)$ *e di uno,* $\Sigma(\lambda)$, *dei due campi adiacenti a* $\sigma(\lambda)$*; se tutti i vertici di* ν *sono di prima categoria rispetto al campo* $\Sigma(\nu)$, *adiacente a* $\sigma(\nu)$ *e contenuto in* $\Sigma(\lambda)$*; se i lati di* ν *sono almeno due; se al più uno dei lati di* ν *è provvisto di punti interni a* $\Sigma(\lambda)$, *e questo lato è uno di quelli estremi per* ν*; e, finalmente, se il teorema* III) *è vero*

(21) La condizione $\lambda \cdot \nu \neq 0$ è anche conseguenza delle altre ipotesi.

per ν *(e* $\Sigma(\nu)$*); allora* λ *contiene punti fondamentali relativi a* $\Sigma(\lambda)$.

A norma infatti del lemma XVII), basta dimostrare che almeno uno dei punti fondamentali di ν relativi a $\Sigma(\nu)$ appartiene a λ. Ebbene, se $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ sono i lati di ν, essi, nelle ipotesi poste, appartengono tutti a λ, meno, al più, uno dei due lati estremi, per es. ν_1. Allora: 1). se $p = 2$, ν_2 contiene almeno un punto fondamentale relativo a $\Sigma(\nu)$, in virtù del teorema III), cui ν soddisfa; e questo punto è interno a ν_2; epperò è interno a λ; 2). se $p > 2$, uno almeno dei lati $\nu_2, \ldots, \nu_{p-1}$ contiene un punto fondamentale rispetto a $\Sigma(\nu)$, e questo punto è anzi interno a quel lato, per la *D*) del n. 6: dunque, ecc.

Nelle considerazioni svolte è implicito che:

XXIV). *Ferme le altre ipotesi del lemma precedente, se tutti i vertici di* λ *sono di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$*, se* ν *ha almeno tre lati e quelli non estremi sono contenuti nei lati non estremi di* λ*, il teorema* III) *è verificato anche nei riguardi di* λ *e* $\Sigma(\lambda)$. *L'ipotesi che* ν *abbia almeno tre lati può essere sostituita da quella che* ν *ne abbia due e che uno dei lati di* ν *appartenga ad un lato non estremo di* λ.

Con ragionamenti analoghi a quelli svolti per dimostrare i lemmi XVIII), XXII) e XXIII), si riconosce che:

XXV). *Se* λ *e* ν *sono due archi di traslazione, costituiti entrambi da un numero finito di lati, paralleli ciascuno a uno degli assi coordinati; se l'intersezione di* λ *e di* ν *non è vuota (ipotesi questa non indipendente dalle rimanenti); se l'interno di* ν *è contenuto nella somma dell'interno di* λ *e di uno,* $\Sigma(\lambda)$*, dei campi adiacenti a* $\sigma(\lambda)$*; se tutti i vertici di* ν *sono di prima categoria rispetto al campo* $\Sigma(\nu)$*, adiacente a* $\sigma(\nu)$ *e contenuto in* $\Sigma(\lambda)$*; se i lati di* ν *sono almeno due e se al più uno dei lati estremi di* ν *ha punti in* $\Sigma(\lambda)$*, mentre l'altro è contenuto in* λ*, al pari di quelli non estremi; e, finalmente, se il teorema* II) *è vero per* ν *(e* $\Sigma(\nu)$*);* λ *contiene o dei punti fondamentali o dei punti quasi-fondamentali relativi a* $\Sigma(\lambda)$.

Infatti, se ν ha due lati, si può procedere come nella dimostrazione del lemma XXIII), perchè allora per ν i teoremi II) e III) coincidono. Se ν ha almeno tre lati, e se uno dei lati non estremi di ν contiene un punto fondamentale relativo a ν e $\Sigma(\nu)$, si procede sempre come nel caso del lemma XXIII). Se ν ha almeno tre lati e non si presenta l'alternativa precedente, uno dei lati non estremi di ν contiene un punto quasi-fondamentale rispetto a $\Sigma(\nu)$. Allora la validità del lemma attuale segue subito da quella del lemma XVIII), atteso che, nelle ipotesi attuali, tutti i punti di $\nu \cdot \sigma(\lambda)$, interni a ν, sono interni a λ.

Inoltre, in base allo stesso ragionamento testè svolto, è evidente che:

XXVI) *Ferme tutte le ipotesi del lemma precedente, se tutti i vertici di* λ *sono di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *il teorema* II) *è valido per* λ [(*e per* $\Sigma(\lambda)$) *una volta che lo sia per* ν (*e per* $\Sigma(\nu)$)], *qualora siano soddisfatte le seguenti condizioni ulteriori:*

se ν *ha almeno tre lati, i lati non estremi di* ν *sono contenuti nei lati non estremi di* λ;

se ν *ha due lati, uno dei lati di* ν *è contenuto in un lato non estremo di* λ.

Nelle dimostrazioni dei teoremi II), III) e IV), date nei paragrafi successivi, sono naturalmente impliciti altri lemmi, che esprimerebbero altre condizioni sufficienti per l'esistenza di punti fondamentali o quasi-fondamentali. Ma il porli in evidenza a parte non sarebbe gran che utile, ai fini della rapidità e della perspicuità della esposizione.

17. – Condizioni sufficienti per l'esistenza di punti semi-fondamentali in senso stretto. – In contrasto con quanto si è detto nel n. prec., conviene invece cercare di alleggerire la dimostrazione del teorema IV). Epperò è opportuno isolare due lemmi (ved. nn. 19 e 20), relativi a due condizioni per l'esistenza di punti semi-fondamentali in senso stretto. Ed è consigliabile farlo, anche se si tratta di due lemmi che verranno applicati ciascuno una volta sola; di guisa che il darli a parte non serve certo ad abbreviare l'esposizione, ma ha, come risultato, quello di poter esporre la dimostrazione del teorema IV) in modo da non occultare i punti salienti dietro una congerie di considerazioni collaterali.

Naturalmente, dalla dimostrazione del teorema IV) non sarebbe difficile isolare altre condizioni, sufficienti per l'esistenza di punti semi-fondamentali in senso stretto. Ma per queste si può ripetere quello che s'è detto alla fine del n. 16.

18. – Premettiamo un'osservazione, che sarà applicata più volte nel seguito:

XXVII). *Se* λ *e* ν *sono due archi di traslazione, costituiti entrambi da un numero finito di lati, paralleli ciascuno a uno degli assi coordinati; se* $\lambda \cdot \nu$ *non è vuota (ipotesi questa che non è indipendente dalle rimanenti); se* ν *è contenuto nella somma di* $\sigma(\lambda)$ *e di uno,* $\Sigma(\lambda)$, *dei campi adiacenti a* $\sigma(\lambda)$; *se i punti di* $\nu \cdot \sigma(\lambda)$ *interni a* ν *sono interni anche a* λ; *se* w *è una spezzata semi-fondamentale rispetto a* $\sigma(\nu)$ *e al campo* $\Sigma(\nu)$, *adiacente a* $\sigma(\nu)$ *e contenuto in* $\Sigma(\lambda)$; *e, finalmente, se il vertice* W *di* w *appartiene a* λ; w *è anche una spezzata semi-fondamentale, in senso stretto, rispetto a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *qualora* λ *e* ν *abbiano più di due lati.*

Infatti w soddisfa senz'altro alla 1) del n. 3. Inoltre è $w \subset \sigma(\nu) + \Sigma(\nu) \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ e $w \cdot \Sigma(\lambda) \supset w \cdot \Sigma(\nu) \neq 0$. Quindi w soddisfa alle 3) e 4) del n. 3 anche rispetto a λ.

E ancora: i punti di $w \cdot \sigma(\nu)$, interni a w, sono, per ipotesi, interni a ν; di qui, dall'essere interni a λ i punti di $\nu \cdot \sigma(\lambda)$ interni a ν e dal lemma XII), si trae facilmente che w non contiene nell'interno punti di $w \cdot \sigma(\lambda)$, che non siano interni a λ. Quindi w soddisfa alla 5) del n. 3 anche rispetto a λ. In particolare: W è interno a λ, perchè appartiene a λ, per ipotesi, ed è interno a w, in quanto vertice di w. Sicchè w soddisfa anche alla 2'), alternativa *b*), del n. 3.

Inoltre il campo $\Sigma(w)$, adiacente a $\sigma(w)$ e contenuto in $\Sigma(\nu)$, è anche contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e W è di prima categoria rispetto a

$\Sigma(w)$. Dunque W è un punto semi-fondamentale in senso stretto rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$.

In questo asserto è naturalmente implicita la conclusione voluta.

Si osservi che:

XXVIII). *Nelle ipotesi del lemma precedente, ogni punto di* $w \cdot \lambda$ *è semi-fondamentale in senso stretto rispetto a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$,

com'è evidente, atteso appunto che w è semi-fondamentale in senso stretto per λ e $\Sigma(\lambda)$.

19. - Si supponga che:

1). λ *e* ν *siano due archi di traslazione, costituiti entrambi da spezzate di un numero finito di lati, diretti ciascuno come uno degli assi; e* $\Sigma(\lambda)$ *sia uno dei due campi adiacenti a* $\sigma(\lambda)$:

che:

2). ν *abbia almeno tre lati*;

che:

3). *l'interno di uno,* ν', *dei lati estremi di* ν *appartenga a* $\Sigma(\lambda)$, *e che tutti gli altri lati di* ν *appartengano a* λ; *di guisa che* $\nu \subset \sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$;

che:

4). *il vertice* Q' *di* ν, *appartenente a* ν', *sia anche un vertice di* λ; *di guisa che i lati non estremi di* ν *sono contenuti in lati non estremi di* λ;

che:

5). *il punto* Q' *sia un vertice di* λ *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$; *mentre sia un vertice di prima categoria per* ν *rispetto al campo* $\Sigma(\nu)$, *adiacente a* $\sigma(\nu)$ *e* [*ved. lemma* IX)] *contenuto in* $\Sigma(\lambda)$;

e che:

6). *esistano vertici di* ν, *di seconda categoria rispetto* $\Sigma(\nu)$, *i quali saranno tali anche rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *in quanto vertici di* λ,

e ciò per la 3) e la $\Sigma(\nu) \subset \Sigma(\lambda)$.

Dalla 3) segue che:

7). *i punti di* $\nu \cdot \sigma(\lambda)$, *interni a* ν, *sono interni anche a* λ;
e dalle 2) e 4) che:

8). *i lati di* λ *sono almeno tre*;
mentre è evidente che:

9). *l'estremo* P' *di* ν' *diverso da* Q' *è un estremo di* ν.

Orbene, alle altre si aggiunga l'ipotesi che:

10). *il punto* P' *non sia interno a* λ.
(di guisa che P' appartiene allora, necessariamente, o a $t^{-1}(\lambda)$ o a $t(\lambda)$, atteso che l'estremo di ν diverso da P' appartiene a λ).

Allora:

XXIX). *Ferme le ipotesi* 1),..., 6) *e* 10), *se* w *è una spezzata semi-fondamentale, in senso stretto, per* ν *e* $\Sigma(\nu)$, *la quale contenga (almeno) uno dei vertici di seconda categoria di* ν *rispetto a* $\Sigma(\nu)$, w *è anche una spezzata semi-fondamentale in senso stretto per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *e contiene un vertice di* λ *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$.

Infatti, sia W il vertice di w e $\Sigma(w)$ il campo adiacente a $\sigma(w)$ contenuto in $\Sigma(\nu)$.

Allora: $\Sigma(w)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e W è di prima categoria rispetto a $\Sigma(w)$.

Poichè ν ha almeno tre lati, w soddisfa, rispetto a ν, alla 1') del n. 3 e alle alternative *b*) e *c*) della 2') dello stesso n. 3.

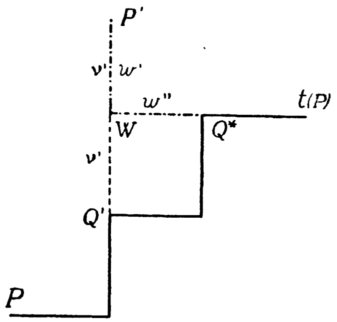
Se W appartiene a λ, il lemma XXIX) segue senz'altro dalle 7) e 8) di questo n. 19 e dal lemma XXVII).

Se entrambi i lati di w hanno punti contenuti nella spezzata costituita dai lati non estremi di ν, entrambi i lati di w hanno punti contenuti nella spezzata costituita dai lati non estremi di λ. Allora, dal lemma XII) e dalla 7) segue che i punti di $\sigma(\lambda) \cdot w$, interni a w, sono interni a λ, atteso che sono interni a ν quelli di $\sigma(\nu) \cdot w$, interni a w. E dopo di ciò è facile concludere nel senso voluto, analogamente a quanto si è fatto nel n. 18.

Esclusi questi due casi, o W appartiene a ν' ed è diverso da Q', o uno dei lati di w ha al più l'estremo diverso da W su ν.

Nel primo caso, W non può coincidere nemmeno con P'

(perchè altrimenti P' sarebbe un estremo di ν interno a w); quindi W è interno a ν'. Allora, dei due lati di w, uno, w'', ha soltanto un estremo su ν', l'altro, w', ha punti, a sè interni, nell'interno di ν' (perchè ν', w' e w'' sono diretti, ciascuno, come uno degli assi, w' e w'' essendo ortogonali fra di loro). Il segmento w' è completamente contenuto in ν'. Infatti w' non può contenere nell'interno P', perchè P' non può essere interno a w, come si è già detto; e w' non può contenere nell'interno nemmeno Q', perchè altrimenti w', avrebbe punti esterni a $\sigma(\nu) + \Sigma(\nu)$, atteso che Q' è un vertice di ν di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. In particolare: w' non contiene vertici di ν di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Quindi, per l'ipotesi, w'' deve contenere almeno un vertice siffatto; e sia Q^* il più vicino a W di questi - di guisa che i punti di WQ^* diversi da Q^* sono interni a $\Sigma(\nu)$, e quindi a $\Sigma(\lambda)$, perchè w è per ν e $\Sigma(\nu)$ una spezzata semi-fondamentale; Q^* è anche un vertice di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.



Si presentano ora due alternative: w' contiene, oppure non contiene Q'. Nella prima, attesa la 4), sia w' che w'' contengono punti della spezzata costituita dai lati non estremi di ν e di λ; e questo caso è stato escluso (ma un ragionamento analogo a quello che faremo permetterebbe, volendo, di mostrare che si avrebbe addirittura una particolarizzazione assurda di un caso già considerato). Nella seconda, si indichi con W' l'estremo di w' diverso da W, analogo significato avendo W'' per w''. Dico che W' non può appartenere a WQ'. Infatti, nel caso che W' appartenesse a WQ', W' sarebbe *interno* a questo segmento. E si denoti allora con e l'arco di ν (e di λ) di estremi Q' e Q^* e con E l'insieme, chiuso e limitato, delimitato dalla curva semplice e chiusa $e \dot{+} Q'W \dot{+} WQ^*$. Il punto P' non appartiene al contorno di E; inoltre il segmento WQ^* non incontra la propria immagine, ha soltanto gli estremi su $\sigma(\nu)$; dunque [lemma II)]

P' è esterno ad E. La semitraiettoria $\sigma'(w)$ di $\sigma(w)$, di origine W' e non contenente W, a un certo momento deve penetrare in $\Sigma(\nu)$ partendo da un punto di $W'Q' \dotplus e$, perchè altrimenti w non conterebbe nell'interno punti di $\Sigma(\nu)$ (esterni a ν). Ma P' è esterno ad E e W è di prima categoria rispetto a $\Sigma(w) \subset \Sigma(\nu)$; in conclusione $\sigma'(w)$ penetra in E. Nè può poi uscirne, contro il lemma III), perchè il contorno di E appartiene a ν e w. Epperò W' è interno a WP'. Ciò premesso, si ponga $w^* = Q'W$. Allora $w^* \dotplus w'$ è un segmento che non incontra la propria immagine nella t, perchè contenuto in ν'; per lo stesso motivo $w^* \dotplus w'$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$, a meno di Q' ed eventualmente dell'estremo di w' diverso da W, nel caso che questo estremo coincida con P'; per la 3) e la 10) riesce $(w^* \dotplus w') \cdot \lambda \subset Q' + P'$ e $w^* \cdot \sigma(\lambda)$ si riduce al punto Q', che appartiene alla spezzata costituita dai lati non estremi di λ. Inoltre, nelle ipotesi attuali, l'estremo W'' di w'' appartiene a ν o è interno a $t^{-1}(\nu)$ o a $t(\nu)$; mentre, per definizione, i punti interni a w'' appartengono a $\nu + \Sigma(\nu)$. D'altra parte w'' e ν' hanno comune soltanto W. Sicchè $w^* \dotplus w''$ si spezza in due parti: una data da $(w^* \dotplus w'') \cdot \Sigma(\nu) = w'' \cdot \Sigma(\nu)$ e l'altra da $(w^* \dotplus w'') \cdot \nu \dotplus W'' \subset \sigma(\nu)$; e di queste parti la prima non incontra la propria immagine, perchè w'' è un segmento parziale di w; la seconda nemmeno, perchè, a meno eventualmente di W'', è contenuta in quello dei due sottoarchi, individuati su ν da W, che lascia W' all'esterno. Ma è anche $\sigma(\nu) \cdot \Sigma(\nu) = 0$. E in definitiva si ha che $w^* \dotplus w''$ non incontra la propria immagine. Ne segue: $w^* \cdot t(w^*) = 0$, $w^* \cdot t(w) = 0$, $w^* \cdot t^{-1}(w) = 0$. Epperò è ormai facile concludere nel senso voluto.

Non ci resta che esaminare il secondo caso. E sia ancora w'' quel lato di w che contiene un vertice di ν, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, giusta l'ipotesi; e w' quel lato di w che non contiene nell'interno punti di ν. Sia W' l'estremo di w' diverso da W. Allora, a norma della c) del n. 3, esiste un segmento w^* tale, che la spezzata $w^* \dotplus w'$ sia un segmento con l'interno contenuto in $\Sigma(\nu)$ e un estremo W^* sulla spezzata costituita dai lati non estremi di ν e che w^* non incontri $t(w^*)$, $t(w)$ e $t^{-1}(w)$.

Ne viene che w^* è necessariamente uguale a $W^* W$ e non a $W^* W'$.

Ma allora:

$w' - W'$ non contiene punti di λ, perchè è contenuto (in $\Sigma(\nu)$ e quindi) in $\Sigma(\lambda)$;

inoltre:

$w^* \dotplus w'$ è un segmento contenuto in $\Sigma(\lambda)$, a meno di W^* ed eventualmente di W';

e:

w^* non incontra $t(w^*)$, $t(w)$ e $t^{-1}(w)$;

e ancora:

l'estremo W^* di w^* appartiene anche, a norma della 4), alla spezzata costituita dai lati non estremi di λ;

e finalmente:

w'' contiene un vertice di λ, cioè un punto di quella spezzata; anzi w'' contiene un vertice di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$;

e quindi è ormai facile concludere nel senso voluto.

Il lemma è così completamente dimostrato.

20. - Si supponga ora che:

1). *λ e ν siano due archi di traslazione, costituiti entrambi da due spezzate di un numero finito di lati, ciascuno dei quali sia diretto come uno degli assi;*

che:

2). *ν abbia almeno tre lati;*

che:

3). *l'insieme $\nu - \nu \cdot \lambda$ si riduca a un segmento $c = Q' Q''$, privato degli estremi, e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, a meno degli estremi; di guisa che ν è contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$, mentre c non esaurisce ν, e quindi non incontra la propria immagine;*

che:

4). *l' estremo Q' di c sia per λ un vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; l' estremo Q'' sia o interno a un lato di λ, o vertice, per λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; e sia α il sottoarco di λ individuato da Q' e Q'';*

che:

5). *l' estremo Q' di c sia interno a un lato di ν, l' estremo Q'' sia o interno a un lato di ν, o vertice, per ν, di prima categoria rispetto al campo $\Sigma(\nu)$, adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$;*

che:

6). *esistano vertici di ν di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, che saranno tutti tali anche rispetto a $\Sigma(\lambda)$, in quanto vertici di λ,*

e ciò per la 3), la 4) e la $\Sigma(\nu) \subset \Sigma(\lambda)$.

Dalla 3) si trae che:

7). *i punti di $\nu \cdot \sigma(\lambda)$, interni a ν, sono interni anche a λ;*

che:

8). *anche i lati di λ sono almeno tre;*

e che:

9). *i punti di $\lambda \cdot \nu$, contenuti in lati non estremi di ν, appartengono anche a lati non estremi di λ, a meno eventualmente di Q''.*

Allora:

XXX). *Ferme le ipotesi* 1),.., 6), *se w è una spezzata semi-fondamentale, in senso stretto, per ν e $\Sigma(\nu)$ e se w contiene (almeno) un vertice di ν, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, w è anche una spezzata semi-fondamentale, in senso stretto, per λ e $\Sigma(\lambda)$ e contiene un vertice di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.*

Infatti sia W il vertice di w; $\Sigma(w)$ il campo adiacente a $\sigma(w)$ contenuto in $\Sigma(\nu)$; Q^* un vertice di ν, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, contenuto in w.

Allora $\Sigma(w)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e W è di prima categoria rispetto a $\Sigma(w)$. Inoltre, in conformità della 6), Q^* è anche un vertice di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

Poichè ν ha almeno tre lati, w soddisfa alla 1') del n. 3, nonchè alla *b*) ed alla *c*) dello stesso numero.

Se W appartiene a λ, il lemma XXX) segue senz'altro dalle 7) e 8) di questo n. 20 e dal lemma XXVII).

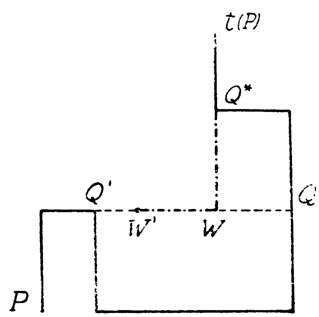
Se W non appartiene a ν e se entrambi i lati di w hanno punti contenuti in lati non estremi di ν, diciamo: w' e w'' i due lati di w, e V' e V'' rispettivamente i più vicini a W dei punti dei due insiemi $\nu \cdot w'$ e $\nu \cdot w''$; e_0 il sottoarco di ν di estremi V' e V''; E_0 l'insieme, chiuso e limitato, delimitato da $e_0 \dot{+} V'W \dot{+} WV''$. Ciò premesso, in virtù delle ipotesi poste, la spezzata $V'W \dot{+} WV''$ è contenuta in $\Sigma(\nu)$, a meno degli estremi, che appartengono a ν, e non incontra la propria immagine. Quindi, a norma dei lemmi dei nn. 10 e 11, $E_0 - e_0$ appartiene per intero a $\Sigma(\nu)$, mentre [lemma XI)] $E_0 - - (V'W \dot{+} WV'')$ è contenuto nel campo $\Sigma'(w)$ adiacente a $\sigma(w)$ e diverso da $\Sigma(w)$. E supposto ora che w'' sia quel lato di w che contiene un vertice di ν di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$ [e quindi tale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$], denotiamo con V^* quel punto di e_0 tale che $v^* = WV^*$ abbia i suoi punti interni nell'interno di E_0 [di guisa che $v^* \cdot t(v^*) = 0$] e che $v^* \dot{+} w'$ sia un segmento. L'esistenza di v^* è certa, perche W è di seconda categoria rispetto a $\Sigma'(w)$ e perchè E_0 è contenuto in $\sigma(w) + + \Sigma(w)$. Ed è del pari evidente che $E_0 - w \cdot E_0$ non contiene nell'interno punti di $\sigma(w)$; sicchè v^* non incontra nè $t(w)$, nè $t^{-1}(w)$. Ma allora è facile concludere nel modo voluto: w è una spezzata semi-fondamentale in senso stretto anche per λ e $\Sigma(\lambda)$: infatti V^* è certamente diverso da Q'', perchè Q'' è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$; quindi o V^* appartiene a λ, ed allora è anche contenuto in un lato non estremo di λ, ecc.; o V^* è interno a c, allora v^* è normale a c, e in tal caso sia V^{**} quel punto dell'arco α di λ di estremi Q' e Q'' tale, che, posto $v^{**} = V^*V^{**}$, $v^{**} \dot{+} v^* \dot{+} w'$ sia un segmento e che v^{**} non abbia punti in $\Sigma(\nu)$, di guisa che è chiaro che v^{**} non incontra $t(v^* \dot{+} w)$ e $t^{-1}(v^* \dot{+} w)$, mentre non incontra nemmeno $t(v^{**})$, atteso che l'insieme, chiuso e limitato, delimitato da $c \dot{+} \alpha$ non ha punti comuni con la propria immagine. Le considerazioni svolte permetterebbero anche, volendo, di dimostrare che la definizione di spezzata semi-fondamentale in senso stretto data nel n. 3 può essere modificata, nel senso che la c) si può ritenere soddisfatta ogni volta che il vertice della spezzata φ non è interno a λ; e ciò, come conseguenza se entrambi i lati di φ hanno un punto contenuto in $Q_1 Q_2 \dotplus \ldots \dotplus Q_{n-2} Q_{n-1}$, come condizione nell'altro caso.

Esclusi questi due casi, uno dei lati di w non deve contenere vertici di ν. Siano allora di nuovo w'' quel lato di w che contiene un vertice di ν, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, e w' quello che non contiene vertici di ν.

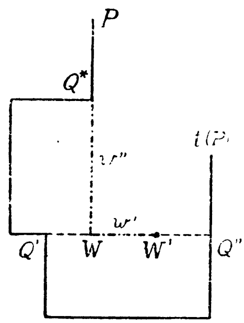
Esclusi quei due casi: 1). o W è interno a c; 2). o w' ha al più l'estremo W' diverso da W su ν, attesa la b) del n. 3.

Nel primo caso, uno dei lati di w ha soltanto un estremo su c, mentre l'altro contiene nell'interno punti interni a c.

a_1) Se w' contiene nell'interno punti di c, e se w' contiene Q', entrambi i lati di w contengono vertici di λ. E ci si trova ricondotti a un caso analogo ad uno già considerato. Se w' contiene Q'', e se Q'' è un vertice di λ, ci ritroviamo nelle condizioni precedenti. Se w' contiene Q'' e se Q'' è [ved. la 4) di questo n.] interno a un lato di λ, Q'' è necessariamente un estremo di w', perchè altrimenti w' taglierebbe λ, e w non sarebbe contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda) \supset \sigma(\nu) + \Sigma(\nu)$, il che è assurdo. Dunque w' è contenuto in c e W è interno a c.



Se w' è contenuto in $Q' W$, sia Q^{**} il più vicino a W dei vertici di λ contenuti in w'': allora Q^{**} appartiene anche a ν e dico che Q'' è compreso fra Q' e Q^{**} su ν e quindi su λ (vale a dire che anche Q'' appartiene alla spezzata costituita dai lati non estremi di λ). Infatti se Q' fosse compreso tra Q^{**} e Q'' su ν, l'arco ν_0, ottenuto da ν sostituendo la sottospezzata ρ di ν di estremi W e Q^{**} con il segmento WQ^{**} (contenuto in w'' e quindi privo di punti comuni con la propria immagine), ν_0, dico, è un arco di traslazione, contenuto in ν, a meno dei punti interni a WQ^{**}, i quali appartengono a $\Sigma(\nu)$. Ma allora la spezzata $Q'' W \dotplus WQ^{**}$, che ha soltanto gli estremi su $\sigma(\lambda)$, non incontra la propria immagine. Indichiamo ora con e_1 ed e_2 i due sottoarchi di λ di estremi rispettivi Q', Q'' e Q^{**}, Q''; e con E_1 ed E_2 gli insiemi, chiusi e limitati, delimitati da $e_1 \dot{+} c$, $e_2 \dot{+} Q''W \dot{+} WQ^{**}$. A norma di ragionamenti analoghi a quelli del n. 15, i punti interni ad E_2 non appartengono a quello, $\Sigma(\nu_0)$, dei campi adiacenti a $\sigma(\nu_0)$ che è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e cioè in $\Sigma(\nu)$; quelli interni a E_1 non appartengono a $\Sigma(\nu)$. In particolare, i punti interni a WQ^{**} sono non interni e quindi esterni ad E_1. Indi W, in quanto interno a c, è un vertice di ν_0 di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu_0)$; epperò di seconda rispetto all'altro campo, $\Sigma'(\nu_0)$, adiacente a $\sigma(\nu_0)$ e contenente nell'interno i punti interni ad E_2. Inoltre W' è interno a $Q'W$; dunque i punti di w' diversi da W sono interni ad E_2. Ciò premesso, sia $\sigma'(w)$ la semitraiettoria della $\sigma(w)$ di origine W' e non contenente W: allora $\sigma'(w)$ deve uscire da E_2, perchè non è limitata; non può tagliare $\sigma(\lambda)$; non può incontrare $WQ^{**} \subset w$; dunque deve incontrare WQ''. Sia Z il primo punto di WQ'' incontrato su $\sigma'(w)$ a partire da W'. Il punto Z è interno a ν, epperò non può essere interno nè a $t(w)$ nè a $t^{-1}(w)$, perchè altrimenti w conterrebbe nell'interno punti o interni a $t^{-1}(\nu)$ o interni a $t(\nu)$, contro la definizione di spezzata semi-fondamentale. Ma allora WZ deve incontrare la propria immagine, a norma del teorema del n. 9. Ora questo è impossibile, perchè nelle ipotesi attuali E_2 e $t(E_2)$ non hanno punti comuni, a norma del lemma VI). Dunque Q' non può essere compreso su ν fra Q'' e Q^{**}. È poi evidente che Q^{**} non può essere compreso su ν fra Q' e Q'' (cioè che Q^{**} non appartiene a c). Dunque Q'' appartiene alla spezzata costituita dai lati non estremi di λ. E in questo caso si ponga $w^* = WQ''$.



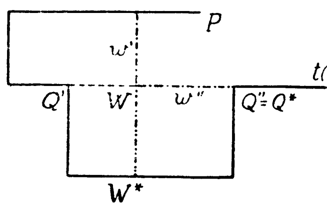
Se w' è contenuto in WQ'', si ponga $w^* = Q'W$.

In ogni caso $w^* \dot{+} w'$ è un segmento contenuto in c epperò in $\Sigma(\lambda)$, a meno di uno o due estremi. Dalla $w^* \subset c$, segue anche la $w^* \cdot t(w^*) = 0$. Invece la $w^* \cdot t(w) = 0$ e la $w^* \cdot t^{-1}(w) = 0$ si stabiliscono nel modo che segue;

$t(w)$ e $t^{-1}(w)$ non contengono nell'interno punti interni a ν. Quindi un punto V, comune a w^* e $t^{-1}(w)$ o $t(w)$, sarebbe di estremo per $t^{-1}(w)$ o $t(w)$. Ma W è interno a w: dunque il segmento $W\,V$ non incontrerebbe la propria immagine; avrebbe soltanto gli estremi su $w \dot{+} t^{-1}(w)$ o su $w \dot{+} t(w)$; e conterebbe nell'interno l'immagine di uno dei suoi estremi. Ora tutto questo è assurdo, a norma del teorema del n. 9.

Inoltre w^* contiene un punto di un lato non estremo di λ. Ma, allora è evidente che w soddisfa alle 1′) e 2′) del n. 3 anche nei riguardi di λ e $\Sigma(\lambda)$; epperò, in questo primo sotto-caso, w è semi-fondamentale in senso stretto rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$.

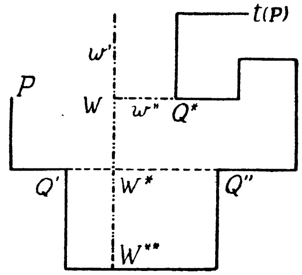
a_2) Se w' ha soltanto un estremo in c, questi è necessariamente il punto W, interno a c. In questo caso, si indichi con j la curva semplice e chiusa costituita da c e dell'arco di λ di estremi Q' e Q'' e con J l'insieme chiuso e limitato, delimitato da j. E sia W^* il punto definito dalle seguenti condizioni: il segmento $W\,W^*$ appartiene a J, anzi i suoi punti interni sono interni a J; $W\,W^*$ è normale a c. In queste ipotesi si riconosce subito (che W^* o è un vertice di λ o è interno a un lato non estremo di λ e quindi) che W^* è in ogni caso contenuto in un lato non estremo di λ.



Inoltre è $w^* \cdot t(w^*) = 0$. E ancora, i punti di w o sono contenuti in $\Sigma(\nu)$ o appartengono a $\sigma(\nu)$. Ora, in quanto si è detto nel lemma XIX) è implicito che $(\sigma(\nu) + \Sigma(\nu)) \cdot w^* = W$; quindi è chiaro che $(\sigma(\nu) \dot{+} \Sigma(\nu)) \cdot t(w^*) = t(W)$, cioè che $t(w^*)$ non può contenere punti di w atteso che $t(W)$ è interno a $t(\nu)$, allo stesso modo come w^* non può contenere nè $t(W^*)$ nè punti di $t(w)$.

Ci rimane da esaminare soltanto il caso che uno, w', dei lati di w non incontri ν (e quindi nemmeno λ, come è evidente) in punti diversi dall'estremo W'.

b_1) In tal caso, a norma della b) del n. 3) applicata a w e ν, esiste un segmento w^* tale che, $w^* \dot{+} w'$ sia un segmento, contenuto in $\Sigma(\nu)$ a meno di un estremo W^* di w^* ed eventualmente di un estremo W' di w', mentre W^* appartiene a un lato non estremo di ν; e che w^* non incontri nè $t^{-1}(w)$ nè $t(w)$. Allora se $W^* = Q''$, Q'' è un vertice di λ; quindi, per la 9), se W^* appartiene a un lato di λ, basta ragionare come alla fine del n. 19, per concludere nel modo voluto: w è semi-fondamentale in senso stretto per λ e $\Sigma(\lambda)$. Se W^* è interno a c, $w^* \dotplus w'$ è normale a c in W^*. e w' non contiene nemmeno Q''. Allora, introdotti di nuovo gli insiemi j e J, si definisca il punto W^{**} in base alle seguenti condizioni: il segmento $w^{**} = W^* W^{**}$ è normale a c e i suoi punti interni sono interni a J (22).



In queste condizioni W^{**} è contenuto anch'esso in un lato non estremo di λ, al pari del punto W^* considerato nel caso a_2). E basta ragionare appunto come in questo caso, sostituendo w^{**} a w^* e $w^* \dotplus w$ a w, per concludere di nuovo nel modo voluto. Epperò il lemma XXX) è completamente dimostrato.

§ 4.

Dimostrazione del teorema II).

21. - Il teorema II) nel caso $n = 1$. - In questo caso il teorema II) si riduce al teorema B) del n. 4, [anzi a un risultato ancor meno espressivo, se si vuole, di quel teorema B)]. Esso quindi risale a v. Kerékjàrtó. Dò ugualmente un cenno

(22) Osserviamo incidentalmente che le condizioni della figura possono realizzarsi nel fatto soltanto se Q^* è un estremo di w. Ma una simile situazione di fatto non è quella generale: non devrebbe essere difficile costruire esempi in cui w presentasse entrambi gli estremi interni a $\Sigma(\lambda)$.

della dimostrazione, per ottenere una maggiore chiarezza nel seguito. Questo cenno si riduce a una trascrizione presso che letterale di quanto ho detto in N. I), n. 3, a proposito del teorema II) stesso, nel caso $n = 2$. Avverto infine che si tratta, nella sostanza, di considerazioni che risalgono a v. KERÉKJÀRTÓ.

Sia dunque $n = 1$ *e* $\lambda = Q_0 Q_1 = Pt(P)$.

Sia R il punto corrente di λ, estremi inclusi; r il raggio di origine R, normale a λ e rivolto: verso $\Sigma(\lambda)$, se R è interno a λ; da quella stessa banda della retta $Pt(P)$ verso cui è rivolto nel caso precedente, se R è un estremo di λ.

1). *Se per una particolare posizione* r_0 *di* r *risulta* $r_0 \cdot t^{-1}(\lambda) = r_0 \cdot t(\lambda) = 0$, l'origine R_0 di λ è interna a λ. Se R è abbastanza vicino a R_0, è del pari $r \cdot t^{-1}(\lambda) = r \cdot t(\lambda) = 0$. E a norma del lemma XIV), i punti fondamentali di λ, relativi a $\Sigma(\lambda)$, riempiono un sottosegmento di λ.

Se la circostanza anzidetta non si presenta mai, per *ogni* R diciamo S il primo punto di $t^{-1}(\lambda) \dot{+} t(\lambda)$, incontrato su r a partire da R, – di guisa che $S = P$, se $R = P$; $S = t(P)$, se $R = t(P)$ –. Inoltre, se $R \neq P$ e se S appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, denoti α l'arco di $t^{-1}(\lambda)$ di estremi S e P e j_α la curva semplice e chiusa $PR \dot{+} RS \dot{+} \alpha$; in questo caso è $t(P) \cdot j_\alpha = 0$. Se $R \neq t(P)$ e se S appartiene a $t(\lambda)$, indichi β l'arco di $t(\lambda)$ di estremi $t(P)$ ed S e j_β la curva semplice e chiusa $j_\beta = SR \dot{+} Rt(P) \dot{+} \beta$; è $P \cdot j_\beta = 0$.

2). Ciò premesso, *se per un certo* R, *interno a* $Pt(P)$, *il punto* S *corrispondente appartiene a* $t^{-1}(\lambda)$ *e* j_α *separa* $t(P)$ *dall'infinito*, j_α deve incontrare la semilinea illimitata [lemma III)] $\sigma_f(\lambda) = t(\lambda) \dot{+} t^2(\lambda) \dot{+} \ldots$. Dalla semplicità di $\sigma(\lambda)$ e da $RS \cdot t(\lambda) = 0$, segue $[\sigma_f(\lambda) - t(\lambda)] \cdot RS \neq 0$. E di qui e dal teorema fondamentale di BROUWER, ricordato nel n. 9, si trae che RS taglia $t(RS)$. Questo fatto si presenta anche per le posizioni del punto corrente di λ sufficientemente prossime a quella considerata, attesa la circostanza evidente della semicontinuità inferiore, in funzione di R, della lunghezza $\overline{RS}$ di RS. Il lemma XIII) assicura allora l'esistenza di un sottosegmento di λ, costituito da punti fondamentali relativi a $\Sigma(\lambda)$.

3). *Se per un certo R interno a $Pt(P)$, S appartiene a $t(\lambda)$ e j_β separa P dall'infinito,* si ragiona come nel caso precedente, o ci si riconduce al caso precedente con lo scambio degli uffici di t e t^{-1}.

Esclusi i sotto-casi 2) e 3), si riconosce facilmente che $Pt(P)$ contiene un punto K tale, che: se un (eventuale) $R \neq K$ è contenuto in PK, S appartiene a $t^{-1}(\lambda)$; se un (eventuale) $R \neq K$ è contenuto in $Kt(P)$, S appartiene a $t(\lambda)$, - il primo caso non va considerato, se $K = P$, il secondo, se $K = t(P)$.

Si ponga $r = k$ ed $S = H$, se $R = K$.

4). *Se H appartiene a $t^{-1}(\lambda)$,* K può coincidere sì con P (nel qual caso $H = P$), ma è diverso da $t(P)$; e la semiretta k contiene almeno un punto di $t(\lambda)$, perchè d'accumulazione per semirette che contengono tutte punti di $t(\lambda)$. Sia H_1 il punto di $t(\lambda) \cdot k$ più vicino a H; H_1 è diverso da $t(P)$; $t^{-1}(H_1)$ è interno all'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi H_1 e H; quindi si vede facilmente che HH_1 taglia la propria immagine nella t (teorema di BROUWER, n. 9). Lo stesso si può dire per RS, non appena $R(\neq P)$ sia abbastanza vicino a K e fra K e $t(P)$; e ciò perchè in queste condizioni è $\min \lim\limits_{R \to K} \overline{RS} \geq \overline{KH_1}$, dove R tende a K mantenendosi dopo K (secondo il verso positivo di λ). I punti fondamentali di λ, relativi a $\Sigma(\lambda)$, riempiono allora almeno un sottosegmento di λ, a norma del lemma XIII).

5). *Se H appartiene a $t(\lambda)$,* K è diverso da P, ma può coincidere con $t(P)$. Il caso si riconduce al precedente con lo scambio di t e t^{-1}.

Se $n = 1$, il teorema II) è quindi vero. I punti fondamentali di λ relativi a $\Sigma(\lambda)$, in questo caso, riempiono almeno un sottosegmento di λ.

22. - UN LEMMA. - Il ragionamento svolto nel n. prec. si presta alla dimostrazione di un risultato più generale, che verrà posto in luce per ottenere una maggior chiarezza nei casi che restano da esaminare.

Sia dunque λ il solito arco di traslazione, costituito da una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi, $\Sigma(\lambda)$ uno dei campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$, i vertici di λ potendo anche non essere tutti di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

Sia $P'P'_1$ un sottosegmento di λ; R' sia il punto corrente di $P'P'_1$; r' la semiretta di origine R', normale a $P'P'_1$ e rivolta verso $\Sigma(\lambda)$, nel partire da R', se R' è interno a $P'P'_1$; invece, se $R' = P'$ o $R' = P'_1$, r' sia la semiretta (di origine R', normale a PP'_1 ed) equiversa a una delle precedenti, e in questi casi r' sarà anche indicata rispettivamente con p' e p'_1.

Inoltre, se R' è interno a $P'P'_1$, denoti S' il primo eventuale punto di $t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)$, diverso da R', incontrato su r' a partire da R'; se un punto siffatto non esiste, cioè se $r' \cdot (t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)) = R'$ [23], denotisi con $R'S'$ la semiretta r' stessa, senza dare un significato al solo simbolo S'.

Introdotte queste notazioni, si facciano le seguenti ipotesi:

P' precede P'_1 (nel verso positivo di λ);

se R' è interno a $P'P'_1$, S' o non esiste, o appartiene a $t^{-1}(\lambda) + t(\lambda)$, pur potendo essere, eventualmente, un estremo di λ;

se $R' = P'$, p' contiene un punto P'' di $t^{-1}(\lambda)$ tale, che $P'P''$ non abbia punti di $t(\lambda)$;

se $R' = P'_1$, p'_1 contiene un punto P''_1 di $t(\lambda)$ tale, che $P'_1P''_1$ non abbia punti di $t^{-1}(\lambda)$.

In queste ipotesi, $P'P'_1$ contiene un sottosegmento tutto costituito da punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

La dimostrazione è concettualmente identica a quella svolta nel n. 21. Mi limito a riassumerla.

1). Se per un certo R', interno a $P'P'_1$, risulta $r' \cdot t^{-1}(\lambda) = r' \cdot t(\lambda) = 0$, i punti di λ sufficientemente prossimi a R' sono fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, come si riconosce con lo stesso ragionamento svolto nella 1) del n. 21.

(23) Si tenga presente che R' è interno a un lato di λ e che $t^{-1}(\lambda)$ e $t(\lambda)$ non passano per R'; dopo di ciò è facile riconoscere l'esattezza dell'affermazione fatta nel testo.

Se questa circostanza non si presenta mai, il punto S' esiste per ogni posizione di R', *interna* a $P'P'_1$, e appartiene o a $t^{-1}(\lambda)$, o a $t(\lambda)$; e le due alternative si escludono a vicenda.

Se si presenta la prima, denoti j'_α la curva semplice e chiusa costituita da $R'S'$ e dall'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi R' ed S'. Se si presenta la seconda, denoti j'_β la curva semplice e chiusa costituita da $R'S'$ e dall'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi R' ed S'. Nel primo caso è anche $t(P)\cdot j'_\alpha = 0$, mentre nel secondo è $P\cdot j'_\beta = 0$.

2). Ciò premesso, se per un certo R', interno a $P'P'_1$, il punto S' appartiene a $t^{-1}(\lambda)$ e j'_α separa $t(P)$ dall'infinito, si procede come nell'alternativa 2) del n. 21.

3). Se per un certo R' interno a $P'P'_1$, il punto S' appartiene a $t(\lambda)$ e j'_β separa P dall'infinito, si procede come nella 3) del n. 21.

Esclusi i sottocasi 2) e 3), si riconosce facilmente che $P'P'_1$ contiene un punto K', tale, che: se un (eventuale) $R' \neq K'$ è interno a $P'K'$, S' appartiene a $t^{-1}(\lambda)$; se un (eventuale) $R' \neq K'$ è interno a $K'P'_1$, S' appartiene a $t(\lambda)$. Ed è qui che gioca l'ipotesi fatta sull'ordine, con cui P' e P'_1 si seguono su λ.

Se K' è interno a $P'P'_1$, si ponga $k' = r'$ e $H' = S'$ per $R' = K'$. Se $K' = P'$, si ponga $k' = p'$, $H' = P''$. Se $K' = P'_1$, si ponga $k' = p'_1$, $H' = P''_1$.

4). Se H' appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, K' può coincidere sì con P' (nel qual caso $H' = P''$), ma è diverso da P'_1. E la semiretta k' contiene almeno un punto di $t(\lambda)$, che deve essere esterno a $K'H'$ [anche se $K' = P'$, perchè $P'P''$ non contiene punti di $t(\lambda)$]. Dopo di ciò, è facile proseguire come nell'alternativa 4) del n. 21.

5). Se H' appartiene a $t(\lambda)$, K' può coincidere sì con P'_1 (nel qual caso $H' = P''_1$), ma è diverso da P'. E la semiretta k' contiene almeno un punto di $t^{-1}(\lambda)$ esterno a $K'H'$ [anche se $K' = P'_1$, perchè $P'_1P''_1$ non contiene punti di $t(\lambda)$]. E poi si prosegue come nel caso 5) del n. 21.

Osservazione. – Le 3) e 5) di questo numero non sono distinte in modo essenziale dalle 2) e 4), analogamente a quanto accadeva nel numero precedente.

23. - Il teorema II) nei casi $n = 2$, $n = 3$. - *Sia* $n = 2$, $\lambda = PQ_1 \dot{+} Q_1 t(P)$ *e* Q_1 *sia di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$.

In questo caso, per riconoscere che il segmento PQ_1 [il segmento $Q_1 t(P)$] contiene tutto un intervallo costituito da punti fondamentali rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$, basta porre $P' = P$, $P'_1 = Q_1$ [$P' = Q_1$, $P'_1 = t(P)$] nel lemma del n. 22. In questo caso il ragionamento svolto nel n. 22 diventa quello del n. 3 di N. I). Si noti infine che basterebbe ragionare su PQ_1, per essere sicuri che il risultato vale anche per $Q_1 t(P)$. Ciò perchè gli uffici di PQ_1 e $Q_1 t(P)$ si scambiano, se si scambiano quelli di t e t^{-1}.

Sia $n = 3$, $\lambda = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 t(P)$, Q_1 *e* Q_2 *siano di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;
di guisa che $Q_1 P$ e $Q_2 t(P)$ sono situati dalla stessa banda della retta $Q_1 Q_2$.

In questo caso basta applicare il lemma del n. 22, facendovi $P' = Q_1$, $P'_1 = Q_2$ [e, se si vuole, $P'' = P$, $P''_1 = t(P)$].

Se $n = 2$ e $n = 3$, il teorema II) è quindi vero. In entrambi questi casi i punti fondamentali di λ, relativi a $\Sigma(\lambda)$, riempiono almeno un sottosegmento di λ.

Osservazioni: - Se $n = 3$, $\overline{PQ_1} = \overline{t(P)Q_2}$ e inoltre $Pt(P)$ è esso stesso un segmento di traslazione e soddisfa alla $(t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)) \cdot Pt(P) = P + t(P)$, tutti i punti fondamentali di λ relativi a $\Sigma(\lambda)$ cadono nel segmento $Q_1 Q_2$: questo è una conseguenza immediata del lemma VII). Nelle ipotesi attuali, $Pt(P)$ è un segmento quasi-fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$; i punti *interni* a PQ_1 e $Q_2 t(P)$ non sono mai quasi-fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

24. - Il teorema II) per $n = 4$. - *Sia* $n = 4$, $\lambda = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 Q_3 \dot{+} Q_3 t(P)$, *e* Q_1, Q_2, Q_3 *e* Q_4 *siano di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

di guisa che le coppie di segmenti PQ_1 e $Q_2 Q_3$, $Q_1 Q_2$ e $Q_3 t(P)$ sono, nell'ordine, rivolte dalla stessa banda rispetto alle rette $Q_1 Q_2$ e $Q_2 Q_3$.

Di qui e dall'essere λ una curva semplice e aperta, si conclude che è verificata una almeno delle due alternative:

$Q_3 t(P)$ è più corto di $Q_1 Q_2$;

$Q_1 P$ è più corto di $Q_2 Q_3$,

le quali alternative (non si escludono a vicenda e) si mutano una nell'altra, se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}.

Si può quindi esaminare soltanto il caso che sia $\overline{Q_3 t(P)} < \overline{Q_1 Q_2}$.

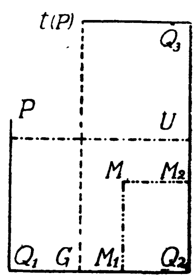
In queste ipotesi, sia G la proiezione ortogonale di $t(P)$ su $Q_1 Q_2$.

1). Allora il lemma del n. 22, applicato col farvi $P' = Q_1$, $P'_1 = G$, $P'' = P$, $P'_1 = t(P)$, conduce senz'altro allo scopo, *se il segmento* $G t(P)$ *non contiene punti di* $t^{-1}(\lambda)$.

Se il segmento $G t(P)$ contiene punti di $t^{-1}(\lambda)$, si presenta un'alternativa, che mi era sfuggita nel n. 4 di N. I).

2). Se $G t(P) \cdot t^{-1}(\lambda) \neq 0$, Γ denoti il rettangolo individuato dall'avere tre vertici nei punti Q_1, Q_2 e Q_3; e M sia uno dei punti di $\Gamma \cdot t^{-1}(\lambda)$ a distanza minima da $Q_1 Q_2$, anzi quello di questi per cui è minima anche la distanza da $Q_2 Q_3$.

Si indichino con M_1 e M_2 rispettivamente le proiezioni ortogonali di M su $Q_1 Q_2$ e $Q_2 Q_3$.



Poichè $t^{-1}(\lambda)$ e $G t(P)$ hanno punti comuni, diversi necessariamente da $t(P)$; poichè $\overline{Q_3 t(P)} < \overline{Q_1 Q_2}$ e poichè $Q_1 Q_2 \cdot t^{-1}(\lambda) = Q_2 Q_3 \cdot t^{-1}(\lambda) = 0$, $Q_3 t(P) \cdot t^{-1}(\lambda) = 0$, M_1 è interno a $Q_1 Q_2$ (se non è proprio $M = P$), M_2 è interno a $Q_2 Q_3$.

Mostriamo ora che una semiretta u, normale a $M_2 Q_3$, di origine in un punto $U \neq Q_3$ di $M_2 Q_3$, rivolta verso Γ, non può incontrare $Q_1 P$ senza incontrare prima $t^{-1}(\lambda)$, - beninteso, a meno che u non incontri, *simultaneamente*, $Q_1 P$ e $t^{-1}(\lambda)$ nel punto P -.

La cosa è evidente, se $U = M_2$, atteso che M appartiene a $t^{-1}(\lambda)$ e che è $\overline{M_1 Q_2} < \overline{Q_1 Q_2}$, se $M \neq P$.

La cosa è anche evidente, se $\overline{U Q_2} > \overline{P Q_1}$.

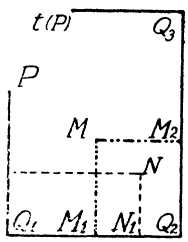
Quindi l'affermazione fatta è senz'altro vera, se $\overline{M_2 Q_2} \geq \overline{P Q_1}$.

Consideriamo perciò il caso che sia $\overline{M_2 Q_2} < \overline{P Q_1}$. E possiamo anche limitarci a supporre $\overline{Q_2 M_2} < \overline{U Q_2} < \overline{P Q_1}$.

Allora M è interno al rettangolo $\Gamma'(U)$ che ha tre vertici nei punti Q_1, Q_2 ed U, mentre P è esterno a $\Gamma'(U)$. Quindi $t^{-1}(\lambda)$, che unisce M con P, deve tagliare il contorno di $\Gamma'(U)$. Ma i lati di $\Gamma'(U)$ uscenti dai vertici Q_1 e Q_2 appartengono, e sono anzi interni a λ, inoltre $\sigma(\lambda)$ è semplice; quindi $t^{-1}(\lambda)$ deve incontrare il quarto lato di $\Gamma'(U)$ in un punto interno a quel lato. E la semiretta u incontra $t^{-1}(\lambda)$ prima di avere incontrato PQ_1; epperò anche prima di avere incontrato $\lambda - U$.

Quindi, *se* $t(\lambda)$ *non incontra il segmento* MM_2, si può applicare il lemma del n. 22, facendovi $P' = M_2$, $P'_1 = Q_3$, $P'' = M$, $P''_1 = t(P)$, per giungere al teorema II) anche in questo caso; anzi per ottenere che, anche in questo caso, i punti di λ fondamentali rispetto a $\Sigma(\lambda)$ riempiono almeno un sottosegmento di λ.

3). Se $t(\lambda) \cdot MM_2 \neq 0$, si consideri il rettangolo Γ'', che ha tre vertici nei punti Q_1, Q_2 ed M_2. E sia N uno dei punti di $\Gamma'' \cdot t(\lambda)$ a distanza minima da PQ_1, e precisamente quello di questi a distanza minima anche da $Q_1 Q_2$. Denoti N_1 la proiezione ortogonale di N su $Q_1 Q_2$. Il punto N è certo diverso da M, perchè $\sigma(\lambda)$ è semplice; il punto N_1 è interno a $Q_1 Q_2$.

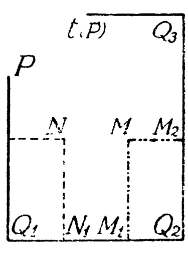


Ciò premesso, un ragionamento analogo a quello svolto nell'alternativa precedente, a proposito della semiretta u, prova che un raggio v, con l'origine $V \neq Q_1$ contenuta in $Q_1 M_1$, normale a $Q_1 Q_2$ e rivolto verso Γ, non può incontrare $Q_3 t(P)$, se prima non ha incontrato $t^{-1}(\lambda)$; che un raggio w, con l'origine $W \neq Q_1$ contenuta in $Q_1 N_1$, normale a $Q_1 Q_2$ e rivolto verso Γ, non può incontrare $Q_3 t(P)$, se non a patto di incontrare prima $t(\lambda)$, – beninteso, a meno che w non incontri simultaneamente λ e $t(\lambda)$ in $t(P)$ –.

Dopo di ciò:

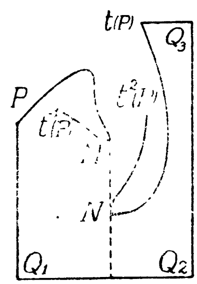
3_1). *Se* M_1 *è interno a* $Q_1 N_1$, $M_1 M$ non contiene punti di $t(\lambda)$ e $N_1 N$ non ne contiene di $t^{-1}(\lambda)$. E allora basta porre

$P' = M_1$, $P'_1 = N_1$, $P'' = M$ e $P''_1 = N$ nel lemma del n. 22, per concludere nel modo voluto;



3_2). *Se N_1 è interno a $Q_1 M_1$*, $N_1 N$ non contiene punti di $t^{-1}(\lambda)$ [anche se $\overline{NN_1} = \overline{MM_1}$, perchè N non appartiene certo a $t^{-1}(\lambda)$]. E in tal caso basta porre $P' = Q_1$, $P'_1 = N_1$, $P'' = P$, $P''_1 = N$ nel lemma del n. 22, per concludere nel modo voluto.

3_3). Infine *se M_1 ed N_1 coincidono*, ci si trova senz'altro in presenza di un punto quale il punto K' del n. 22 e si può ragionare in conformità. Precisamente, in questo caso, intanto, N è interno a MM_1, perchè N appartiene a Γ'' ed è diverso da M (e da N_1).



Pongasi $K' = M_1$ e si denoti con k' la semiretta v corrispondente a $V = K'$.

Il segmento MN taglia allora la propria immagine; e basta considerare i punti V interni a $Q_1 K'$ e abbastanza vicini a K', per riconoscere che essi sono tutti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

In definitiva, se $n = 4$, il teorema II) è valido. Anzi i punti di λ fondamentali rispetto a $\Sigma(\lambda)$ riempiono almeno un sottosegmento di λ.

Osservazioni. - Se $\overline{PQ_1} = \overline{Q_2 Q_3}$ e se $P \cdot t(P)$ è un segmento di traslazione il quale soddisfaccia alla $(t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)) \cdot Pt(P) = P + t(P)$, l'alternativa 2) non si presenta e tutti i punti di λ fondamentali rispetto a $\Sigma(\lambda)$ son contenuti nel segmento $Q_1 G$, considerato nella prima alternativa. Ciò segue dal fatto che allora il rettangolo Γ (di vertici P, Q_1, Q_2 e Q_3) non contiene nell'interno nessun punto di $\sigma(\lambda)$ e ha soltanto $t(P)$ comune con la propria immagine [lemma VII)]. Il segmento $Pt(P)$ è un segmento quasi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$. Se si scambiano gli uffici di t e t^{-1} l'osservazione precedente si muta in quella analoga e relativa al caso che sia $\overline{Q_1 Q_2} = \overline{Q_3 t(P)}$.

25. - IL TEOREMA II) PER $n \geq 5$. POSIZIONI PRELIMINARI. - *Sia* $n \geq 5$, $\lambda = PQ_1 \dotplus Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-2} Q_{n-1} \dotplus Q_{n-1} t(P)$; *i vertici* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}, Q_{n-1}$ *siano tutti di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

di guisa che ogni lato di λ, diverso dai due estremi, lascia il precedente e il successivo dalla stessa banda della propria retta sostegno.

Inoltre possiamo ammettere come vero il teorema II) per gli archi di traslazione con meno di n lati.

Sia R il punto corrente *interno* a $Q_2 Q_3$; r la semiretta di origine R, normale a λ e rivolta verso $\Sigma(\lambda)$ nel partire da R; S il primo eventuale punto di $t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)$, diverso da R, incontrato su r a partire da R; T il primo eventuale punto di λ, diverso da R, incontrato su r a partire da R, - e si noti che se l'insieme $(t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)) \cdot (r - R)$ non è vuoto, il punto S esiste di certo, cfr. nota ([23]); analogamente nei riguardi di T, se non è vuoto l'insieme $\lambda \cdot (r - R)$; sicchè l'*eventuale* si riferisce non alla possibile mancanza di un *primo punto*, ma alla possibile mancanza di punti delle intersezioni ora scritte -.

Sia K la più vicina a Q_2 delle proiezioni ortogonali sulla $Q_2 Q_3$, dei punti P e Q_5. Allora, attesa la struttura di λ, si verificano le seguenti circostanze:

a) la lunghezza $\overline{KQ_2}$ *di* KQ_2 *non supera quella* $\overline{PQ_1}$ *di* PQ_1;

b) se R *è interno a* KQ_2, T *esiste ed appartiene a* PQ_1;

c) se $R = K$, T *esiste (ed appartiene a* λ*); se* R *è interno a* KQ_3, T *o non esiste o non appartiene a* PQ_1.

Ciò premesso,

si indichi con H *il punto* T *corrispondente a* $R = K$; *con* A *il punto* S *(allora certo esistente) che corrisponde a* $R = K$; *si ponga* $s = KA$.

Dalle proprietà di struttura dell'arco λ, si deduce che:

d) se H *è diverso da* P, *circostanza che si verifica sempre se* $\overline{KQ_2} < \overline{PQ_1}$, *il punto* H *non può precedere il punto* Q_5 *su* λ *(rispetto al verso positivo di* λ*)*;

anzi, che:

e) se $H \neq P$ *e se* $n > 5$, *il punto* H *coincide con* Q_6; *mentre se* $n = 5$ (*e se* $H \neq P$), H *è uguale a* Q_5, *a norma dell'osservazione precedente;*

Pongasi che sia $n > 5$ e $H \neq P$. Allora, per dimostrare la *e*), – la *d*) è evidente! –, si osservi che, nelle ipotesi attuali circa la struttura di λ, i punti di λ successivi a Q_5 sono situati, rispetto alla retta sostegno di $Q_1 Q_2$, dalla stessa banda di (Q_3, Q_4 e) Q_5, a una distanza non minore di quella di Q_5 e, rispetto alla retta sostegno di $Q_2 Q_3$, dalla stessa banda di (Q_4 e) Q_5, a una distanza non minore di quella di Q_6.

Nelle quali osservazioni è implicito che:

f) se è $H \neq P$, *i punti di* λ *successivi a* Q_4 *non sono mai interni al rettangolo individuato dall'avere come vertici i tre punti* H, K *e* Q_3.

Se per un certo R (di KQ_3) S o T non esiste, si convenga di indicare con RS o RT la semiretta r stessa. Le lunghezze $\overline{RS}$ e $\overline{RT}$ sono funzioni inferiormente semicontinue di R nell'interno di $Q_2 Q_3$, anche se dotate ivi di punti di infinito. Inoltre è sempre $\overline{RS} \leq \overline{RT}$.

Premesso questo, vi è luogo a distinguere parecchi casi, a seconda che $s = KA$ e $t(s)$ hanno comuni punti interni sia ad s che a $t(s)$; hanno punti comuni, ma soltanto punti che siano di estremo o per s o per $t(s)$; non hanno punti comuni. Tratteremo queste diverse alternative nei numeri seguenti.

26. – Il primo sotto-caso: s e $t(s)$ hanno comuni punti interni a tutt'e due. – *Se* $s \cdot t(s)$ *è diversa da zero e contiene punti distinti da* A, K, $t(A)$, $t(K)$, il punto K stesso è un punto fondamentale di λ relativo a $\Sigma(\lambda)$, in virtù del lemma XIII).

A norma del teorema fondamentale di Brouwer (n. 9), *questo caso si presenta sempre, se*

A *appartiene a* $t^{-1}(\lambda)$ *e* $t(A)$ *è interno all'arco di* $\sigma(\lambda)$ *di estremi* A *e* K;

oppure, se

A appartiene a $t(\lambda)$ e $t^{-1}(A)$ è interno all'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi K ed A.

Anzi, se si presentano queste ultime circostanze, s taglia la propria immagine. Lo stesso quindi accade per RS, attesa la semicontinuità inferiore di $\overline{RS}$ in funzione di R, se R è abbastanza vicino a K [cfr. M. I), pag. 183]. Epperò esiste un sottosegmento di $Q_2 Q_3$ tutto costituito da punti di λ fondamentali per $\Sigma(\lambda)$.

27. - Il secondo sotto-caso: $s \cdot t(s) \subset K \dot{+} A \dot{+} \dot{+} t(K) \dot{+} t(A)$. - *Suppongasi che s e $t(s)$ abbiano punti comuni, ma soltanto punti che siano estremi o di s o di $t(s)$.*

In questo caso il segmento s istésso è un segmento quasi-fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma XVI); e K è un punto quasi-fondamentale (in senso stretto) per λ e $\Sigma(\lambda)$.

28. - Il terzo sotto-caso: $s \cdot t(s) = 0$. - Se s e $t(s)$ non hanno punti comuni, vi è luogo a distinguere tre alternative, a seconda che A appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, a $t(\lambda)$, oppure a λ. Quest'ultima è la più delicata a trattarsi.

1). *Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a $t^{-1}(\lambda)$*, $t(A)$ appartiene al sottoarco di λ di estremi K e $t(P)$, a norma del teorema fondamentale di Brouwer (ved. anche n. 26); anzi $t(A)$ è diverso da K attesa la $s \cdot t(s) = 0$. Inoltre [lemma VI)], s ha soltanto gli estremi su $\sigma(\lambda)$, quindi basta applicare il lemma X) ad s e all'arco di traslazione costituito dal sottoarco di $\sigma(\lambda)$ di estremi A e $t(A)$, per riconoscere che l'arco ν costituito dal segmento s e dal sottoarco di λ di estremi K e $t(A)$ è un arco di traslazione dello stesso tipo di λ, e con *almeno* due lati [attesa la $K \neq t(A)$] e con al più $n-1$ lati (il tratto $P Q_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 Q_3$ è sostituito da $s \dot{+} K Q_3$), con tutti i lati diversi da s contenuti in λ, con tutti i punti di s, ed interni ad s, interni a $\Sigma(\lambda)$ [ved. lemmi V) ed I)]. Inoltre si vede subito che, se $\Sigma(\nu)$ è il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ contenuto in $\Sigma(\lambda)$ [ved. lemma IX)], tutti i vertici di ν sono di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, appunto perchè s è rivolto verso $\Sigma(\lambda)$. Quindi il teorema II) è vero per ν e $\Sigma(\nu)$, a norma della ipotesi a base dell'induzione completa. Di qui, e dal lemma XXVI), si trae ch'esso vale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

2). *Il caso che sia* $s \cdot t(s) = 0$ *e che* A *appartenga a* $t(\lambda)$ si tratta in maniera perfettamente analoga, a prescindere dalla eventuale possibilità di ricondurlo al precedente con lo scambio di t e t^{-1}. In questo caso infatti $t^{-1}(A)$ appartiene a $PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K$ (ved. n. 26) ed è *diverso* da K, sempre attesa la $s \cdot t(s) = 0$. Inoltre [lemma VI)] s ha soltanto gli estremi su $\sigma(\lambda)$. Allora l'applicazione del lemma X) all'arco di traslazione fornito dal sottoarco di $\sigma(\lambda)$ di estremi $t^{-1}(A)$ ed A, porge che l'arco ν, costituito da s e dal sottoarco di λ di estremi $t^{-1}(A)$ e K, è un arco di traslazione, il quale è dello stesso tipo di λ, ha *almeno* due ed *al più* quattro lati. I lati di ν diversi da s sono contenuti in λ; i punti di s diversi dagli estremi sono interni a $\Sigma(\lambda)$. Inoltre è facile vedere che i vertici di ν sono tutti di prima categoria rispetto al campo, $\Sigma(\nu)$, adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$; e ciò perchè s è rivolto verso $\Sigma(\lambda)$. Quindi dai risultati dei nn. 23 e 24 e dal lemma XXVI), segue che il teorema II) è vero anche in questo caso.

3). *Suppongasi ora* $s \cdot t(s) = 0$ *e* A *contenuto in* λ. Quest'ultima condizione significa che A è uguale al punto H di cui nel n. 25. Di guisa che, per la e) di quel n. 25, o è $A = P$; oppure $A = Q_5$, se $n = 5$; $A = Q_6$, se $n > 5$.

L'arco ν, che si ottiene da λ sostituendo s al tratto di λ di estremi A e K, è ancora [ved. lemma X)] un arco di traslazione, dello stesso tipo di λ.

Dico che ν *ha meno lati di* λ.

Infatti, o è $A = P$, e in tal caso $\nu = PK \dot{+} KQ_3 \dot{+} Q_3 Q_4 \dot{+} \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-1}\, t(P)$ ha esattamente $n - 1$ lati; o è $A \neq P$, e in tal caso, se $n = 5$ riesce $\nu = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K \dot{+} KQ_5$, se $n = 6$ riesce $\nu = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K \dot{+} Kt(P)$, se $n > 6$ riesce $\nu = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K \dot{+} KQ_6 \dot{+} Q_6 Q_7 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-1}\, t(P)$ [ma riconosceremo subito che le $A \neq P$, $s \cdot t(s) = 0$ sono incompatibili con la $n > 6$], e ν ha rispettivamente o 4 o $n - 2$ lati.

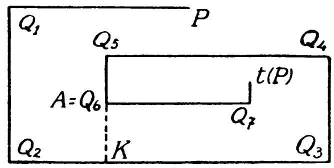
Sia [ved. lemma IX)] $\Sigma(\nu)$ il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$.

Dico che *tutti i vertici di* ν *sono di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\nu)$.

Infatti la cosa è evidente, se $A = P$, perchè allora Q_3, $Q_4, \ldots, Q_{n-1}$ lo sono, in quanto tali per λ e $\Sigma(\lambda)$, mentre K lo è perchè s è rivolto verso $\Sigma(\lambda)$. E la cosa è evidente anche se $A \neq P$ e se $n = 5$ oppure $n = 6$, perchè in questo caso i vertici di ν sono Q_1, Q_2 e K. Per esaurire la questione basta far vedere che:

Nelle ipotesi attuali le due condizioni $A \neq P$ *ed* $n > 6$ *sono incompatibili.*

Infatti, se è $A \neq P$ e $n > 6$, risulta $A = Q_6$ ed esiste il lato $Q_6 Q_7$ di λ, che è anzi normale ad $s = KA = KQ_6$, mentre Q_6 è interno al segmento KQ_5. Allora, se Q_6 non è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, in quanto vertice di ν, i segmenti $Q_2 K$ e $Q_6 Q_7$ sono rivolti da bande opposte rispetto alla retta KQ_6, dato che K è invece di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Vale a dire, la spezzata semplice e aperta $Q_2 K \dot{+} K Q_6 \dot{+} Q_6 Q_7$ taglia la spezzata semplice e chiusa $j = K\ Q_3 \dot{+} Q_3 Q_4 \dot{+} Q_4 Q_5 \dot{+} Q_5 K$ lungo il segmento KQ_6 ed ha comune con KQ_5 quel segmento soltanto, perchè gli altri suoi lati appartengono a λ (al pari di $j - s$) e perchè λ è una curva semplice e aperta. Quindi i punti Q_2 e Q_7 di $\sigma(\lambda)$ sono uno interno e l'altro esterno al rettangolo J di vertici K, Q_3, Q_4 e Q_5. E questo è impossibile, perchè, in virtù della $s \cdot t(s) = 0$ e della $(t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)) \cdot s = K + Q_6$ è lecito applicare i lemmi V) e II). Quindi Q_6 è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.



Tanto basterebbe a noi per il momento. Ma per il seguito è utile osservare che il fatto che $Q_2 K$ e $Q_6 Q_7$ siano rivolti da bande opposte della retta KQ_6 è anche conseguenza delle proprietà di struttura di λ e dell'ipotesi $n > 6$. Quindi se $s \cdot t(s) = 0$ e se $A \neq P$, n non può superare 6.

In conclusione: il teorema II) è vero per ν e $\Sigma(\nu)$. Inoltre in quanto si è detto è implicito che ν ha almeno quattro lati, che s è un lato estremo di ν [infatti: se $A = P$, è $\nu = PK \dot{+}$

$\dot{+} KQ_3 \dot{+} Q_3 Q_4 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-1} t(P)$; se è $A \neq P$, o è $n = 5$ e $\nu = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K \dot{+} KQ_5 = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K \dot{+} KA$, o è $n = 6$ e $\nu = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K \dot{+} KQ_6 = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} \dot{+} Q_2 K \dot{+} KA$], che i punti interni ad s sono interni a $\Sigma(\lambda)$, mentre i lati di ν diversi da s appartengono a λ. Indi il teorema II) è vero anche per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma dei lemmi XIX), XXI), XXII) e XXVI).

E con ciò la dimostrazione del teorema II) è completa.

§ 5.

Dimostrazione del teorema III).

29. - Preliminari. Casi in cui il teorema III) è stato già implicitamente dimostrato nel paragrafo precedente. - Se si riprende in esame la dimostrazione del teorema II) sviluppata nel § 4, si riconosce facilmente che nei casi contemplati nei nn. 21, 23, 24, 26 si è dimostrato vero non soltanto il teorema II), ma anche il teorema III).

Del pari, se nel n. 28 si assume come ipotesi base del procedimento induttivo quella che il teorema III) sia valido per gli archi quali λ e con meno di n lati, si riconosce che basta sostituire il lemma XXVI) col lemma XXIV), per poter concludere che anche nel caso contemplato nel n. 28 è valido non soltanto il teorema II), ma anche il teorema terzo.

Sicchè per completare la dimostrazione del teorema III), basta far vedere che esso è valido anche quando per λ si presenta il caso considerato nel n. 27. Nei nn. successivi verrà dato appunto questo complemento della dimostrazione.

È superfluo avvertire che *in questo paragrafo sono mantenute tutte le ipotesi e tutte le notazioni introdotte nel n.* 25.

30. - Il teorema III) nel caso che sia $s \cdot t(s) \subset K \dot{+} A \dot{+} \dot{+} t(K) \dot{+} t(A)$. - Si supponga dunque che $s \cdot t(s)$ *non sia vuota,* *ma non contenga nemmeno punti che siano simultaneamente e interni ad s e interni a $t(s)$.*

In questo caso, come si è già visto nel n. 27, s è un arco di traslazione di t: quindi o è $A = t^{-1}(K)$, o è $A = t(K)$; e, in conformità, o è $s \cdot t(s) = K$, o è $s \cdot t(s) = A$.

31. – Il primo sotto-caso: $s \cdot t(s) = K$. – Si supponga che $s \cdot t(s)$ *sia uguale a K e quindi che $A [= t^{-1}(K)]$ sia contenuto in $t^{-1}(\lambda)$.*

Nelle ipotesi attuali, dalle posizioni fatte nel n. 25 segue $\overline{KA} < \overline{KH} \leq \overline{Q_1 Q_2}$; sicchè la proiezione ortogonale di A sulla *retta* $Q_1 Q_2$ è un punto G *interno* al *segmento* $Q_1 Q_2$. Ebbene, denoti:

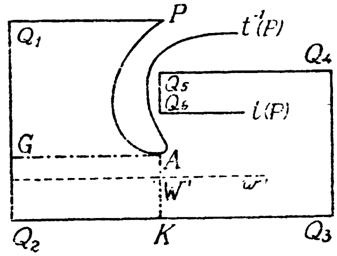
Γ il rettangolo di vertici G, Q_2, K, A;

α l'arco di $t^{-1}(\lambda)$ di estremi A e P, – e si osservi che è $A \neq P$, perchè $K = t(A)$ è interno a λ;

j_α la curva semplice e chiusa $\alpha \dotplus PQ_1 \dotplus Q_1 Q_2 \dotplus Q_2 K \dotplus s$;

J_α l'insieme, chiuso e limitato, delimitato da j_α.

Allora dai lemmi V), IV) e VII) si trae che $J_\alpha - \alpha$ appartiene a $\Sigma(\lambda)$, mentre $J \cdot t(J)$ è uguale a K. Inoltre Γ contiene i punti vicini a Q_2 ed appartenenti a $\Sigma(\lambda)$, perchè Q_2 è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$. Quindi Γ e J_α giacciono dalla stessa banda di KQ_2.



1). *Pongasi in primo luogo che Γ non contenga punti di $t^{-1}(\lambda)$, all'infuori di A naturalmente.*

Il segmento GA, partendo da G, si rivolge verso $\Sigma(\lambda)$; epperò penetra in J_α. D'altronde $GA \cdot j_\alpha = GA \cdot t^{-1}(\lambda) = A$; quindi, nelle ipotesi attuali, J_α contiene Γ. In particolare, è $\Gamma \cdot t(\Gamma) = K$.

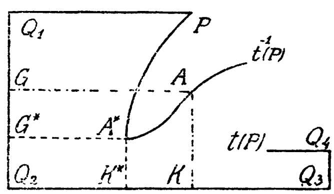
Inoltre s è un arco di traslazione, avente soltanto gli estremi su $\sigma(\lambda)$, a norma del lemma V). Quindi uno, $\Sigma(s)$, dei campi adiacenti a $\sigma(s)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma IX).

Indi l'applicazione dei lemmi X) e XI) ad s e all'arco di traslazione $\lambda^* = \alpha \dotplus PQ_1 \dotplus Q_1Q_2 \dotplus Q_2K$ di $\sigma(\lambda)$ ci porge subito che λ^* ha soltanto gli estremi su $\sigma(s)$ e quindi [lemmi VII) e IV)] che $J_\alpha - s$ appartiene ad uno stesso campo adiacente a $\sigma(s)$ e precisamente [cfr. lemma XIX)] a quello, $\Sigma'(s)$, diverso da $\Sigma(s)$, atteso che [lemma IX)] $\lambda^* - (A + K)$ appartiene appunto a $\Sigma'(s)$. Indi anche $\Gamma - s$ appartiene a $\Sigma'(s)$, in quanto $\Gamma - s$ è una porzione di $J_\alpha - s$.

Sia ora W' un punto di s interno ad s e fondamentale rispetto a $\Sigma(s)$ e sia w' il corrispondente segmento o raggio fondamentale relativo a s e $\Sigma(s)$ (l'esistenza di W' segue da quanto si è detto nel n. 21). Allora W' è interno ad s e la proiezione ortogonale W di W' su Q_1Q_2 è interna a Q_1Q_2, anzi a GQ_2. Il segmento WW' appartiene a Γ e quindi a J_α. E allora, con lo stesso ragionamento svolto nel n. 15 per dimostrare l'ultima parte del lemma XIX), si riconosce che $w = WW' \dotplus w'$ è un segmento o un raggio fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

E il teorema III) è vero anche in questo caso.

2). *Pongasi ora che* $\Gamma \cdot t^{-1}(\lambda)$ *non si riduca al punto* A. E sia A^* il più vicino a Q_2 dei punti $\Gamma \cdot t^{-1}(\lambda)$, o uno dei punti di $\Gamma \cdot t^{-1}(\lambda)$ a distanza minima da Q_2, se punti siffatti ve ne sono parecchi.



Il punto A^* è esterno ai lati GQ_2 e KQ_2 di Γ, in quanto questi sono interni a λ, mentre $\sigma(\lambda)$ è semplice; A^* è esterno ad $s = KA$, in quanto $A^* \neq A$ mentre è $s \cdot t^{-1}(\lambda) = A$, a norma delle posizioni del n. 25. Le proiezioni ortogonali G^* e K^* di A^* sui lati GQ_2 e KQ_2 di Γ esistono quindi, ed anzi K^* è un punto interno a KQ_2. Sia Γ^* il rettangolo di vertici G^*, Q_2, K^* ed A^*. Un ragionamento analogo a quello svolto nel caso precedente prova che adesso è Γ^* ad essere contenuto in J_α.

Indi riesce $\Gamma^* \cdot t(\Gamma^*) = 0$, perchè Γ^* non contiene K, mentre $J_\alpha \cdot t(J_\alpha) = K$. In particolare, se si pone $s^* = K^*A^*$, riesce $s^* \cdot t(s^*) = 0$.

Inoltre è $s^* \cdot \sigma(\lambda) \subset J_\alpha \cdot \sigma(\lambda) = j_\alpha - (s - K - A) =$

$= \alpha \dot{+} PQ_1 + Q_1Q_2 \dot{+} Q_2K$; da cui $s^* \cdot \sigma(\lambda) = K^* + A^*$, visto che K^* è interno a KQ_2 ed attesa la definizione di A^*.

Ne segue, a norma del teorema fondamentale di BROUWER, ricordato nel n. 9, che il punto $t(A^*)$ appartiene all'arco di λ di estremi K^* e $t(P)$ ed è diverso da K^*, in virtù della $s^* \cdot t(s^*) = 0$.

Ma allora l'arco ν^*, costituito dal segmento s^* e dall'arco di λ di estremi K^* e $t(A^*)$ è un arco di traslazione [come si riconosce in guisa analoga a quella tenuta per ν nella 1) del n. 28] dello stesso tipo di λ ma dotato di *almeno* 2 e *al più* $n - 1$ lati.

Sia $\Sigma(\nu^*)$ il campo adiacente a $\sigma(\nu^*)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$ [lemma IX)]. Allora è evidente che i vertici di ν^* son tutti di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu^*)$, perchè K^*A^* è rivolto verso $\Sigma(\lambda)$.

Ma allora il teorema III) è vero per ν^* e $\Sigma(\nu^*)$, in virtù dell'ipotesi base dell'induzione completa. Di qui e dal lemma XXIV), segue che il teorema III) è vero anche per λ e $\Sigma(\lambda)$, almeno nel caso attuale.

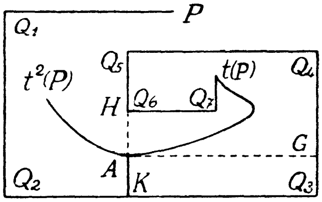
OSSERVAZIONE. – La spezzata λ' ottenuta aggiungendo il segmento A^*G^* alla sottospezzata di λ di estremi G^* e $t(A^*)$ è un arco di traslazione dello stesso tipo di λ, dotatò di *almeno* due e al più n lati (si badi bene: n lati). I vertici di λ' sono tutti di prima categoria rispetto al campo $\Sigma(\lambda')$, adiacente a $\sigma(\lambda')$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$. Inoltre è $s^* \cdot t(s^*) = 0$; quindi ci troviamo ricondotti a un caso *analogo* ad uno di quelli contemplati nel n. 28 e trattabile col ragionamento là svolto. Epperò (ved. n. 29) possiamo affermare che il teorema III) è vero per λ' e $\Sigma(\lambda')$, anche se λ' ha n lati: ecc. Abbiamo quindi un altro modo per riconoscere che il teorema III) è vero anche per λ e $\Sigma(\lambda)$, nelle ipotesi attuali almeno.

32. – IL SECONDO SOTTO-CASO: $s \cdot t(s) = A$. – *Si supponga ora* $s \cdot t(s) = A$ *e quindi* $A [= t(K)]$ *contenuto in* $t(\lambda)$, anzi interno a $t(\lambda)$ [epperò esterno a λ e, in particolare, diverso da $t(P)$], perchè K è interno a λ.

In queste ipotesi, dalle posizioni del n. 25 si trae intanto $\overline{KA} < \overline{KH} \leq \overline{Q_1Q_2}$.

Ed ora si presentano due casi: $H \neq P$, $H = P$.

1). Come si è già visto nella *e*) del n. 25, *se* $H \neq P$, H *coincide con uno dei due punti* Q_5 *e* Q_6 (a seconda che $n = 5$, o $n \geq 6$). In particolare è $\overline{KA} < \overline{KH} < \overline{Q_1 Q_2}$ e $\overline{KA} < \overline{KH} \leq \overline{Q_3 Q_4}$. Indi la proiezione ortogonale di A sulla retta $Q_3 Q_4$ appartiene al segmento $Q_3 Q_4$, anzi all'interno di quel segmento, perchè è anche $\overline{KA} > 0$. Questa proiezione è l'attuale punto G.



Denoti:

Γ il rettangolo di vertici A, K, Q_3 e G;

β l'arco di $t(\lambda)$ di estremi $t(P)$ ed A;

j_β la curva semplice e chiusa $\beta \dot{+} s \dot{+} KQ_3 \dot{+} Q_3 Q_4 \dot{+} \dots \dot{+} Q_{n-1} t(P)$;

J_β l'insieme chiuso e limitato, racchiuso da j_β.

In virtù del lemma VII) e del fatto che s ha soltanto gli estremi su $t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)$ e parte da K rivolgendosi verso $\Sigma(\lambda)$, i punti di s interni ad s e [quindi, lemmi V) e IV)] quelli di $J_\beta - j_\beta$ appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$. Di qui non è difficile dedurre che l'arco di traslazione $\lambda^* = KQ_3 \dot{+} Q_3 Q_4 \dot{+} \dots \dot{+} Q_{n-1} t(P) \dot{+} \beta$ ha soltanto gli estremi su $\sigma(s)$, mentre è $\sigma(\lambda^*) = \sigma(\lambda)$. Indi, se $\Sigma(s)$ è il campo adiacente a $\sigma(s)$ contenuto in $\Sigma(\lambda^*) = \Sigma(\lambda)$, e $\Sigma'(s)$ è l'altro campo adiacente a $\sigma(s)$, l'insieme $\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda) \cdot \sigma(s) = \sigma(\lambda^*) - \sigma(\lambda^*) \cdot \sigma(s)$ è contenuto per intero in $\Sigma'(s)$; e quindi $j_\beta - s$ appartiene a $\Sigma'(s)$, al pari di $J_\beta - s$ naturalmente [lemmi V) e IV)].

Inoltre, poichè Q_3 è di prima categoria, Γ contiene i punti di $\Sigma(\lambda)$ vicini a Q_3, quindi Γ e J_β giacciono dalla stessa banda di KQ_3.

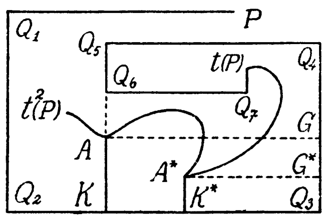
D'altra parte, in quanto si è detto nel n. 25 è implicito che attualmente i punti di λ, successivi a H, non sono mai interni a Γ; mentre gli sono senz'altro esterni quelli di $PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 K$, diversi da K. Epperò Γ non contiene nell'*interno* nessun punto di λ.

1_1). Allora, se Γ *non contiene nemmeno punti di* $t(\lambda)$, *all'infuori di* A, un ragionamento analogo ad uno già svolto nel n. 31, alternativa 1), prova che Γ appartiene a J_β.

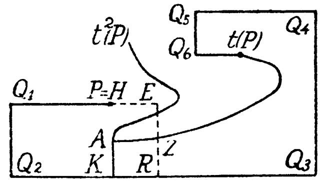
In particolare $\Gamma \cdot t(\Gamma) = A$.

Il segmento di traslazione s contiene (ved. n. 21) almeno un punto interno, W', fondamentale rispetto ad s e $\Sigma(s)$; e di qui è facile dedurre, con le stesse considerazioni ricordate nell'alternativa 1) del n. 31, che, nelle ipotesi attuali, la proiezione ortogonale W di W' sul segmento (Q_3G è interna a) Q_3Q_4 (ed) è un punto fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$. Nelle ipotesi attuali, volendo, si riconosce subito che W' è origine di un segmento, τ, e non di un raggio fondamentale, ρ, relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$: infatti ρ non dovrebbe tagliare Q_1Q_2, mentre, ecc.

1_2). *Se* Γ *contiene altri punti di* $t(\lambda)$, oltre A, ne sia A^* uno a distanza minima da Q_3. Denotiamo con G^* e K^* le proiezioni ortogonali di A rispettivamente su KQ_3 e GQ_3; di guisa che K^* è interno a KQ_3, atteso che $s \cdot t(\lambda) = A$. Pongasi $s^* = K^*A^*$, di guisa che $s^* \cdot t(s^*) \subset J_\beta \cdot t(J_\beta) = A$ e quindi $s^* \cdot t(s^*) = 0$. Il punto $t^{-1}(A^*)$ appartiene quindi al sottoarco di λ di estremi P e K^* ed è diverso da K^*. L'arco ν^*, costituito da s^* e dal sottoarco di λ di estremi $t^{-1}(A^*)$ e K^*, è un arco di traslazione di *almeno* 2 e *al più* 4 lati. I vertici di ν^* rispetto al campo $\Sigma(\nu^*)$, adiacente a $\sigma(\nu^*)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, son tutti di prima categoria. Quindi il teorema III) è verificato anche in questo caso, a norma dei risultati dei nn. 21. 23 e 24 e del lemma XXIV). Tutto il ragionamento è analogo a quello svolto nel n. 31, alternativa 2).



2). *Pongasi ora che sia* $H = P$. Allora si consideri di nuovo l'insieme J_β, definito nell'alternativa precedente. Anche adesso $J_\beta - j_\beta \cdot \sigma(\lambda) = J_\beta - \lambda^*$ appartiene a $\Sigma(\lambda)$, mentre $J_\beta \cdot t(J_\beta)$ si riduce ad A. E si indichi con $\Delta(R)$ il rettangolo con tre vertici in Q_1, Q_2 ed R, R essendo un punto di KQ_3 (diverso da Q_3) e con E il quarto vertice di $\Delta(R)$. Se R è abbastanza vicino a K, e interno a KQ_3, $\Delta(R)$ contiene A nell'interno, ma lascia $t(P)$ all'esterno, atteso che KH non contiene nell'interno punti di λ, di guisa che $t(P)$ non può appartenere al rettangolo $\Delta(K)$, nelle ipotesi attuali.



Quindi l'arco β incontra il contorno di $\Delta(R)$; ma β non incontra $PQ_1 \dot{+} Q_1Q_2 \dot{+} Q_2R$, perchè $\sigma(\lambda)$ è semplice; eppérò β incontra $RE \dot{+} EP$. Ma β non passa per P; quindi, se R è abbastanza vicino a K, β non incontra nemmeno PE. In definitiva: se R è abbastanza vicino a K, il segmento RE incontra β in un punto almeno; e sia Z il punto di $\beta \cdot RE$ a distanza minima da R.

Il segmento RZ appartiene allora a J_β e non passa per A; quindi il segmento RZ appartiene a $\Sigma(\lambda)$, a meno degli estremi, e non incontra la propria immagine.

Il punto $t^{-1}(Z)$ appartiene allora all'arco $PQ_1 \dot{+} Q_1Q_2 \dot{+} Q_2R$ di λ, perchè Z appartiene all'arco β di $t(\lambda)$ di estremi $A = t(K)$ e $t(P)$. Inoltre, se $R \neq K$, $t^{-1}(Z)$ risulta diverso da R e contenuto in $PQ_1 \dot{+} Q_1Q_2 \dot{+} Q_2R$ (al quale risultato si sarebbe potuti pervenire anche applicando il teorema fondamentale di Brouwer ricordato nel n. 9). Ma allora l'arco ν costituito dal segmento ZR e dal sottoarco di λ di estremi R e $t^{-1}(Z)$ è un arco di traslazione dello stesso tipo di λ, ma con *almeno* 2 e *al più* 4 lati. Detto, al solito, $\Sigma(\nu)$ il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, si riconosce subito che tutti i vertici di ν sono di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. E l'applicazione del lemma XXIV) conduce di nuovo alla conclusione voluta, attesi i risultati dei nn. 21, 23 e 24.

Il teorema III) è quindi dimostrato in ogni caso.

33. – Osservazioni. – Nell'alternativa 1_2) del n. 32 l'arco λ' costituito dal segmento A^*G^* e dalla porzione di λ di estremi $t^{-1}(A^*)$ e G^* è un arco di *almeno* 2 e *al più* 5 lati. Si potrà ragionare in maniera analoga a quella accennata nell'osservazione al n. 31 ?

Ci si potrebbe anche domandare se i punti fondamentali di λ, relativi a $\Sigma(\lambda)$, considerati nel teorema III), riempiono sempre almeno un sottosegmento di λ. La cosa è stata riconosciuta esplicitamente vera nei casi $n=1, 2, 3, 4$. Ed anzi basterebbe dimostrarla vera anche nel caso contemplato nel n. 26, per poterla ritenere acquisita in generale, perchè in tutti gli altri casi essa è stata già stabilita, più o meno esplicitamente. Ma una proposizione del genere non avrebbe alcun interesse, almeno per il momento, pur essendo probabilmente esatta.

§ 6.

Dimostrazione del teorema IV).

34. – Preliminari. Il primo caso. – Il teorema II) assicura che il teorema IV) è vero, se λ è sprovvisto di vertici di seconda categoria rispetto $\Sigma(\lambda)$. Sicchè per dimostrare il teorema IV) si può procedere per induzione: ammettere cioè il teorema IV) per quegli archi λ per i quali il numero m dei vertici di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ si mantiene minore di m' ($m'=1, 2,\ldots$), e far vedere che allora il teorema IV) è vero anche se m è uguale ad m'.

Nel seguito si mantengono naturalmente le convenzioni già introdotte nel § 1. E se ne rispettano anche altre due; precisamente, *ammesso adunque che sia* $m>0$ (*e quindi* $n>1$):

Q_i sarà il vertice di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ e d'indice minimo ($i>0$ e $<n$); cioè sarà il primo vertice, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, incontrato da chi percorra λ nel senso positivo;

q_i sarà la semiretta di origine Q_i, contenuta in quella di origine Q_{i-1} e passante per Q_i; di guisa che i punti di $q_i - Q_i$, sufficientemente prossimi a Q_i, saranno interni a $\Sigma(\lambda)$, atteso che Q_i è di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, cioè:

a) q_i *parte da* Q_i *rivolgendosi verso* $\Sigma(\lambda)$.

Ciò premesso:

1) *Se* $q_i - Q_i$ *non incontra* $t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)$, Q_i è un punto fondamentale di λ relativo a $\Sigma(\lambda)$, in virtù del lemma XIV). Epperò il teorema IV) è valido e l'alternativa che si presenta certamente è la γ), se $n = 2$, è la δ_1), se $n > 2$.

35. – Il secondo ed il terzo caso. – Se $q_i - Q_i$ incontra $t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)$, sia A il *primo* punto (certo esistente) di $(t^{-1}(\lambda) \dot{+} \lambda \dot{+} t(\lambda)) \cdot (q_i - Q_i)$, incontrantesi su q_i a partire da Q_i.

Si ponga $s = Q_i A$.

1). *Se l'intersezione* $s \cdot t(s)$ *non è vuota e contiene punti diversi dagli estremi di* s *e* $t(s)$, Q_i è un punto fondamentale di λ relativo a $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma XIII). Epperò, se $n = 2$, si realizza l'alternativa γ) del teorema IV); se $n > 2$, si realizza la δ_1), di quel teorema.

2). *Se* $s \cdot t(s)$ *non è vuota ma è contenuta nell'insieme costituito dagli estremi di* s *e* $t(s)$, il punto Q_i e il segmento s son quasi-fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma XVI). Epperò, se $n = 2$, vale la γ); se $n > 2$, vale la δ_2), - sempre del teorema IV).

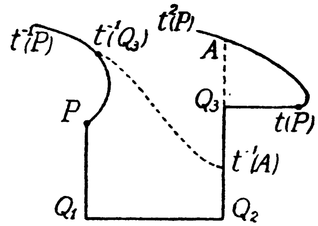
36. – Il quarto caso. – Ormai non ci resta che supporre $s \cdot t(s) = 0$ e distinguere i tre casi: A è contenuto in $t(\lambda)$; A è contenuto in $t^{-1}(\lambda)$; A appartiene [a λ e non a $t^{-1}(\lambda) + t(\lambda)$, cioè appartiene] a $\lambda - (Q_0 + Q_n)$.

Se $s \cdot t(s) = 0$ *e se* A *appartiene a* $t(\lambda)$, $t^{-1}(A)$ è un punto del sottoarco di λ di estremi $P = Q_0$ e Q_i, a norma del teorema fondamentale di Brouwer (ved. n. 9), ed è diverso da Q_i, attesa la $s \cdot t(s) = 0$.

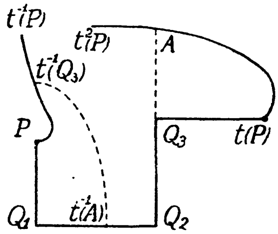
L'arco ν, somma di s e della spezzata di λ di estremi $t^{-1}(A)$ e Q_i (in figura si è supposto $n = 4$, $m = 1$, $i = 3$), è un arco di traslazione contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ e dotato di punti interni a $\Sigma(\lambda)$, come si riconosce con ragionamenti già sfruttati più volte. Indi uno, $\Sigma(\nu)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\nu)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$. L'interno di s è contenuto in $\Sigma(\lambda)$; tutti i punti di $\nu - (s - Q_i)$ appartengono a λ e gli eventuali lati non estremi di ν sono contenuti in lati non estremi di λ.

E qui vi è luogo a distinguere tre sotto-alternative.

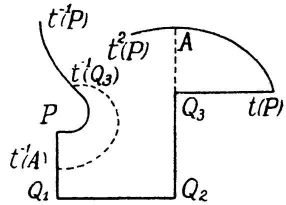
1). La prima sotto-alternativa *si ha quando* $t^{-1}(A)$ *appartiene a* $Q_{i-1}Q_i$ (essa si presenta di certo se è $i=1$, ma non implica affatto che sia $i=1$). Se questo accade e se $n=2$, si presenta la γ) del teorema IV); se questo accade e se $n>2$, si presenta la δ_2) del teorema IV): Q_i è un vertice di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ ed è un punto quasi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; l'arco ν si riduce ad un segmento ed è un segmento quasi-fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.



2). Seconda sotto-alternativa: *i è maggiore di 1 (e quindi n di 2) e* $t^{-1}(A)$ *appartiene a* $Q_{i-2}Q_{i-1}$ *ed è diverso da* Q_{i-1} (questo accade sempre, se risulta $i=2$ e se non si presenta la prima sotto-alternativa). In questo caso l'arco di trastazione ν ha due lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi. Inoltre Q_{i-1} è un vertice per ν, al pari di λ; ma per λ esso è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, mentre $\Sigma(\lambda)$ contiene $\Sigma(\nu)$; quindi esso è di prima categoria anche rispetto a $\Sigma(\nu)$, in quanto vertice di ν. Inoltre ν non contiene nell'interno nessun punto delle due semilinee $\sigma'(\lambda)=t^{-1}(\lambda)\dot{+}t^{-2}(\lambda)\dot{+}\ldots$ e $\sigma''(\lambda)=t(\lambda)\dot{+}t^2(\lambda)\dot{+}\ldots$; il vertice di ν è interno a λ e λ ha più di due lati. In definitiva: ν è una spezzata semi-fondamentale in senso stretto relativa a λ e $\Sigma(\lambda)$ e Q_i è un punto di λ semi-fondamentale in senso stretto rispetto a $\Sigma(\lambda)$. Ma Q_i è anche un vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$. Quindi stavolta si realizza la δ_3) del teorema IV).



3). Terza sotto-alternativa: *i è maggiore di 2 (e quindi n di 3) e* $t^{-1}(A)$ *appartiene a* $Q_0Q_1\dot{+}\ldots\dot{+}Q_{i-3}Q_{i-2}$ *ed è diverso da* Q_{i-2}. Nelle ipotesi attuali, l'arco ν ha *almeno tre* lati. Inoltre l'interno di s è interno a $\Sigma(\lambda)$; s fa parte di un lato estremo di ν e tutti gli altri lati di ν appartengono a λ, anzi quelli non estremi sono contenuti in lati non estremi di λ. E ancora: ciascun vertice di ν cade o in $Q_1, \ldots,$ o in Q_{i-1}, mentre Q_i non è un vertice per ν; di qui segue, con un ragionamento analogo a quello usato in 2), che tutti i vertici di ν sono di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Indi per ν vale il teorema III) Epperò esistono punti fondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$ contenuti in lati non estremi di ν e, perciò, di λ. Ed allora basta applicare il lemma XVII) per concludere che, in questo caso, si realizza la δ_1) del teorema IV), [se si ricorre al teorema II), si può affermare che almeno un lato non estremo di λ contiene un punto fondamentale o quasi-fondamentale in senso stretto rispetto a $\Sigma(\lambda)$; e in sostanza non si fà che indicare una estensione facile del lemma XXVI) al caso che sia $m > 0$].



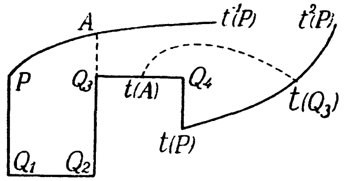
37. – Il quinto caso. – Proseguiamo nella dimostrazione del teorema IV).

Se $s \cdot t(s) = 0$ *e se* A *appartiene a* $t^{-1}(\lambda)$, $t(A)$ appartiene all'arco di λ di estremi Q_i e $t(P) = Q_n$, a norma del teorema fondamentale di Brouwer (ved. n. 9), ed è diverso da Q_i, attesa la $s \cdot t(s) = 0$. E l'arco ν somma di s e della sottospezzata di λ di estremi Q_i e $t(A)$ è ancora un arco di traslazione, dello stesso tipo di λ, contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$. Inoltre un lato estremo di ν (il lato s) ha l'interno contenuto in $\Sigma(\lambda)$, mentre tutti gli altri lati di ν sono contenuti in λ, quelli non estremi in lati non estremi di λ. Sia $\Sigma(\nu)$ il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma IX).

Ed ora vi è luogo a distinguere due alternative anche stavolta.

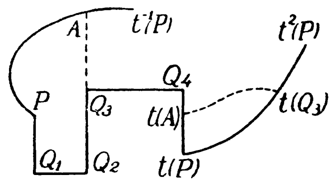
1). *Se* $t(A)$ *appartiene a* $Q_i Q_{i+1}$, il che accade di certo, se $i = n - 1$, l'arco ν è costituito da una spezzata di due lati, ciascuno diretto come uno degli assi coordinati. Inoltre ν presenta in Q_i un vertice di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, e ciò perchè l'intorno di Q_i preso rispetto a $\Sigma(\nu)$ è contenuto in quello preso rispetto a $\Sigma(\lambda)$ e non può esaurirlo, atteso che q_i si rivolge verso

$\Sigma(\lambda)$ nel partire da Q_i [ved. n. 34, *a*)]. E ancora: ν non contiene nell' interno punti di $\sigma(\lambda)$ che non siano interni a λ; mentre il vertice di ν è vertice anche per λ [ed è vertice di seconda categoria per λ e $\Sigma(\lambda)$]. In definitiva: ν è una spezzata semi-fondamentale in senso stretto relativa a λ e $\Sigma(\lambda)$ e Q_i è un punto semi-fondamentale in senso stretto di λ relativo a $\Sigma(\lambda)$. Cioè: se $n = 2$, si realizza la γ) del teorema IV); se $n > 2$, si realizza la δ_3) dello stesso teorema.



2). *Se $t(A)$ segue Q_{i+1} su λ* (nel verso positivo), esso non appartiene a $Q_i Q_{i+1}$.

In questo caso ν ha *almeno* tre lati (al pari di λ). Inoltre esso presenta in Q_i un vertice di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, mentre tutti gli altri vertici di ν sono, rispetto a $\Sigma(\nu)$, della stessa categoria che rispetto a $\Sigma(\lambda)$, in quanto vertici di λ. Ma allora ν ha al più $m - 1$ vertici di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. E quindi è lecito ammettere che per ν valga il teorema IV); anzi che per ν si presenti una delle alternative δ_1), δ_2) e δ_3), atteso che ν ha almeno tre lati.



Se per ν e $\Sigma(\nu)$ si presenta la δ_1), questa si presenta anche per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma XVII). Allora infatti ν ammette un punto fondamentale rispetto a $\Sigma(\nu)$ e contenuto in un suo lato non estremo e quindi contenuto anche in un lato non estremo di λ; ecc.

Se per ν si presenta la δ_2), ν ammette vertici di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$ che sono anche punti quasi-fondamentali rispetto a $\Sigma(\nu)$ e risultano essere anche vertici di seconda categoria per λ e $\Sigma(\lambda)$. A norma del lemma XVIII), questi punti sono quasi-fondamentali rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$. E quindi la δ_2) sussiste anche per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se per ν e $\Sigma(\nu)$ si presenta la δ_3), ν ammette vertici di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$ ed esiste una spezzata w, semi-fondamentale in senso stretto rispetto a ν e $\Sigma(\nu)$ e contenente uno dei vertici di ν di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. In questo caso, sono soddisfatte tutte le condizioni del n. 19, epperò w è semi-fondamentale in senso stretto anche per λ e $\Sigma(\lambda)$ e contiene uno dei vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$. Cioè la δ_3) non si perde nel passare da ν a λ.

38. - Osservazione: Il teorema IV) per $n = 2$. - Il teorema IV) rientra nei teoremi II) e III), se $n = 1$ (ed $m = 0$), oppure se $n = 2$ ed $m = 0$. Sicchè in questi casi il teorema IV) è già noto da tempo.

Ma ormai siamo in grado di dire che *il teorema* IV) *è verificato anche se $n = 2$ e $m = 1$.*

Infatti una dimostrazione del teorema IV) in questo caso è implicita nella 1) del n. 34; nelle 1) e 2) del n. 35; nella 1) del n. 36 e finalmente nella 1) del n. 37.

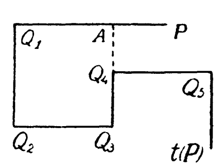
Nel seguito possiamo quindi supporre $n \geq 3$.

39. - Il sesto caso. - Ci rimane da esaminare l'ultimo caso, *che si presenta se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene, anzi è interno a λ.*

In questo caso l'arco ν, ottenuto da λ con la sostituzione di s al tratto di λ compreso fra Q_i ed A, è ancora un arco di traslazione (lemma XIX) dello stesso tipo di λ, ha meno lati di λ, appartiene a $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ ed è provvisto di punti interni a λ, mentre i punti di ν esterni ad s (o almeno non interni ad s) appartengono a λ (quelli diversi eventualmente da A e contenuti in lati non estremi di ν essendo perciò contenuti in lati non estremi di λ).

Diciamo $\Sigma(\nu)$ il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, e $\Sigma'(\nu)$ l'altro, quello cioè [lemma XIX)] contenente i punti di $\sigma(\lambda) - \sigma(\lambda) \cdot \sigma(\nu)$.

Se A segue Q_i su λ (nel verso positivo), Q_i non è più un un vertice per ν; mentre è ancora tale, se A precede Q_i su λ.



Ma in questo secondo caso ν presenta in Q_i un vertice di prima categoria, come segue dalla a) del n. 34 e dalla $\Sigma(\nu) \subset \Sigma(\lambda)$ (ved. anche n. 37, alternativa 1)).

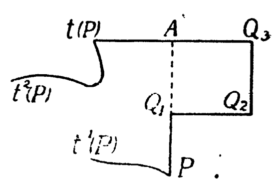
Ma v'è di più: anche

il punto A o non è un vertice per ν; *oppure, se lo è, lo è di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\nu)$.

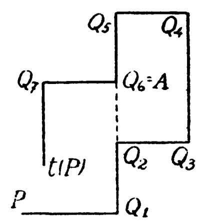
Infatti si consideri la spezzata semplice e chiusa j, costituita da s e dall'arco α di λ, avente come estremi Q_i ed A; e sia J l'insieme chiuso e limitato racchiuso da j. Allora [lemmi V) e VI)], l'insieme J non incontra la propria immagine; $J - \alpha$ è contenuto per intero in $\Sigma(\lambda)$ e $J - s$ in $\Sigma'(\nu)$ [lemma XIX)]; di guisa che j non separa punti di $\sigma(\lambda) + \sigma(\nu)$ dall'infinito.

Ciò premesso, se A non è un vertice per ν, non vi è nulla da dimostrare.

Se A è un vertice per ν ed è interno a un lato di λ, esso, in quanto vertice per ν, è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, perchè $\Sigma(\nu)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e perchè s giunge in A dall'interno di $\Sigma(\lambda)$.

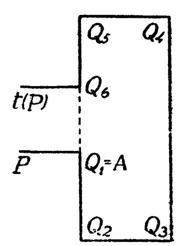


Si supponga ora che A sia un vertice e per λ e per ν. Posto che sia $A = Q_p$ $(0 < p < n)$, uno dei due punti Q_{p-1} o Q_{p+1} appartiene a q_i: e la cosa è evidente. Ed è pure evidente che risulta $|p - i| \geq 2$.



Nel primo caso A segue Q_i su λ nel senso positivo. Vale a dire è $p > i + 1$. Infatti, poichè A è un vertice per ν, ν non può contenere $Q_{p-1}Q_p$; cioè Q_{p-1} deve appartenere al tratto di λ compreso fra Q_i ed A; donde la conclusione.

Nel secondo caso, un ragionamento analogo mostra che A precede Q_i, vale a dire che è $p < i - 1$ (vedremo fra breve che questo secondo caso non si può presentare).



Nel primo caso j contiene il tratto rettilineo $Q_iQ_p \dotplus Q_pQ_{p-1} = Q_iQ_{p-1}$; mentre Q_pQ_{p+1} è normale a Q_iQ_{p-1}, ha un estremo in Q_p, ha l'interno fuori di J. Quindi $\Sigma(\lambda)$ contiene punti arbitrariamente prossimi a Q_p, distinti da Q_p e interni all'angolo uguale a tre retti, individuato da Q_{p-1}, Q_p e Q_{p+1}; vale a dire Q_p è di seconda categoria per λ e $\Sigma(\lambda)$. Ora, se $A = Q_p$ fosse di seconda categoria anche per ν e $\Sigma(\nu)$, $\Sigma(\nu)$ dovrebbe contenere i punti interni all'angolo uguale a tre retti ed individuato dai punti Q_i, Q_p e Q_{p+1}. Di qui e dall'essere Q_p interno a $Q_i Q_{p-1}$ e dall'essere $Q_p Q_{p+1}$ normale a $Q_i Q_{p-1}$, sarebbe facile dedurre che $\Sigma(\lambda) + \Sigma(\nu)$ esaurirebbe tutto l'intorno di Q_p, privato dei punti di $Q_p Q_{p+1}$. Ma $\Sigma(\nu)$ appartiene a $\Sigma(\lambda)$; quindi $\Sigma(\lambda)$ conterebbe tutti i punti dell'intorno di Q_p, a meno di quelli di $Q_p Q_{p+1}$. Ora ciò non può accadere, perchè $\Sigma(\lambda)$ non può avere punti da tutt'e due le bande di λ. Quindi A è di prima categoria, in quanto vertice di ν e nei riguardi di $\Sigma(\nu)$.

Nel secondo caso j contiene il tratto rettilineo $Q_i Q_p + Q_p Q_{p+1}$; mentre $Q_p Q_{p-1}$ è normale a $Q_i Q_{p+1}$. Ragionando come nel caso precedente, si riconosce che allora Q_p è un vertice di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ e (di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, in quanto vertice di ν. Ora tutto) questo è assurdo, attesa la definizione del numero i (ved. n. 34) e la $p < i$.

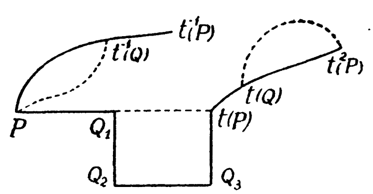
Le alternative considerate esauriscono tutti i casi possibili, perchè A è interno a λ, e quindi o è interno ad uno dei lati di λ o è un vertice di λ.

In definitiva l'arco ν ha al più $m - 1$ vertici di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$; ed ogni eventuale vertice siffatto è anche un vertice di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

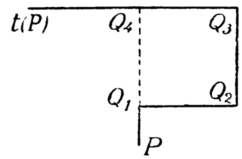
In particolare, è lecito ammettere che il teorema IV) sia vero per ν e $\Sigma(\nu)$.

E ora è venuto il momento di distinguere alcune sottoalternative.

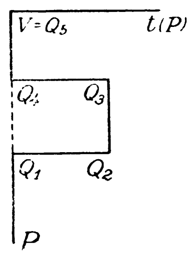
1). *Se* ν *ha un lato soltanto,* ν stesso è un segmento quasifondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$; e Q_i è un punto quasifondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$. Ma Q_i è anche un vertice di seconda categoria di λ rispetto a $\Sigma(\lambda)$; quindi per λ e $\Sigma(\lambda)$ è verificata la δ_2) del teorema IV).



2). *Se* ν *ha due lati soltanto e se il vertice di* ν *è di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\nu)$, il vertice di ν o è un vertice anche per λ o è interno a un lato di λ; in ogni caso il vertice di ν è interno a λ. E di qui, dalle proprietà di ν e (ved. n. 38) dalla $n \geq 3$ è facile dedurre che ν stesso fornisce una spezzata semi-fondamentale in senso stretto rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$; cioè, stavolta per λ e $\Sigma(\lambda)$ si realizza certamente l'alternativa δ_3) del teorema IV), atteso che Q_i risulta semi-fondamentale in senso stretto per λ e $\Sigma(\lambda)$ e di seconda categoria per λ rispetto a $\Sigma(\lambda)$.



3). *Se* ν *ha due lati e se il vertice* V *di* ν *è di seconda categoria per* ν *e* $\Sigma(\nu)$, V è un vertice di seconda categoria per λ e $\Sigma(\lambda)$.



Inoltre, cfr. n. 38, V è o fondamentale, o quasi-fondamentale o semi-fondamentale in senso stretto per ν e $\Sigma(\nu)$.

Nei primi due casi basta tenere conto dei lemmi XVII) e XVIII), per concludere che V è rispettivamente fondamentale o quasi-fondamentale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Nel terzo caso sia w una spezzata semi-fondamentale in senso stretto rispetto a ν e $\Sigma(\nu)$. Poichè ν ha due lati, w ha come vertice V. Inoltre dal lemma XII) è facile dedurre che allora i punti di $w \cdot \sigma(\lambda)$ interni a w sono interni a λ, perchè quelli di $w \cdot \sigma(\nu)$ interni a w sono interni a ν. Indi w è una spezzata semi-fondamentale in senso stretto anche per λ e $\Sigma(\lambda)$.

E in conclusione, nelle ipotesi attuali, si presenta una almeno delle tre alternative δ_1), δ_2) e δ_3) del teorema IV).

4). *Se* ν *ha tre lati almeno e soddisfa alla* δ_1) *del teorema* IV), esiste almeno un punto W' di ν, fondamentale rispetto a ν e $\Sigma(\nu)$, contenuto in uno dei lati non estremi di ν e diverso da A, se A è interno a un lato non estremo di λ, e ciò per la D) del n. 6 e perchè in questo caso A è un vertice di ν di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Se W' è interno ad s, dal lemma XIX) segue subito che $j - s = \alpha - \alpha \cdot s$ contiene un punto fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$ (ed appartenente a un lato non estremo di λ). Se W' non è interno ad s, W' appartiene (a λ, epperò) a un lato non estremo di λ ed è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma sempre del lemma XIX). E la δ_1) del teorema IV) si mantiene nel passare da ν a λ.

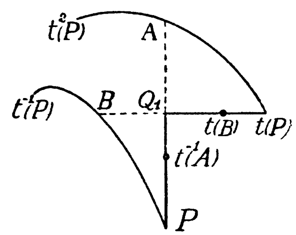
5). *Se ν ha almeno tre lati e se per ν è soddisfatta la δ_2) del teorema* IV), Q^* sia un vertice di ν di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$ e quasi-fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$. Allora Q^* è anche un vertice di seconda categoria per λ e $\Sigma(\lambda)$ e [lemma XVIII)] è quasi-fondamentale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$. E la δ_2 non si perde nel passare da ν a λ.

6). *Se ν ha almeno tre lati e se per ν è soddisfatta la* δ_3) del teorema IV), sia w una spezzata, di vertice W, semi-fondamentale in senso stretto per ν e $\Sigma(\nu)$ e contenente il vertice Q^* di ν, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Allora, se A segue Q_i su λ, Q_i è interno al lato $Q_{i-1}A$ di ν, come si è detto all'inizio di questo numero, e sono soddisfatte tutte le condizioni del n. 20, con Q_i ed A rispettivamente al posto di Q' e Q''. E a norma del lemma XXX) il punto Q^*, che è anche un vertice di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, è un punto semi-fondamentale in senso stretto anche rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$. Cioè, nelle ipotesi attuali, nel passare da ν a λ, non si perde nemmeno la δ_3) del teorema IV). Se A precede Q_i su λ, Q_i è per ν un vertice di prima categoria (al pari di A); ed allora si potrebbe vedere se anche nelle ipotesi attuali sussiste un lemma analogo al XXX), il che peraltro è presumibile. Ma è molto più semplice ricondursi al lemma XXX) stesso nel modo che segue. Sia A^* quel punto, interno ad α, tale che $s^* = Q_i A^*$ abbia i suoi punti interni nell'interno di J e sia normale ad s nel punto Q_i. Allora s^* non incontra la propria immagine ed ha soltanto gli estremi su λ; inoltre A^* è interno a un lato di λ, perchè α non contiene vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$. Epperò l'arco ν^*, ottenuto da λ sostituendo s^* al posto del sottoarco α^* di λ di estremi A^* e Q_i, è un arco di traslazione con almeno tre lati; e Q_i è interno al lato $A^* Q_{i+1}$ di ν^*. Ed ora basta ripetere le considerazioni svolte in 4) 5) e 6), applicandole a ν^* ed al campo $\Sigma(\nu^*)$, adiacente a $\sigma(\nu^*)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, per riconoscere di nuovo la validità del teorema IV).

Il quale teorema è così completamente dimostrato.

40. - OSSERVAZIONI. - 1). Supponiamo che $\lambda = PQ_1 \dot{+} Q_1 t(P)$ abbia un solo vertice Q_1 e che questo sia di seconda categorìa rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$, cioè che λ corrisponda al caso $n = 2$, $m = 1$.

Siano p e q le semirette di origini rispettive P e $t(P)$ e passanti per Q_1. Se p incontra $t(\lambda)$ e q incontra $t^{-1}(\lambda)$, si dicano rispettivamente A e B i punti di $p \cdot t(\lambda)$ e $q \cdot t^{-1}(\lambda)$ a distanza minima da Q_1. Si supponga, come è lecito, che sia $Q_1 A \cdot t^{-1}(\lambda) = 0$, $Q_1 A \cdot t(Q_1 A) = 0$; $Q_1 B \cdot t(\lambda) = 0$, $Q_1 B \cdot t(Q_1 B) = 0$. In queste ipotesi $t^{-1}(A)$ appartiene a PQ_1, $t(B)$ appartiene a $Q_1 t(P)$. Tutti i punti di $t^{-1}(A) Q_1 \dot{+} Q_1 t(B)$ sono quasi-fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$; i segmenti $A t^{-1}(A)$ e $\dot{B} t(B)$ sono quasi-fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$. Invece dal lemma VI) si deduce facilmente che λ non ammette punti fondamentali rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

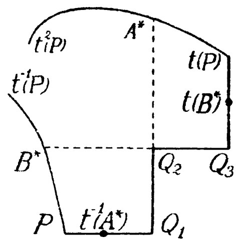


Se si vuole si può osservare che nelle ipotesi precedenti esistono punti, diciamo, *fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$ *rispetto a una qualunque direzione* (24) pensabile come direzione di una semiretta di origine Q_1 contenuta nell'angolo retto $P Q_1 t(P)$, anzi interna a quest'angolo, se privata dell'origine.

2). Sia $\lambda = PQ_1 \dot{+} Q_1 Q_2 \dot{+} Q_2 Q_3 \dot{+} Q_3 t(P)$, Q_1 e Q_2 siano di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ e Q_2 lo sia di seconda.

Denotino ora p^* e q^* le semirette di origini rispettive Q_1 e Q_3, passanti per Q_2; p^* incontri $t(\lambda)$ e q^* incontri $t^{-1}(\lambda)$ e siano A^* e B^* i punti di $p^* \cdot t(\lambda)$ e $q^* \cdot t^{-1}(\lambda)$ a distanza

(24) Il significato dell'espressione è palese. Per maggiore chiarezza osserviamo che i punti fondamentali finora considerati, lo sarebbero rispetto alle direzioni degli assi. La nozione introdotta può essere applicata per estendere in maniera notevole il lemma del n. 22 e forse tutti i teoremi di questa Memoria. Ma non credo che si possa pervenire a risultati di interesse preminente per gli eventuali sviluppi ulteriori della teoria.



minima da Q_2. Si supponga che sia $Q_2 A^* \cdot t^{-1}(\lambda) = 0$, $Q_2 A^* \cdot t(Q_2 A^*) = 0$; $Q_2 B^* \cdot t(\lambda) = 0$; $Q_2 B^* \cdot t(Q_2 B^*) = 0$ e che $t(B^*)$ sia interno a $Q_3 t(P)$ e $t^{-1}(A^*)$ a PQ_1. Allora dal lemma VI) è facile dedurre che nessuno dei punti di $Q_1 Q_2 \dotplus Q_2 Q_3$ può essere fondamentale o quasi-fondamentale in senso stretto rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$. E quei punti non sono quasi-fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$ nemmeno in senso lato, cioè nel senso che questa espressione ha sempre avuto nella Memoria presente. I tratti $t^{-1}(A^*) Q_1$ e $Q_3 t(B^*)$ contengono invece punti fondamentali rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$. Le spezzate $B^* Q_3 \dotplus Q_3 t(B^*)$ e $t^{-1}(A^*) Q_1 \dotplus Q_1 A^*$ sono due spezzate semi-fondamentali in senso stretto relative a λ e $\Sigma(\lambda)$ e Q_2 è un vertice di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, ed è un punto semi-fondamentale in senso stretto per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Anche in questo caso λ contiene punti fondamentali rispetto alla direzione di una semiretta di origine Q_2 e interna, a meno dell'origine, all'angolo retto $\widehat{Q_1 Q_2 Q_3}$.

3). Negli esempi precedenti si presenta una circostanza analoga a quella che si verifica nel caso $n = 2$, $m = 0$ (ved. n. 23); e cioè: ciascun lato estremo di λ contiene o punti fondamentali o punti quasi-fondamentali relativi a $\Sigma(\lambda)$ e interni a λ.

Si potrebbe quindi pensare di rendere più semplice la dimostrazione del teorema I), sopprimendo la considerazione dei punti semi-fondamentali e introducendo invece quella dei punti fondamentali e quasi-fondamentali contenuti nei lati estremi di λ e relativi a $\Sigma(\lambda)$.

Nel fatto l'arco ν, sostituito a λ nel procedimento induttivo del § 4, ha sempre almeno un lato estremo su λ. Quindi, se ν possiede punti interni fondamentali o quasi-fondamentali, rispetto al solito campo $\Sigma(\nu)$ adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, e se punti di quel tipo cadono o *in un lato non estremo* di ν o *in ciascuno dei due lati estremi* di ν, il procedimento seguito nel § 4 permette di dedurre che λ ammette *nell'interno* almeno un punto di quel tipo, relativo a $\Sigma(\lambda)$. Ma quel procedimento porta soltanto a questa conclusione e non permette affatto di dire che si ritrovano per λ e $\Sigma(\lambda)$ le stesse circostanze che si sono supposte vere per ν e $\Sigma(\nu)$. Naturalmente, con ciò non intendo affermare che le considerazioni esposte in questa Memoria non si debbano poter semplificare e che il teorema I) non possa esser sostituito da qualche altro più snello ed egualmente efficace nelle (eventuali) applicazioni.

4). Il teorema IV) si presta a dimostrare facilmente che alla spezzata ϕ e alla semilinea l del teorema A) del n. 4, si può imporre di essere, rispettivamente, costituite da due segmenti al più, da un segmento e un raggio al più. Questo risultato si può molto probabilmente raggiungere anche senza passare attraverso il teorema IV) ([25]); e questo risultato può essere forse quello cui si allude alla fine dell'osservazione precedente.

([25]) Nel fatto le cose stanno così; e le deduzioni relative si trovano sviluppate in alcune mie Note *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate* ecc., in corso di stampa nei «Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei» [nota aggiuntiva sulle bozze di stampa].