Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Maria Stella Li Chiavi

Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann su un'opportuna superficie di Riemann su cui siano eseguiti dei tagli paralleli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 3 (1932), p. 95-127

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__95_0>

SULLA RAPPRESENTAZIONE CONFORME DELLE AREE PLURICONNESSE APPARTENENTI A SUPERFICIE DI RIEMANN SU UN'OPPORTUNA SUPERFICIE DI RIEMANN SU CUI SIANO ESEGUITI DEI TAGLI PARALLELI

di Maria Stella Li Chiavi *a Livorno*

Premessa

P. Koebe, in una sua Memoria (1), trova *nove* tipi di aree caratteristiche (beninteso *piane*) su cui dimostra che sono rappresentabili conformemente e biunivocamente le aree piane pluriconnesse. Limitatamente a un sol tipo di area, lo stesso resultato era stato ottenuto del Prof. Cecioni nella sua Memoria: Sulla rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse su un piano su cui siano eseguiti dei tagli paralleli (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. XXV - 1908). Questo tipo di area è il V° tipo di aree caratteristiche considerato da Koebe.

Tali risultati sono di una notevole importanza; essi facilitano il computo dei moduli – permettono anzi di eseguirlo direttamente, in modo da poter poi ottenere attraverso la classica teoria dello Schottky (2) da proprietà della rappresentazione conforme di aree piane pluriconnesse proprietà di geometria birazionale delle curve algebriche.

Tenendo presente allora che la ricordata teoria dello Schottky è stata estesa dal Prof. Cecioni alle aree appartenenti a super-

(1) Koebe, *Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung IV*. – [Acta Mathematica, t. XLI (1918) pp. 305-344].

(2) Schottky, *Ueber die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen*. – [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXIII (1877), pp. 300-351].

ficie di RIEMANN, si comprende come sia interessante poter ottenere per le aree appartenenti a superficie di RIEMANN un resultato analogo a quello sopra ricordato per le aree piane.

Questo appunto è il problema che mi propongo e che, limitatamente a un solo tipo di aree, risolvo nella prima parte di questo lavoro, ottenendo il risultato seguente.

Ogni area appartenente ad una riemanniana pluriconnessa, dotata di $\rho+1$ *contorni, di ordine di connessione* $N=2\sigma+\rho+1$ *è rappresentabile conformemente e biunivocamente su un' opportuna riemanniana di genere* σ *formata di un numero* l *- numero arbitrario purchè* $>\sigma$ *- di fogli piani (connessi l'uno all'altro mediante sezioni di diramazione), sulla quale siano eseguiti* $\rho+1$ *tagli paralleli.*

Ciò che vi è di nuovo in questo risultato è appunto la proprietà relativa al numero l dei fogli, perchè la prima parte era già contenuta, per l convenientemente grande, nei risultati dello SCHOTTKY e del CECIONI.

Devo qui ricordare anche il lavoro del Dr. T. SALVEMINI (3), che mi è stato molto utile e a cui più volte mi riferisco.

Servendomi di quello che ho prima dimostrato, con considerazioni minutamente svolte in questo lavoro, riesco a stabilire - *attraverso metodi della rappresentazione conforme* - un risultato riguardante le curve algebriche *reali*, che mi sembra nuovo e di un certo interesse.

I.

Le funzioni Φ su aree appartenenti a superficie di Riemann.

1. - Si abbia una superficie di RIEMANN (ordinaria) Σ che pensiamo constituita nel modo ben noto, da un numero finito di fogli distesi su un piano, riuniti gli uni agli altri da un numero

(3) T. SALVEMINI, *Sulla rappresentazione conforme alle aree piane pluriconnesse su una superficie di Riemann di genere zero su cui siano eseguiti dei tagli paralleli.* - [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, cl. di Scienze, fis., mat. e nat., Vol. XVI - fasc. IV].

finito di sezioni di diramazione in modo da formare una superficie connessa. Sia A un'area appartenente a detta superficie, e supponiamo che il contorno di A sia formata da $\rho+1$ contorni parziali $L_0 \ldots\ldots L_\rho$, ognuno dei quali composto di un numero finito di archi di linee regolari analitiche, e che σ siano le retrosezioni interne ([4]) ad A. Diremo allora *funzione della specie* Φ ([5]) *relativa all'area* A una funzione analitica definita nell'interno e sul contorno dell'area, che soddisfa alle seguenti proprietà:

I. - Su ognuno dei contorni $L_0 \ldots\ldots L_\rho$ ha costante la parte immaginaria.

II. - È regolare in ogni punto interno e sul contorno di A rispetto alla variabile principale nell'area considerata ([6]).

III. - Ha nell'area periodi tutti reali.

2. - *Esistenza delle funzioni* Φ.

L'esistenza delle funzioni Φ vien subito, coi consueti procedimenti, dai teoremi sulla risolubilità del problema di Dirichlet per aree appartenenti a superfici di Riemann ([7]).

Dati certi valori *costanti* $i\lambda_0 \ldots\ldots i\lambda_\rho$, che la parte immaginaria della funzione dovrà assumere ai contorni $L_0 \ldots\ldots L_\rho$, e assegnati pure ad arbitrio i periodi relativi a giri lungo i cicli a_h e b_h delle retrosezioni, è determinata in modo unico da queste condizioni una funzione armonica, continua anche in ogni punto del contorno.

I periodi - essendo arbitrari - li assegno tutti $=0$ come è necessario, in base alla condizione III della definizione: Sia v

([4]) Cecioni, *Sulla rappresentazione conforme delle aree appartenenti a superfici di Riemann*. - [Annali delle Università Toscane, Nuova Serie, Vol. XII (1928) pp. 33-35].

([5]) Queste funzioni, insieme con altre, sono ormai classiche, dopo la Memoria dello Schottky, nello studio della rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse; qui vengono considerate anche per le aree appartenenti a una Riemanniana. Esse corrispondono (cfr. I, 4) a integrali di 1ª specie.

([6]) Cecioni, l. c. [4]), p. 43.

([7]) Picard, *Traité d'Analyse*. - [Paris, Gauthier-Villars, 1905], t. II, chap. XVI, e anche Cecioni, l. c. [4]) p. 37.

la funzione armonica che ottengo: è determinata allora, a meno di una costante reale additiva, la funzione coniugata u.

La funzione $\Phi = u + iv$ è allora una funzione analitica su Σ (si indica con Σ la superficie di Riemann sostegno dell'area considerata), regolare in ogni punto interno o del contorno di A [8]; essa presenta periodi reali ai tagli a_h b_h delle retrosezioni e per giri avvolgenti i contorni $L_0 \ldots\ldots L_\rho$; la sua parte immaginaria prende sui contorni i valori assegnati $i\lambda_0 \ldots\ldots i\lambda_\rho$.

La nostra funzione - pienamente determinata dalle costanti $i\lambda_0 \ldots\ldots i\lambda_\rho$ - soddisfa dunque alle condizioni poste.

3. - *Proprietà delle funzioni* Φ.

Non sarà inutile far notare a questo punto che a volta a volta conviene riferirsi ora alla variabile complessa sui fogli della riemanniana Σ, (ricordare che Σ si pensa costituita da un numero finito di fogli piani distesi sul piano della variabile complessa) ora alla variabile t su Σ, ora alla variabile principale relativa ad A. Chiamerò sempre z la variabile complessa sui fogli di Σ, t la variabile su Σ e per i punti del contorno, θ la variabile principale relativa al contorno dell'area, riserbandomi di chiarire a tempo e a luogo, quando l'uso delle dette variabili danneggiasse la chiarezza dell'esposizione.

a) Quando il punto variabile P percorre nel verso positivo la linea L_i $(i = 0, 1 \ldots\ldots \rho)$ la Φ aumenta di un periodo reale, che è lo stesso se P invece di L_i percorre un qualunque cammino chiuso che per deformazione continua sull'area A si riduce a L_i: detto periodo si dirà il *periodo* di Φ, relativo a L_i. Si ottengono così $\rho + 1$ periodi. Restano da considerare i periodi relativi alle σ retrosezioni interne ad A. È chiaro che il percorso delle linee a_h e b_h porta per la Φ dei periodi, reali per definizione, dunque, (variando h da 1 a σ) si ha per la nostra funzione Φ un numero totale di periodi: $2\sigma + (\rho + 1)$.

b) Detti periodi *non possono essere tutti nulli.*

(8) Cecioni, l. c. 4), p. 43.

Premettiamo un *lemma* (9).

Sia F una funzione che goda delle seguenti proprietà, nell'area A considerata:

I. - sia monodroma in A.

II. - abbia nell' interno un numero finito di poli.

III. - in tutti gli altri punti interni *(rispetto alla variabile t)* sia regolare.

IV. - sia regolare poi *rispetto alla variabile principale nei punti del contorno.*

V. - i valori che assume sul contorno siano tali che considerati due valori a e b che non siano presi sul contorno, una variabile complessa u possa andare con continuità da a a b, in modo che il modulo della differenza fra u e i valori di F al contorno non scenda mai al di sotto di un certo numero positivo δ.

Dico che *una tale funzione assume nell' interno di A ogni valore che non prende sul contorno lo stesso numero di volte, e precisamente tante volte quante diventa infinita.*

La dimostrazione - che non sto a riportare per disteso - differisce da quella del Prof. Cecioni (10) solo in questo. Nel caso delle aree piane, per applicare la formula dell' indicatore logaritmico, che richiede la *regolarità nell' interno e sul contorno* dell'area, basta escludere i punti angolari del contorno mediante convenienti intorni. Qui invece dovremo escludere anche i punti di diramazione situati sul contorno: si ottiene così un'area $\overline{A}$ in cui la F è regolare (eccetto, naturalmente nei poli). Il resto del ragionamento è identico.

Viene da quì immediatamente che *una funzione che soddisfi alle condizioni suddette si riduce, se manca di poli, a una costante.*

Segue allora che *i periodi di una funzione* Φ *non possono essere tutti nulli.*

(9) Tale lemma, per le aree piane, si trova in Cecioni, *Sulla rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse su un piano con tagli paralleli.* - [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1908)], pp. 3-4.

(10) l. c. 9).

Tale funzione infatti soddisferebbe a tutte le condizioni del lemma precedente e sarebbe per di più priva di poli – si ridurrebbe perciò a una costante.

c) La somma dei $(\rho+1)$ *periodi di una funzione* Φ *relativi a giri lungo i contorni è* $=0$, come nel caso del piano.

Infatti, immaginiamo eseguiti i tagli lungo le σ retrosezioni interne ad A: A diventa un'area $\bar{A}$ pseudosemplice ([11]) con $(\rho+1)+\sigma$ contorni. Ora i periodi relativi a giri lungo le retrosezioni complete sono nulli – ogni retrosezione implica infatti il percorso di ciascun taglio a_h e b_h due volte in senso opposto – cosicchè in $\bar{A}$ la funzione ha soltanto i periodi (reali) relativi ai contorni $L_0 \ldots\ldots L_\rho$. Perciò, essendo $\bar{A}$ pseudosemplice, risulta dimostrata l'affermazione ([12]).

d) Siccome i valori costanti delle parti immaginarie delle funzioni Φ sui contorni – che abbiamo indicato con $i\lambda_0 \ldots\ldots i\lambda_\rho$ – sono arbitrari, possiamo considerare quelle particolari funzioni Φ che corrispondono a $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} \ldots = \lambda_\rho = 0$, $\lambda_i = \pi$ $(i = 0 \ldots \rho)$.

Le indicheremo con Φ_i. Se Φ è la più generale funzione della specie Φ, che assume al contorno L_i il valore $i\lambda_i$ $(i=0\ldots\ldots\rho)$ si ha, per essa, come nel caso delle aree piane ([13])

$$\Phi = \frac{1}{\pi}\sum_0^\rho \lambda_i \Phi_i ; \tag{1}$$

([11]) Cecioni, l. c. [1]), p. 32. – Così il Prof. Cecioni traduce la parola "*schlichtartig*", usata da Koebe; si dice *pseudosemplice* un'area tale che ogni linea chiusa, tutta interna ad essa, ne rompe la connessione. Per un teorema noto [Koebe, *Ueber die Uniformisierung der Algebraischen Kurven*, II (Mathematische Annalen, Bd. LXIX (1910) pp. 1-81)] ogni area pseudosemplice è rappresentabile conformemente e (anche al contorno) biunivocamente su un campo piano a un sol foglio.

([12]) Cecioni, l. c. [4]) p. 53. Ivi l'A. dà per le funzioni H una dimostrazione quasi identica a questa, della stessa proprietà.

([13]) Seguo passo per passo lo studio delle funzioni $\Phi(z)$ relative ad aree piane esposto dal prof. Cecioni: *Sopra alcune questioni attinenti alla rappresentazione conforme delle aree piane piane pluriconnesse e applicazioni alla teoria delle curve algebriche di genere p con* $p+1$ *circuiti reali, e specialmente di quelle iperellittiche.* [Litografie (1925)].

l' esistenza delle retrosezioni non porta alcun inconveniente essendo i periodi *reali* per definizione.

Se supponiamo $\lambda_i = \lambda \, (i=0, 1 \ldots\ldots \rho)$ è, come si vede a priori, $\Phi = i\lambda +$ costante reale; dalla (1) abbiamo allora

$$\Phi_0 + \Phi_1 + \ldots\ldots + \Phi_\rho = \pi i$$

e la (1) diventa:

$$\Phi = i \lambda_r + \frac{1}{\pi} \sum_{0}^{r}{}_h (\lambda_h - \lambda_r) \Phi_h$$

$$(h = 0, 1 \ldots r-1, \ r+1 \ldots \rho).$$

Nel modo suddetto, sempre a meno di una costante reale additiva, si possono ottenere $\rho + 1$ sistemi di funzioni

$$\Phi_0, \ \Phi_1 \ldots \Phi_{r-1}, \ \Phi_{r+1} \ldots \Phi_\rho$$

$$(r = 0, \ 1 \ldots \rho).$$

Ad uno qualunque di essi daremo il nome di *sistema fondamentale normale di funzioni* Φ.

e) La funzione Φ_i ha in A dei periodi relativi a giri avvolgenti i contorni $L_0 \, L_1 \ldots\ldots L_\rho$ e presenta pure dei periodi relativi a giri lungo i tagli a_h e b_h delle retrosezioni $(h = 1 \ldots . \sigma)$ – tali periodi sono tutti reali per definizione. Indichiamo con $\omega_i^{(0)} \, \omega_i^{(1)} \ldots\ldots \omega_i^{(\rho)}$ i periodi relativi ai contorni, e con $\alpha_i^{(1)}, \ldots,$ $\alpha_i^{(\sigma)}, \ \beta_i^{(1)}, \ldots, \ \beta_i^{(\sigma)}$ i periodi relativi a giri lungo i tagli a_h e b_h. Tali periodi sono in numero di $2\sigma + (\rho + 1)$; ma come si è precedentemente dimostrato esiste la relazione

$$\omega_i^{(0)} + \omega_i^{(1)} + \ldots\ldots + \omega_i^{(\rho)} = 0 \,, \qquad (i = 0 \ldots \rho)$$

che mostra che fra i periodi relativi ai contorni ciascuno è uguale alla somma degli altri cambiata di segno. Onde ogni funzione Φ_i possiede solo $2\sigma + \rho$ periodi indipendenti.

Si possono considerare dunque $\rho + 1$ *matrici dei* periodi – una per ogni sistema fondamentale di funzioni Φ:

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc|}
 & L_0 & L_1 \dots & L_{r-1} & L_{r+1} \dots & L_\rho & a_1 \dots & a_\sigma, & b_1 \dots & b_\sigma \\
\Phi_0 & \omega_0^{(0)} & \omega_0^{(1)} \dots & \omega_0^{(r-1)} & \omega_0^{(r+1)} \dots & \omega_0^{(\rho)} & \alpha_0^{(1)} \dots & \alpha_0^{(\sigma)} & \beta_0^{(1)} \dots & \beta_0^{(\sigma)} \\
\Phi_1 & \omega_1^{(0)} & \omega_1^{(1)} \dots & \omega_1^{(r-1)} & \omega_1^{(r+1)} \dots & \omega_1^{(\rho)} & \alpha_1^{(1)} \dots & \alpha_1^{(\sigma)} & \beta_1^{(1)} \dots & \beta_1^{(\sigma)} \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Phi_{r-1} & \omega_{r-1}^{(0)} & \omega_{r-1}^{(1)} \dots & \omega_{r-1}^{(r-1)} & \omega_{r-1}^{(r+1)} \dots & \omega_{r-1}^{(\rho)} & \alpha_{r-1}^{(1)} \dots & \alpha_{r-1}^{(\sigma)} & \beta_{r-1}^{(1)} \dots & \beta_{r-1}^{(\sigma)} \\
\Phi_{r+1} & \omega_{r+1}^{(0)} & \omega_{r+1}^{(1)} \dots & \omega_{r+1}^{(r-1)} & \omega_{r+1}^{(r+1)} \dots & \omega_{r+1}^{(\rho)} & \alpha_{r+1}^{(1)} \dots & \alpha_{r+1}^{(\sigma)} & \beta_{r+1}^{(1)} \dots & \beta_{r+1}^{(\sigma)} \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Phi_\rho & \omega_\rho^{(0)} & \omega_\rho^{(1)} \dots & \omega_\rho^{(r-1)} & \omega_\rho^{(r+1)} \dots & \omega_\rho^{(\rho)} & \alpha_\rho^{(1)} \dots & \alpha_\rho^{(\sigma)} & \beta_\rho^{(1)} \dots & \beta_\rho^{(\sigma)}
\end{array}
$$

f) Una matrice normale dei periodi è sempre rettangolare, come è chiaro, in un'area non pseudosemplice ($\sigma > 0$). Dico che *essa ha la caratteristica massima* ρ.

Se infatti tutti i minori di ordine ρ della matrice sopra considerata fossero nulli, esisterebbero dei numeri non tutti nulli $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_\rho$ tali che

$$\Sigma_k \, \sigma_k \, \omega_k^{(i)} = 0, \quad \Sigma_k \, \sigma_k \, \alpha_k^{(l)} = 0, \quad \Sigma_k \, \sigma_k \, \beta_k^{(l)} = 0$$

$$(k=0, \dots, r-1, r+1, \dots, \rho; \; i=0, \dots, r-1, r+1, \dots, \rho; \; l=1, \dots, \sigma)$$

ed esisterebbe quindi una funzione Φ

$$\Phi = \sigma_0 \, \Phi_0 + \dots + \sigma_{r-1} \, \Phi_{r-1} + \sigma_{r+1} \, \Phi_{r+1} + \dots + \sigma_\rho \, \Phi_\rho$$

monodroma in A e priva di poli. Ora una tale funzione, per il teorema prececentemente dimostrato non può esistere, o si riduce a una costante; e costante non può essere perchè *è reale su* L_r e, se per esempio $\sigma_h \neq 0$, *non è reale su* L_h.

La caratteristica della nostra matrice è dunque effettivamente $= \rho$.

g) Da questo segue subito, come nel caso delle aree piane, che *le funzioni di un sistema fondamentale normale di funzioni* Φ *sono linearmente indipendenti.*

h) Se i valori costanti $i\lambda_0 \ldots i\lambda_\rho$ che la parte immaginaria della funzione Φ che si vuol determinare, dovrà assumere ai contorni $L_0 \ldots L_\rho$, sono *tutti uguali*, la funzione si si riduce ad una costante.

4. – *Interpretazione delle funzioni* Φ *sulla riemanniana corrispondente all'area* A.

a) Si sa dalla teoria dello SCHOTTKY estesa ad aree pluriconnesse appartenenti a superficie di RIEMANN ([14]) che ad una tale area corrisponde una classe di curve algebriche *(curve caratteristiche dell'area)* irriducibili, reali, di genere $p = 2\sigma + \rho$, che presentano il caso ortosimmetrico ed hanno $\rho + 1$ circuiti reali, in corrispondenza ai $\rho + 1$ contorni dell'area; corrisponde cioè una superficie di RIEMANN ortosimmetrica, di genere $p = 2\sigma + \rho$, con $\rho + 1$ linee di simmetria. Il numero di queste linee è, nel nostro caso, certo minore di $p + 1$, perchè si tratta di aree non pseudosemplici – e si sa che alle aree piane, *e a quelle sole*, corrispondono le superficie di RIEMANN ortosimmetriche, con $p + 1$ (il massimo numero) circuiti reali.

Sia dunque $g(u, v) = 0$ una delle curve caratteristiche di A ed R la corrispondente riemanniana. Prendiamo in esame una qualunque funzione della specie Φ, e sia Φ, e la funzione u, che è della specie K ([15]). Escludiamo in un primo momento da A i punti di diramazione e i punti angolari del contorno, asportandone degli intorni convenientemente piccoli; nell'area A' così ottenuta il quoziente

$$\frac{d\Phi}{dz} : \frac{du}{dz} = \frac{d\Phi}{du} \tag{2}$$

è evidentemente funzione monodroma, regolare, incluso il contorno, tolto al più un numero finito di poli. Consideriamo poi

([14]) CECIONI, l. c. [4]).

([15]) CECIONI, l. c. [4]), pp. 46-47.

uno degli intorni asportati, sia cioè Γ : l'intorno di un punto a – a punto di diramazione o punto angolare del contorno. – Indichiamo con τ la variabile principale nei due casi. In tal caso Φ e u sono funzioni di τ e il quoziente $\frac{d\Phi}{du}$ è espresso dalla

$$(3) \qquad \frac{d\Phi}{du} = \frac{d\Phi}{d\tau} : \frac{du}{d\tau}$$

in tutto l'intorno Γ, *anche in* a – (ove può avere un polo, inquantochè $\frac{d\Phi}{d\tau}$ è regolare in tutto Γ anche per $\tau = 0$, $\frac{du}{d\tau}$ è regolare eventualmente infinitesima, o ha al più un polo per $\tau=0$; quindi $\frac{d\Phi}{du}$ è regolare in tutto Γ o ha al più un polo in a). Ora se prendo un punto c di Γ diverso da a, è chiaro che in un conveniente intorno di esso le due espressioni

$$\frac{d\Phi}{d\tau} : \frac{du}{d\tau}, \qquad \frac{d\Phi}{dz} : \frac{du}{dz},$$

coincidono; essendo c un punto qualunque diverso da a, la variabile in c è $z - a$. Dunque in tutto Γ, eccetto che in a, le due espressioni (2) e (3) coincidono. Ma allora, per le proprietà delle funzioni analitiche, nel punto a la (3) dà il prolungamento analitico di (2).

Cosicchè *in tutta l'area A* il quoziente $\frac{d\Phi}{du}$ è regolare, tolto un numero finito di poli; inoltre $\frac{d\Phi}{du}$ è funzione monodroma in A ed è reale in tutti i punti del contorno, come si vede subito, tenendo presenti le proprietà delle funzioni K e delle Φ ([16]). Ora tali proprietà definiscono appunto le funzioni K. La $\frac{d\Phi}{du}$ è dunque una funzione K e, come tale, è esprimibile razionalmente e a coefficienti reali, per u e v. Si ha dnnque

([16]) Cecioni, l. c. [4]), pp. 46-47.

$$\frac{d\Phi}{du} = f(u, v),$$

dove $f(u, v)$ è una funzione razionale a coefficienti reali. Ne segue

$$(4) \qquad \Phi = \int_{(u_0 v_0)}^{(u\, v)} f(u, v)\, du + \varphi^{(0)},$$

dove *intendiamo che* u_0 *e* v_0 *siano valori reali.*

Interpretando le Φ su R si ha così un sistema di integrali abeliani.

Ricordiamo ora che la R si trasforma in sè per la simmetria $u' = \overline{u}$, $v' = \overline{v}$ (il coniugio: $\overline{u}$ e $\overline{v}$ rappresentano rispettivamente i complessi coniugati di u e v ([17])). La (4) ci mostra allora che il valore che la funzione $\Phi - \varphi^{(0)}$ assume in un punto (u, v) di R, corrispondentemente a un certo cammmino d'integrazione che ad esso conduce da $(u_0\, v_0)$, è complesso coniugato di quello che essa assume nel punto simmetrico $(\overline{u}, \overline{v})$ corrispondentemente al cammino simmetrico. Le Φ, interpratate su R, sono dunque prive di singolarità su tutta la R - sono quindi *integrali abeliani di prima specie,* aventi la parte immaginaria costante di ciascuna linea reale di R. - Viceversa ogni integrale di 1ª specie che goda di quest'ultima proprietà, diviene in A una funzione della specie Φ ([18]).

b) Un sistema $\Phi_0\, \Phi_1 \ldots \Phi_{r-1}\, \Phi_{r+1} \ldots\ldots \Phi_\rho$ dà, interpretato sulla riemanniana, ρ integrali di 1ª specie linearmente indipendenti. Nel caso delle aree pseudosemplici ($\rho = p$) il Cecioni ha mostrato ([19]), e lo si vede subito, che si ottiene un sistema

([17]) Klein: *Riemannsche Flächen* - [Leipzig, Teubner, 2ter Abdr. (1906) (litogr.)], II - pp. 133 e seg.

([18]) Questa dimostrazione è la stessa data dal Prof. Cecioni nella sua Memoria litografata citata in [13]) per le funzioni Φ in aree piane. Che la dimostrazione valga anche in questo caso si vede pure dal fatto che in essa l'ipotesi che la superficie abbia $p+1$ linee di simmetria, o un numero minore, non viene adoperata affatto.

([19]) Cecioni, l. c. [13]) pp. 25-28.

di integrali normali di 1ª specie relativi a un sistema di retrosezioni di WEICHOLD ([20]). Nel caso attuale ($\rho < p$), le stesse considerazioni mostrerebbero che si ottiene dalle Φ un sistema di integrali di 1ª specie, formato da un numero $\rho < p$ di integrali, che sono poi normalizzati solo parzialmente – e ciò è ben naturale, quando si pensa che le linee reali sono in numero di $\rho + 1 < p + 1$.

II.

Premesso questo studio sulle funzioni Φ andiamo ad affrontare effettivamente il problema.

Sia data un'area A appartenente a una superficie di RIEMANN Σ, dotata, come sopra, di $\rho + 1$ contorni e σ retrosezioni interne; supponiamo che ognuno dei contorni $L_0 \ldots\ldots L_\rho$ sia formato da un numero finito di archi regolari di linea analitica, il che è necessario per la dimostrazione. Voglio dimostrare che essa è rappresentabile biunivocamente e conformemente su una conveniente superficie di RIEMANN *R, di genere* σ, composta di un certo numero l di fogli piani, per ora indeterminato, e dotata di $\rho + 1$ contorni mediante dei tagli paralleli – tutti situati a distanza finita – e si può anche supporre che uno dei tagli, per esempio quello corrispondente a L_0 sia situato sull'asse reale. Pensiamo inoltre che su R non vi siano diramazioni all'infinito. Supponiamo che A sia effettivamente rappresentabile su una tale riemanniana: esiste allora una funzione w ([21]) dei punti di A che effettua la rappresentazione conforme. Essa deve godere delle seguenti proprietà:

I – deve essere monodroma in A.

II – deve avere dei poli del 1° ordine soltanto in un certo numero l di punti interni ad A (l è per ora indeterminato) $a_1 \ldots\ldots a_l$ con certi rispettivi termini d'infinito:

([20]) KLEIN, l. c. [17]) pp. 254 e seg.

([21]) Non indico la variabile per togliere di mezzo ogni possibile confusione fra la variabile z sui fogli della riemanniana Σ, la variabile principale θ in A e la variabile τ su Σ. Mi riserbo però, quando sia necessario, di introdurre l'una o l'altra delle suddette variabili.

$$(A) \qquad \frac{m_1 + in_1}{z - a_1} \cdots\cdots \frac{m_l + in_l}{z - a_l},$$

se nessuno dei punti $a_1 \ldots\ldots a_l$ è punto di diramazione o punto all'infinito. In tal caso, se cioè il punto a_i fosse punto di diramazione o punto all'infinito, invece di $z - a_i$, in (A) va messa la variabile nel punto a_i.

III - deve avere la parte immaginaria costante sui contorni, in particolare nulla su L_0.

Dimostriamo prima di tutto l'esistenza di una tale funzione ([22]).

Prendiamo in A l punti $a_1 \ldots\ldots a_l$ (che saranno poi i poli della funzione da costruire) e determiniamo un integrale abeliano di 2ª specie, relativo a Σ (la riemanniana sostegno di A) $R = U + iV$ che abbia in quei punti le singolarità stabilite dalla II proprietà coi coefficienti $m_s + in_s$ scelti ad arbitrio, non abbia in A alcune altre singolarità e abbia poi tutti i periodi reali.

Consideriamo poi quella funzione armonica, determinata e continua in A che assume sui contorni i valori stessi che assume V e ammette ai tagli a_h e b_h *moduli di periodicità tutti nulli* $(h = 1, 2 \ldots\ldots \sigma)$. Sia poi f quella funzione analitica su Σ, determinata a meno di una costante reale additiva, che ha come coefficiente dell'immaginario tale funzione armonica; e consideriamo finalmente su Σ la funzione analitica

$$(5) \qquad H = f + R\ ;$$

essa è reale e finita sul contorno, diviene infinita di 1° ordine soltanto nei punti a_s $(s = 1 \ldots\ldots l)$ interni ad A, coi termini d'infinito (A), ed ha $2\sigma + \rho$ periodi *reali,* indipendenti, corrispondenti a cicli lungo a_h e b_h e lungo ρ qualunque dei contorni $L_0 \ldots\ldots L_\rho$. Gode dunque di tutte le proprietà caratteristiche delle funzioni H ([23]).

([22]) La dimostrazione che segue, concisamente riportata, non è altro che la dimostrazione di esistenza delle funzioni H, che trovasi in Cecioni, l. c. [4]), pp. 47-49.

([23]) Cecioni, l. c. [4]), p. 47.

In particolare, determiniamo nell'area A, col procedimento ora svolto, quella serie di funzioni $H'_s = (s = 1 \ldots\ldots l)$ che hanno ciascuna un sol polo nel punto a_s, con relativo termine d'infinito $\dfrac{1}{z - a_s}$ ([24]) e poi una seconda serie di funzioni H''_s che hanno ciascuna un sol polo nel punto a_s con relativo termine d'infinito $\dfrac{i}{z - a_s}$.

Consideriamo ora la funzione:

$$\sum_1^l {}_s\, m_s H'_s + \sum_1^l {}_s\, n_s H''_s ,$$

essa è ancora una funzione della specie H - lo sono infatti le due sommatorie, come combinazioni razionali a coefficienti reali di funzioni H, e per la stessa ragione lo è la somma totale - ha dei poli del 1° ordine nei punti a_s con relativi termini d'infinito $\dfrac{m_s + i n_s}{z - a_s}$. È dunque la funzione data dalla (5): e possiamo scrivere:

$$H = \sum_1^l {}_s\, m_s H'_s + \sum_1^l {}_s\, n_s H''_s . \tag{5'}$$

Ci sarà utile in seguito tener presente la (5').

Supposta ora esistente una funzione w che soddisfi alle condizioni I, II, III di cui sopra, consideriamo la funzione ([25]):

$$H - w ,$$

(dove H è data dalla (1'), w è la funzione trasformatrice); si vede immediatamente che essa gode delle seguenti proprietà:

I - ha nell'area $2\sigma + \rho$ periodi *reali*.

([24]) Vale anche qui l'osservazione fatta sopra: se uno dei punti a_i $(i = 1 \ldots\ldots l)$ fosse punto di diramazione o punto all'infinito, al posto di $(z - a_i)$ va messa la variabile principale in a_i.

([25]) Cecioni, l. c. [9]), p. 6).

II – è regolare in ogni punto interno dell' area.

III – ha costante sui contorni – in particolare nulla su L_0 – la parte immaginaria. E queste non sono altro che le proprietà che individuano le funzioni Φ, già sopra studiate.

Si ha quindi:

$$H - w = -\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\rho}{}_k \lambda_k \Phi_k = -\Phi,$$

dove con $i\lambda_k$ indichiamo la parte immaginaria costante di w su L_k. Per la nostra funzione w si ha cosí l'espressioue (tenendo presente la (5'))

$$(6) \qquad w = H + \Phi = \sum_{1}^{l}{}_s m_s H'_s + \sum_{1}^{l}{}_s n_s H''_s + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\rho}{}_k \lambda_k \Phi_k .$$

La w sarà completamente determinata quando saranno determinate le $2l + \rho$ costanti m_s, n_s, λ_k. Consideriamo allora le tabelle dei periodi delle funzioni H'_s, H''_s, Φ_k.

Funzioni Φ_k: Indichiamo con $\omega_k^{(i)}$ $(i = 1 \ldots\ldots \rho)$ il periodo della funzione Φ_k $(k = 1 \ldots\ldots \rho)$ per un giro lungo il contorno L_i, con $\alpha_k^{(\lambda)}$ $\beta_k^{(\lambda)}$ rispettivamente i periodi della funzione Φ_k relativi a giri lungo i tagli a_h e b_h, $h = (1 \ldots\ldots \sigma)$ conformemente alla tabella

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & L_1 \ldots\ldots L_\rho & a_1 \ldots\ldots a_\sigma & b_1 \ldots\ldots b_\sigma \\
\Phi_1 & \omega_1^{(1)} \ldots\ldots \omega_1^{(\rho)} & \alpha_1^{(1)} \ldots\ldots \alpha_1^{(\sigma)} & \beta_1^{(1)} \ldots\ldots \beta_1^{(\sigma)} \\
\Phi_2 & \omega_2^{(1)} \ldots\ldots \omega_2^{(\rho)} & \alpha_1^{(1)} \ldots\ldots \alpha_2^{(\sigma)} & \beta_2^{(1)} \ldots\ldots \beta_2^{(\sigma)} \\
\cdot & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\cdot & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\Phi_\rho & \omega_\rho^{(1)} \ldots\ldots \omega_\rho^{(\rho)} & \alpha_\rho^{(1)} \ldots\ldots \alpha_\rho^{(\sigma)} & \beta_\rho^{(1)} \ldots\ldots \beta_\rho^{(\sigma)}
\end{array}$$

Funzioni H'_s. Le notazioni dei relativi periodi saranno le seguenti:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & L_1 \,.....\, L_\rho & a_1 \,.....\, a_\sigma & b_1 \,.....\, b_\sigma \\
H'_1 & \gamma_1^{(1)} \,.....\, \gamma_1^{(\rho)} & A_1^{(1)} \,.....\, A_1^{(\sigma)} & B_1^{(1)} \,.....\, B_1^{(\sigma)} \\
H'_2 & \gamma_2^{(1)} \,.....\, \gamma_2^{(\rho)} & A_2^{(1)} \,.....\, A_2^{(\sigma)} & B_2^{(1)} \,.....\, B_2^{(\sigma)} \\
. & .... & .... & .... \\
. & .... & .... & .... \\
H'_l & \gamma_l^{(1)} \,.....\, \gamma_l^{(\rho)} & A_l^{(1)} \,.....\, A_l^{(\sigma)} & B_l^{(1)} \,.....\, B_l^{(\sigma)}
\end{array}$$

Funzioni H''_s. Analogamente:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & L_1 \,.....\, L_\rho & a_1 \,.....\, a_\sigma & b_1 \,.....\, b_\sigma \\
H''_1 & \overline{\gamma}_1^{(1)} \,.....\, \overline{\gamma}_1^{(\rho)} & \overline{A}_1^{(1)} \,.....\, \overline{A}_1^{(\sigma)} & \overline{B}_1^{(1)} \,.....\, \overline{B}_1^{(\sigma)} \\
H''_2 & \overline{\gamma}_2^{(1)} \,.....\, \overline{\gamma}_2^{(\rho)} & \overline{A}_2^{(1)} \,.....\, \overline{A}_2^{(\sigma)} & \overline{B}_2^{(1)} \,.....\, \overline{B}_2^{(\sigma)} \\
. & .... & .... & .... \\
. & .... & .... & .... \\
H''_l & \overline{\gamma}_l^{(1)} \,.....\, \overline{\gamma}_l^{(\rho)} & \overline{A}_l^{(1)} \,.....\, \overline{A}_l^{(\sigma)} & \overline{B}_l^{(1)} \,.....\, \overline{B}_l^{(\sigma)}
\end{array}$$

Siccome la w deve essere monodroma in A, dovranno essere soddisfatte le seguenti equazioni:

$$
(7)\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{\pi}\left(\lambda_1\,\omega_1^{(1)}+\ldots\ldots+\lambda_\rho\,\omega_\rho^{(1)}\right)+\\
+\left[\left(m_1\,\gamma_1^{(1)}+\ldots\ldots+m_l\,\gamma_l^{(1)}\right)+\left(n_1\,\overline{\gamma}_1^{(1)}+\ldots\ldots+n_l\,\overline{\gamma}_l^{(1)}\right)\right]=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{\pi}\left(\lambda_1\,\omega_1^{(\rho)}+\ldots\ldots+\lambda_\rho\,\omega_\rho^{(\rho)}\right)+\\
+\left[\left(m_1\,\gamma_1^{(\rho)}+\ldots\ldots+m_l\,\gamma_l^{(\rho)}\right)+\left(n_1\,\overline{\gamma}_1^{(\rho)}+\ldots\ldots+n_l\,\overline{\gamma}_l^{(\rho)}\right)\right]=0\\
\frac{1}{\pi}\left(\lambda_1\,\alpha_1^{(1)}+\ldots\ldots+\lambda_\rho\,\alpha_\rho^{(1)}\right)+\\
+\left[\left(m_1\,A_1^{(1)}+\ldots\ldots+m_l\,A_l^{(1)}\right)+\left(n_1\,\overline{A}_1^{(1)}+\ldots\ldots+n_l\,\overline{A}_l^{(1)}\right)\right]=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{\pi}\left(\lambda_1\,\alpha_1^{(\sigma)}+\ldots\ldots+\lambda_\rho\,\alpha_\rho^{(\sigma)}\right)+\\
+\left[\left(m_1\,A_1^{(\sigma)}+\ldots\ldots+m_l A_l^{(\sigma)}\right)+\left(m_1\,\overline{A}_1^{(\sigma)}+\ldots\ldots+n_l\,\overline{A}_l^{(\sigma)}\right)\right]=0\\
\frac{1}{\pi}\left(\lambda_1\,\beta_1^{(1)}+\ldots\ldots+\lambda_\rho\,\beta_\rho^{(1)}\right)+\\
+\left[\left(m_1\,B_1^{(1)}+\ldots\ldots+m_l\,B_l^{(1)}\right)+\left(n_1\,\overline{B}_1^{(1)}+\ldots\ldots+n_l\,\overline{B}_l^{(1)}\right)\right]=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{\pi}\left(\lambda_1\,\beta_1^{(\sigma)}+\ldots\ldots+\lambda_\rho\,\beta_\rho^{(\sigma)}\right)+\\
+\left[\left(m_1\,B_1^{(\sigma)}+\ldots\ldots+m_l\,B_l^{(\sigma)}\right)+\left(n_1\,\overline{B}_1^{(\sigma)}+\ldots\ldots+n_l\,\overline{B}_l^{(\sigma)}\right)\right]=0\,.
\end{array}\right.
$$

Ora questo è un sistema di $\rho + 2\,\sigma$ equazioni lineari, omogenee nelle $\rho + 2\,l$ incognite λ_k, m_s, n_s: intanto esso è certo risolubile per $l > \sigma$. Verrà dimostrato in seguito che le (7) sono indipendenti per $l > \sigma$. È questa l'unica limitazione cui deve soddisfare il numero l, che per ora era completamente indeterminato. Se dunque abbiamo cura di assegnare un conveniente numero di poli, possiamo esser sicuri di aver costruito una funzione w soddisfacente alle condizioni enunciate (a meno di una costante reale additiva). È chiaro infatti che la funzione w data dalla (6) soddisfa alle proprietà I, II, III di cui sopra. E di tali funzioni w ne avremo infinite se l non è sottoposto a nessun'altra limitazione, come vedremo in seguito che accade effettivamente. Precisamente, scelto ad arbitrio $l > \sigma$, e presi, pure ad arbitrio, l poli $a_1 \ldots\ldots a_l$ in A, vengono determinate infinite funzioni Φ in corrispondenza biunivoca con le soluzioni del sistema (7) (più per ogni Φ una costante reale additiva).

III.

Occorre ora dimostrare inversamente che, partendo da una funzione w soddisfacente alle proprietà enunciate nel n.° II si arriva effettivamente a una superficie di RIEMANN R del tipo voluto. A questo sarà dedicato il n.° IV; nel presente numero osserveremo invece alcune proprietà ([26]) di cui gode la w.

a) La funzione w assume in A ogni valore che **non** *prende sul contorno, e lo prende ognuno lo stesso numero di volte.*

Occorre notare subito che nelle condizioni che ci hanno servito a costruire la funzione w è detto esplicitamente che i punti $a_1 \ldots\ldots a_l$ (in cui la w ha l poli del 1° ordine) sono *interni* all'area A. Si vede subito allora come questa funzione w soddisfi alle condizioni del *lemma* dimostrato al n° I, pag. 5. Tale lemma ci dà allora che *la w prende in A ogni valore che non prende sul contorno tante volte quante diventa infinita* - *l volte,* dunque, nel nostro caso - avendo la w in A soltanto l poli del 1° ordine.

b) Valori della w al contorno.

Sia w_0 un valore reale o complesso, che la w prende al contorno. Supponiamo che esso venga preso in certi punti $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_q$ del contorno di A, colle molteplicità rispettive $\nu_1 \ldots\ldots \nu_q$ — il che vuol dire che la funzione $w - w_0$ diviene nel punto α_i $(i = 1 \ldots q)$ infinitesima di ordine ν_i (l'ordine di infinitesimo vien qui computato rispetto alla variabile principale τ nell'area). Sia poi preso (eventualmente). nell'interno in certi punti $\beta_1 \ldots \beta_p$ con le rispettive molteplicità $\nu_1^* \ldots \nu_p^*$. Seguendo

([26]) Cfr. proprietà enunciate e dimostrate per le funzioni K in CECIONI, l. c. [4]), pp. 54-59.

gli stessi ragionamenti fatti (per le funzioni K) dal prof. Cecioni (27) si ottiene la formula

$$\frac{1}{2}\Sigma\nu_i + \Sigma\nu_j^* = N_\infty = l \, .$$

Indicando con $2\,N_{w_0,\,c}$ il numero delle volte che il valore w_0 vien preso da w sul contorno, con $N_{w_0,\,i}$ il numero delle volte che vien preso nell'interno di A, (contando le molteplicità) ponendo cioè

$$N_{w_0,\,c} = \frac{1}{2}\Sigma\nu_i \qquad N_{w_0,\,i} = \Sigma\nu_j^* \;,$$

avremo la formula

$$N_{w_0,\,c} + N_{w_0,\,i} = l \, .$$

Se w_0 non è preso dalla funzione w sul contorno di A, questa formula comprende il risultato a).

c) *I punti a in cui $w - w_0$ diviene infinitesima di ordine > 1 sono in numero finito* (28).

IV.

Mi propongo in questo numero di dimostrare che una funzione w definita dalle proprietà del n° 2, rappresenta effettivamente l'area A su una superficie di Riemann del tipo voluto.

La dimostrazione può condursi come le dimostrazioni di vari fatti del tutto analoghi che si incontrano nella teoria della rappresentazione conforme.

Si potrebbero ad es. ripetere, con qualche facile ed inessenziale modificazione, i ragionamenti svolti dal Dott. Salvemini, al

(27) Cecioni, l. c. 4), pp. 55-57.

(28) La dimostraztone è sostanzialmente identica a quella (relativa alle funzioni K) che trovasi in Cecioni l. c. 4), p. 57.

n. 3 della Memoria citata in [3]), in un caso perfettamente analogo all' attuale.

Anche possiamo applicare a questo caso, con opportune modificazioni, il procedimento svolto dal Julia in un recente lavoro ([29]).

Nello svolgere le seguenti considerazioui mi attengo appunto a quest' ultimo modo, riserbandomi di rimandare al citato lavoro del Julia per tutto quello che ivi si può trovare senz' altro.

1. - *Costruzione della superficie di Riemann,* $\overline{R}$ ([30]).

Ragionamenti identici a quelli svolti dal Julia, al n. 3 del lavoro sopra citato, ci permettono di costruire la superficie di Riemmann, $\overline{R}$, in corrispondenza biunivoca senza eccezioni, conforme con eventuali eccezioui ai punti di diramazione e ai punti angolari del contorno, coll' area A, per mezzo della funzione trasformatrice w costruita al n. II del presente lavoro.

2. - *Proprietà generali di* $\overline{R}$.

a) Numero dei fogli e punti di diramazione.

Come s' è visto al n. III, *a*), di questo lavoro, la funzione w prende in un punto di A un determinato valore, che non prende al contorno, (osserviamo esplicitamente che qui consideriamo i valori presi dalla w nei punti interni ad A; i valori presi nei punti del contorno verranno considerati a parte) precisamente l volte. Ora per questa sua proprietà e per i ragionamenti svolti in 1, la w associa ad ogni punto di A l punti della superficie di Riemann $\overline{R}$. Si può pensare che gli l punti suddetti non siano sullo stesso foglio del piano w, ma ognuno su un foglio diverso e coincidano solo *in proiezione*. Ne viene, in definitiva, che la $\overline{R}$ è formata da l fogli semplici connessi l' uno

([29]) G. Julia, *Sur la répresentation conforme des aires multiplement connexes*. [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. di Scienze fis., mat. e nat., Vol. I della II Serie, fasc. II].

([30]) Qui " superficie di Riemann ,, non ha il significato che ha in tutto il resto del lavoro : la frase è usata (come dal Julia nel l. c.) per significare un campo a più fogli (diramati), dotato di contorno. La $\overline{R}$ che troveremo fra breve sarà poi una superficie di Riemann ordinaria ; non possono dunque nascere equivoci.

all' altro al modo solito mediante le sezioni di diramazione. *I punti di diramazione* di $\overline{R}$ corrispondono biunivocamente ai punti di A in cui la w prende un determinato valore un numero di volte $l_1 < l$ ai punti cioè in cui si ha $\frac{du}{dz} = 0$, e che come si è già dimostrato al n. III, *c*), di questo lavoro, sono in numero finito.

b) *Contorni di $\overline{R}$. Costruzione della R.*

Innanzi tutto osserviamo che, poichè $\overline{R}$ è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coll' area A, ai contorni di A corrispondono biunivocamente quelli di $\overline{R}$.

Siccome, per definizione, la w ha costante il coefficiente dell' immaginario sul contorno $L_i \, (i = 0...\rho)$, mentre in A il punto variabile P percorre uno dei contorni L_i, il punto corrispondente in $\overline{R}$, W, si muove su una linea $\lambda_i^* \, (i = 0...\rho)$, *finita* perchè i poli della funzione sono stati presi tutti in punti interni ad A, la quale, in proiezione, occupa un segmento parallelo all' asse reale, di ordinata $= \lambda_i$. Quando P percorre il contorno L_i, completamente e senza cambiar senso, W si muove su λ_i^* e finisce per tornare al punto di partenza, passando così per ogni posizione almeno *due* volte, o meglio, più in generale, un numero *pari di volte*, perchè può darsi che sulla linea λ_i^* giacciano eventualmente punti W corrispondersi a punti di A in cui $\frac{dw}{dz} = 0$, punti in cui può darsi che s' inverta il senso del movimento di W. Ciò è in armonia col fatto, già dimostrato ([31]), che un determinato valore è preso dalla w nel complesso dei contorni un numero pari di volte. Gli estremi delle linee λ_i^*, essendo punti di massimo e di minimo per la parte reale della w, sono certo fra i punti suddetti: può darsi che altri ne cadano nell' interno, ma ciò accadrà precisamente un numero finito di volte, per quanto è stato dimostrato al n. III, *c*), e richiamato in *a*). Ora, ogni tratto delle linee λ_i^* compreso fra due punti in cui $\frac{du}{dz} = 0$, è un tratto di crescenza o di decrescenza per la parte reale di w:

([31]) Cfr. n. III *b*).

per quello che si è detto prima, si può concludere che ogni linea λ_i^* può dividersi in un numero finito di tratti, ciascuno di crescenza o di decrescenza, in modo da far corrispondere a ogni tratto di crescenza uno di decrescenza coincidente in proiezione, (del resto poi arbitrario). Dimodochè, saldando ognuno dei detti tratti di crescenza col « corrispondente » di decrescenza opposto, veniamo ad esaurire completamente ogni linea λ_i^*. *Eseguite queste saldature* la $\overline{R}$ è divenuta un' altra superficie, che chiameremo R; e la formula del n. III, *b*), dimostra che anche nei punti w corrispondenti a valori presi dalla funzione sul contorno vi sono l fogli della nuova superficie R. Questa è dunque una ordinaria superficie di Riemann. Può darsi anche che le linee λ_i^* non giacciano su un foglio solo di R: e ciò accadrà certo se su essa vanno a cadere dei punti di diramazione.

Abbiamo dunque una superficie di Riemann R, con l fogli, su cui sono tracciate $\rho+1$ linee λ_i^* $(i=0\ldots\rho)$; tagliando la superficie lungo dette linee abbiamo un' area $\overline{R}$ in corrispondenza biunivoca con A.

Per compiere la dimostrazione resta solo a provare che *il genere di R è σ*: ciò è quanto vado a dimostrare.

Infatti è

$$N=2\sigma+\rho+1$$

l'ordine di connessione di A. Sia π il genere, per ora incognito, di R. Pratichiamo un primo taglio lungo una qualunqne delle linee l_s – con ciò si ottiene una R_1 aperta, il cui ordine di connessione è, come si sa dalla teoria della connessione

$$N=2\pi+1\,.$$

Eseguendo tutti i tagli si ottiene la $\overline{R}$ di ordine di connessione

$$\overline{N}=2\pi+\rho+1\,,$$

perchè ogni taglio (eccettuato il primo) fa aumentare di 1 l'ordine di connessione.

Si è visto d'altra parte che $\overline{R}$ e A sono in corrispondenza biunivoca continua senza eccezioni: deve essere quindi

$$N = \overline{N}$$

e di qui segue subito

$$\pi = \sigma \qquad \text{c. d. d.}$$

Si ha dunque:

Ogni area, appartenente a una superficie di Riemann, pluriconnessa, dotata di $\rho + 1$ *contorni, di ordine di connessione* $N = 2\sigma + \rho + 1$ *è rappresentabile, biunivocamente e conformemente, su una opportuna superficie di Riemann, di genere* σ *(formata da un numero* l *- numero arbitrario* $> \sigma$ *- di fogli piani) sulla quale sono praticati complessivamente* $\rho + 1$ *tagli paralleli. Unici eventuali punti eccezionali sono i punti di diramazione e i punti angolari del contorno.*

Per $l \leq \sigma$ ciò non è possibile in generale: verrà dimostrato rigorosamente alla fine del presente lavoro.

Questo teorema estende, come avevo detto, il teorema dimostrato per le aree piane dal prof. Cecioni nella sua Memoria, citata alla nota (9).

V.

Interpretazione della funzione trasformatrice sulla riemanniana.

1. – Con metodo analogo a quello seguito per le funzioni Φ al n. I si trova facilmente che cosa rappresenta la funzione w sulla riemanniana corrispondente alle curve caratteristiche dell' area A secondo la nota teoria dello Schottky, estesa dal prof. F. Cecioni alle aree appartenenti ad una superficie di Riemann.

Sia $g(u, v) = 0$ una delle curve caratteristiche di A ed S la corrispondente riemanniana (32), e prendiamo in esame la funzione w e la funzione u della specie K. Un procedimento identico a

(32) È da notare che qui ci sono tre riemanniane; la riemanniana sostegno di $A - \Sigma$; la R, sostegno di $\overline{R}$; la S, riemanniana corrispondente ad A secondo la nota suddetta teoria.

quello seguito nel n. I per le funzioni Φ conduce alla formula:

$$\frac{dw}{du} = f(u, v)$$

dove $f(u, v)$ è *una funzione razionale a coefficienti reali.* Ne segue

$$w = \int_{u_0 v_0}^{u v} f(u, v)\, du + w^{(0)} \tag{8}$$

dove u_0 e v_0 sono valori reali. Su S la w è dunque un integrale abeliano.

Osservando poi che la S è trasformata in sè dal *coniugio* $u' = \overline{u}$, $v' = \overline{v}$ ($\overline{u}$ e $\overline{v}$ sono i rispettivi complessi coniugati di u e v) la 8) ci mostra allora che il valore che la funzione $w - w^{(0)}$ assume in un punto (u, v) di S è complesso coniugato di quello che essa assume nel punto simmetrico $(\overline{u}, \overline{v})$, corrispondentemente ai cammini d'integrazione, l'uno simmetrico dell'altro, che ad essi conducono da $(u_0\ v_0)$.

Ciò mostra come la w, interpretata su S, abbia solo singolarità polari – è dunque un *integrale abeliano di 2ª specie* avente la parte immaginaria costante su ogni linea reale di S.

2. – Ciò poteva, anche dedursi dalla seguente osservazione: È, per il modo con cui si è costruita la funzione trasformatrice,

$$w = H + \Phi .$$

Ora le H sono sulla superficie di Riemann integrali di seconda specie e si è visto che le Φ sono integrali di prima specie.

VI.

Computo di costanti
Indipendenza delle equazioni trovate a pag. 111.

1. – Riprendiamo la funzione trasformatrice trovata al n. II: essa era della forma:

$$w = \sum_{1}^{\rho}{}_k \lambda_k \Phi_k + \sum_{1}^{l}{}_s m_s H'_s + \sum_{1}^{l}{}_s n_s H''_s$$

dove le λ_k, m_s, n_s soddisfano alle relazioni di pag. 17; ed andiamo a contare i parametri essenziali da cui dipende.

Per individuare una funzione come la w occorre dare i poli - il che porta $2l$ parametri (reali), i coefficienti λ_k, m_s, n_s $(k = 1 \dots \rho,\ s = 1 \dots l)$ che danno $\rho + 2l$ parametri - in tutto dunque $4l + \rho$ parametri (reali). Siccome poi, moltiplicando la detta somma per una costante reale, anche la w viene moltiplicata per la stessa costante - onde si può supporre (disponendo anche della costante reale additiva arbitraria) che il taglio sull' asse reale sia eseguito da 0 a 1 - ne segue che, supponendo senz'altro di aver fatto tale modificazione, i parametri si riducono a $4l + \rho - 1$.

Tali parametri però non sono tutti *essenziali*: infatti non si è per ora tenuto conto della prima condizione, cui deve soddisfare la w, la quale conduce alle relazioni di pag. 17. Supponendo che tali relazioni si riducano a sole $\rho + 2\sigma - k$ indipendenti, i parametri essenziali si riducono in definitiva a $4l - 2\sigma - 1 - k$.

Si può ora domandare se da altrettanti parametri dipenda la totalità delle riemanniane tagliate nel modo più volte descritto, su cui la A è rappresentabile. Evidentemente non può dipendere da un numero maggiore di parametri, ma non è escluso *a priori* che il numero dei parametri possa esser minore, che cioè infinite funzioni possano dare la stessa riemanniana tagliata.

Supponiamo che esistano due funzioni w e w_1 che rappresentino l' area A sulla stessa riemanniana tagliata. Siano ω, ω_1 le rappresentazioni conformi effettuate da w e w_1.

Consideriamo la corrispondenza $\omega\,\omega_1^{-1}$. Essa fa corrispondere a un punto P di A quel punto P_1, pure di A, per cui è

$$w(P) = w_1(P_1)$$

ed è evidentemente una *trasformazione conforme in sè* dell' area A.

Viceversa, ogni tale trasformazione dà origine a una funzione $w \ddagger w_1$, che rappresenta l'area A sulla stessa riemanniana tagliata.

Il prof. Cecioni in una sua Memoria ([33]) deduce dai risultati ivi conseguiti che:

Se $p > 1$, *ossia* $2\sigma + \rho > 1$, ([34]) *di trasformazioni conformi dell'area in sè, diverse dalla trasformazione identica, può esisterne solo un numero finito in altre parole.*

Solo le aree pseudosemplici ($\sigma = 0$) *e con uno o due contorni possono ammettere infinite trasformazioni conformi in sè.*

Possiamo qui supporre sempre $p \geq 3$; non considero infatti il caso delle aree pseudosemplici, che ha qui poco interesse, riconducendosi subito al caso delle aree piane.

Segue dunque da quanto è stato detto finora che nel caso generale considerato, il fatto che esistano due funzioni w e w_1 che rappresentano l'area A su una stessa riemanniana tagliata, non può presentarsi - se si presenta - altro che *un numero di volte*. Dunque:

Le Riemanniane tagliate $\overline{R}$ di un prefissato numero $l > \sigma$ di fogli corrispondenti a un'area A non pseudosemplici sono $\infty^{4l-1-2\sigma+k}$.

2. - Le semplici osservazioni seguenti dimostreranno ora che *le* $\rho + 2\sigma$ *relazioni lineari trovate a pag. 17 sono effettivamente indipendenti.*

La riemanniana tagliata, $\overline{R}$, ha, come si è visto, l fogli, è di genere σ ed è tagliata secondo $\rho + 1$ tagli paralleli, di cui uno può supporsi eseguito da 0 a 1: essa dipende dunque da $4(l + \sigma - 1) + 3\rho$ parametri reali indipendenti ([35]).

([33]) Cecioni, l. c. [4]), p. 81.

([34]) Cfr. § I, 4.

([35]) Infatti $w = 2(l + \sigma - 1)$ è il numero dei punti di diramazione di una superficie di Riemann come questa (Picard, l. c. [6]), pp. 376 o seg.) Il computo preciso si fa subito partendo dal tipo di Lüroth: una riemanniana di questo tipo (a l fogli, di genere σ) è formata da $l - 1$ fogli congiunti l'uno all'altro da *una sola* sezione di diramazione; il foglio $l - 1^{\text{esimo}}$ è congiunto all' l^{esimo} da $\sigma + 1$ sezioni di diramazione. Siccome poi ogni sezione di diramazione implica 2 punti di diramazione si ha

D' altra parte, ricordiamo i resultati del KLEIN secondo cui: Le classi di curve algebriche reali, di genere p, dipendono da $3p-3$ costanti reali se $p>1$, da 1 costante reale se $p=1$ (non mi servo del noto teorema di RIEMANN perchè esso è ottenuto dal punto di vista complesso). Il genere delle curve caratteristiche di A è $p=2\sigma+\rho$; è quindi, nel nostro caso, $p>1$ e $3p-3=3\rho+6\sigma-3$. Viene da quanto sopra, che le superficie di RIEMANN tagliate, corrispondenti a una determinata area A e aventi un prefissato numero l di fogli, sono precisamente

$$\infty^{4(l+\sigma-1)+3\rho-3p+3} = \infty^{4l+4\sigma-4+3\rho-3\rho-6\sigma+3} =$$
$$= \infty^{4l-1-2\sigma}.$$

Confrontando col resultato precedente, ottenuto ammettendo la *dipendenza* delle $\rho+2\sigma$ equazioni in questione – possiamo necessariamente concludere che deve essere $k=0$ – quindi le suddette $\rho+2\sigma$ relazioni sono effettivamente indipendenti e si può finalmente concludere:

Le Riemanniane tagliate di un prefissato numero $l\geq\sigma+1$ di fogli, corrispondenti nel modo visto a un'area A, non pseudosemplici, sono $\infty^{4l-1-2\sigma}$.

Nel caso di l minimo: $l=\sigma+1$ si ha subito: che le Riemanniane tagliate di $\sigma+1$ fogli corrispondenti nel modo visto a un' area A, sono $\infty^{2\sigma+3}$.

3. – **Osservazione** – Una riemanniana tagliata non dà un *campo normale* – tali campi devono dipendere esattamente da $3p-3$ costanti essenziali. Del resto non si ottiene un campo normale neppure nel caso delle aree piane, poichè ([36]) *la forma* di un piano tagliato secondo $\rho+1$ tagli paralleli, di cui uno da 0 a 1, dipende da 3ρ parametri indipendenti.

$$w = 2(l-2)+2(\sigma+1) = 2(l+\sigma-1).$$

È chiaro che le precedenti considerazioni sono applicabili anche nel caso in cui non si sia nel tipo di LÜROTH: infatti il numero delle costanti non può venire alterato dal fatto che alcuni dei punti di diramazione vengono a coincidere.

([36]) CECIONI, l. c. [9]).

VII.

Esistenza di trasformazioni conformi in sè di un'area pluriconnessa appartenente a una superficie di Riemann che mutano in sè ogni contorno - Applicazione alle curve algebriche reali.

1. - Per le aree piane (o pseudosemplici) con più di due contorni, è stato dimostrato ([37]) che *non esistono* trasformazioni conformi in sè di un'area che mutino in sè tutte le linee limiti – anzi di più, che non esistono di tali trasformazioni *che lascino ferme* **tre** *linee limiti.*

Nel caso delle aree appartenenti a una riemanniana, non pseudosemplici, esistono - necessariamente in numero finito - trasformazioni conformi dell'area A in sè, che mutino in sè tutte le linee limiti?

Supponiamo che un'area A ammetta una trasformazione conforme in sè che muti in sè tutte le linee limiti. Esistono allora due funzioni w e w_1 che rappresentano l'area data A su una stessa riemanniana R tagliata nel solito modo e tali da far corrispondere ambedue a L_0 il taglio da 0 a 1 e per di più da far corrispondere ad ogni altra linea limite il medesimo taglio (il numero l dei fogli di R **non** è, per ora, supposto $\geqq \sigma$).

La differenza $w - w_1$ è allora reale e finita sul contorno – le parti immaginarie si elidono infatti per differenza - monodroma - lo sono per definizione w e w_1 - ed ha solo singolarità polari nell'interno di A - che provengono evidentemente da quelle di w e di w_1 - soddisfa dunque alle condizioni che individuano le funzioni k ([38]). Le singolarità polari, per ciò che si è detto, sono tutte del primo ordine e in numero certo non superiore a $2\,l$ - la w e la w_1 hanno ciascuna l poli.

Esaminiamo la differenza $w - w_1$ su un contorno qualunque,

([37]) Koebe, l. c. [1]), § 5 e Cecioni, l. c. [9]), II, 5.
([38]) Cfr. nota [4]).

p. es. L_0, e dimostriamo che essa si annulla su L_0 almeno due volte. Possono presentarsi i segnenti casi:

I. - La differenza $w - w_1$ è identicamente nulla in ogni punto di L_0. In tal caso non vi sarebbe nulla da dire, essendo vero appunto quello che cerchiamo - la cosa è già dimostrata.

II. - La differenza $w - w_1$ assume valori > 0 e valori < 0. Allora, trattandosi di una funzione continua, deve passare necessariamente per il valore 0, *almeno due volte.*

III. - La differenza $w - w_1$ può essere sempre ≥ 0 (o sempre ≤ 0); osserviamo allora che $w - w_1$ sono, *ciascuna*, sempre ≥ 0 e ≤ 1 su L_0 - rappresentano infatti tale linea sul taglio da 0 a 1 della stessa riemanniana tagliata. Prendiamo allora il punto - e sia b - in cui $w(b) = 0$: allora dall'ipotesi $w - w_1 \geq 0$, verrebbe $w_1(b) \leq 0$, ma per ciò che ho sopra osservato non può essere $w_1 < 0$: quindi

$$w_1(b) = w(b).$$

Analogamente se a è il punto in cui $w_1(a) = 1$ un identico ragionamento porta a concludere

$$w(a) = w_1(a).$$

E non può essere $a = b$ perchè è $w(a) = 1$, $w(b) = 0$. Su L_0 dunque - e ciò può ripetersi per tutti i contorni che compaiono, in sostanza, in modo simmetrico vi sono almeno due punti in cui la funzione $K = w - w_1$ si annulla.

Dunque sul contorno completo dell'area A la k si annulla almeno $2(\rho + 1)$ volte (2 volte su ogni linea $L_0 \ldots\ldots L_\rho$).

Ricordiamo allora che ogni funzione K gode della proprietà espressa dalla formula ([39])

$$N_{kc} + N_{ki} = N_\infty$$

dove, $2 N_{kc}$ è il numero delle volte che la funzione prende un

([39]) Per $l = 1$, $\rho + 1 \leq 2$ (Cecioni, l. c. [9]), II, 5).

certo valore k sul contorno, N_{ki} il numero delle volte che lo prende nell'interno, N_∞ la somma degli ordini d'infinito. Nel caso attuale dunque

$$2N_{0e} \geq 2(\rho+1), \quad N_{0i} \geq 0, \quad N_\infty \leq 2l.$$

Ne segue la relazione

$$\rho + 1 \leq 2l \ ([40]).$$

Dunque se esistono trasformazioni conformi dell'area A in sè che mutino in sè ciascuno dei contorni, visto che la A è rappresentabile conformemente su una superficie di Riemann opportunamente tagliata, di genere σ, e con l fogli, necessariamente ha luogo la relazione

$$\rho + 1 \leq 2l.$$

Sappiamo poi che può supporsi $l = \sigma + 1$: ne viene allora

$$\rho + 1 \leq 2\sigma + 2, \tag{9}$$

ossia, introducendo il genere p delle curve caratteristiche dell'area

$$p = 2\sigma + \rho,$$

$$2\rho \leq p + 1. \tag{I}$$

Questa relazione esprime dunque una condizione *necessaria* per l'esistenza di *due* (o più) funzioni distinte w che effettuano una rappresentazione conforme che muta ogni contorno nel medesimo taglio, quindi *di trasformazioni conformi in sè dell'area A che lasciano fermi tutti i contorni.*

2. – Dimostriamo ora che, per ogni tipo di area – vale a dire per le aree per cui siano stati fissati ρ, σ e quindi p, essendo $p = 2\sigma + \rho$ – la condizione (I) è anche sufficiente, nel

([40]) Cfr. nota [26]).

senso che se ρ e p soddisfano alla (I) esistono *aree di quel tipo* che ammettono trasformzioni in sè che lasciano fermi tutti i contorni. Basterà per questo dimostrare che, presi ρ e σ in modo da soddisfare alla (9) (e del resto comunque) esiste un'area con $\rho + 1$ contorni e σ retrosezioni interne, che ammette una trasformazione conforme in sè che lascia fermi tutti i circuiti. Per ciò facciamo le considerazioni seguenti; esse sono, in parte dovute al prof. CECIONI, come pure le applicazioni geometriche del successivo n. 3.

Osservo intanto che, se W indica il numero dei punti di diramazione, (che supponiamo tutti del 1° ordine) di una superficie di RIEMANN, p il genere, l il numero dei fogli, vale la formula già altre volte adoperata

$$W = 2(l + p - 1),$$

e tale formula vale se da un foglio al successivo si passa con un numero qualunque di sezioni di diramazione, purchè i fogli siano *in catena* (41). Se allora unisco l fogli ciascuno al successivo con *due* sezioni di diramazione, ho una superficie di genere $p = l - 1$ - infatti $W = 4(l - 1)$ - e, allora la formula precedente dà

$$4(l - 1) = 2(l + p - 1),$$

ossia

$$2l - 2 = l + p - 1,$$

$$p = l - 1.$$

Ciò premesso, supponiamo dati due numeri p e ρ della stessa parità ($p > \rho$) e soddisfacenti alla (I) (è chiaro che se poniamo $2\sigma = p - \rho$, ρ e σ soddisfano anche alla (9)) e andiamo a costruire un'area, con $\rho + 1$ contorni e σ retrosezioni - che ammetta una trasformazione conforme in sè tale da lasciare fermi tutti i contorni. Perciò prendiamo $\sigma + 1$ fogli e uniamoli ciascuno al successivo con due sezioni di diramazione che si mutino

(41) PICARD, l. c. [6]), f. II, chap. XIII.

l' una nell'altra per una simmetria rispetto all'origine. Dotiamo la superficie così ottenuta di $\rho + 1$ contorni, nel modo seguente: asportiamo, da qualcuno dei fogli (eventualmente da tutti) un pezzo circolare col centro nell'origine che lasci all'esterno le sezioni di diramazione; asportiamo ugualmente, da qualcuno dei fogli (eventualmente da tutti) la parte esterna di una circonferenza col centro nell'origine che contenga all'interno le sezioni di diramazione.

Per poter far ciò dovrà essere

$$1 \leq \rho + 1 \leq 2(\sigma + 1)$$

il che appunto si verifica per ipotesi.

Il genere della superficie *(senza i contorni)* è, per quello che si è visto sopra, σ: σ sono dunque le retrosezioni. Con $\rho + 1$ contorni si ha dunque un'area *A del tipo voluto.*

Ora si vede subito appunto che questa area ammette una trasformazione conforme in sè che lascia fermi tutti i contorni: tale trasformazione non è altro che *una rotazione di 180° attorno all'origine.* Dunque è dimostrato quello che volevamo.

3. – Applichiamo alla teoria delle curve algebriche questo risultato.

Sia C una curva algebrica reale, presentante il caso ortosimmetrico, di genere p, con $\rho + 1$ circuiti reali; *se è*

$$\text{(I')} \qquad \rho + 1 > \frac{p+3}{2}$$

la C non ammette alcuna trasformazione birazionale in sè che muti in sè ciascuno dei circuiti reali conservandone il verso (tranne l'identità).

Sia infatti Σ la riemanniana ortosimmetrica, corrispondente a C, e siano Σ_1 Σ_2 le due parti nelle quali Σ è divisa dalle $\rho + 1$ linee di coincidenza della corrispondente simmetria. Se C ammette una trasformazione birazionale Ω in sè, che muta in sè ciascuno dei circuiti reali, questa Ω, interpretata su Σ, diviene una trasformazione conforme di Σ in sè, che muta in sè ciascuna delle dette linee di coincidenza; la Ω trasforma quindi Σ_1 in Σ_1 e Σ_2 in Σ_2, oppure scambia Σ_1 con Σ_2. Ma se Ω inoltre conserva il verso dei circuiti reali e quindi delle linee di coincidenza, ciò significa che trasforma in sè Σ_1 (e in sè Σ_2). Allora Σ_1, ad es., è un'area A, appartenente alla riemanniana Σ, per la quale si ha $\sigma = \frac{p-\rho}{2}$, e quindi per la (I')

$$\rho + 1 > 2\sigma + 2 ;$$

perciò, pel n. 1, Σ_1 non può ammettere trasformazioni conformi in sè che mutino in sè tutti i contorni. La Ω è dunque l'identità, e l'enunciato è dimostrato.

Se invece si ha la relazione

$$\text{(II)} \qquad \rho + 1 \leq \frac{p+3}{2}$$

esistono curve algebriche, (reali, ortosimmetriche) di genere p con $\rho + 1$ circuiti reali, che ammettono trasformazioni birazionali in sè che mutano in sè ciascuno dei circuiti reali conservandone il verso. Tali sono, come facilmente si vede, le curve caratteristiche delle aree di cui al precedente n. 2.

Ritorniamo a supporre verificata la disuguaglianza (I')

$$\rho + 1 > \frac{p+3}{2}$$

e supponiamo inoltre che la curva C ammetta una trasformazione birazionale γ in sè che muta in sè ciascuno dei circuiti reali; la γ dovrà invertire il verso su ciascuno dei circuiti, e *sarà involutoria;* infatti γ^2 muta in sè ciascuno dei circuiti reali conservandone il verso, ed è quindi l'identità.