REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

HARALD CRAMER

# Probabilité mathématique et inférence statistique. Quelques souvenirs personnels sur une importante étape du progrès scientifique

*Revue de statistique appliquée*, tome 31, nº 3 (1983), p. 5-15
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1983__31_3_5_0>

# PROBABILITE MATHEMATIQUE ET INFERENCE STATISTIQUE

## Quelques souvenirs personnels sur une importante étape du progrès scientifique (1)

HARALD CRAMER

*Traduit par A. VESSEREAU*

RESUME

Dans cet article je présente quelques souvenirs personnels du développement de la théorie de la probabilité mathématique et ses applications à l'inférence statistique pendant les vingt années entre les deux guerres mondiales, précédés et suivis de quelques notes sommaires sur le développement avant 1920 et après 1940.

SUMMARY

The paper gives some personal recollections of the development of mathematical probability theory and its applications to statistical inference during the twenty years between the two world Wars, preceded and followed by some brief notes on the development before 1920 and after 1940.

## I. INTRODUCTION

C'est pour moi un grand honneur d'avoir été invité à faire cet exposé dans le cadre du troisième "Pfizer Colloquium", et je suis très touché des paroles de bienvenue extrêmement aimables qu'il m'a été donné d'entendre. Je suis heureux d'avoir eu cette occasion de revenir à l'Université du Connecticut, dont j'ai gardé un si agréable souvenir.

Je me propose d'évoquer quelques souvenirs personnels touchant deux domaines scientifiques importants : la théorie purement mathématique des probabilités et la méthodologie de l'inférence statistique. Bien qu'intimement et nécessairement liés, ils ont progressé parfois de façon plus ou moins indépendante, parfois en étroite liaison. On peut trouver des exemples de ces deux types de démarches au cours du développement intense qui se produisit dans les 20 années entre les deux guerres mondiales, et qui aboutit à une complète transformation dans ces domaines scientifiques.

---

(1) Cet article est une traduction de l'article "Mathematical Probability and Statistical Inference: Some personal recollections from an important phase of scientific development", paru dans la Revue Internationale de Statistique (Vol. 49, n° 3, pp. 309-317, 1981). Il correspond à la conférence donnée le 12 mai 1980 par le célèbre statisticien suédois H. CRAMER lors du troisième "Pfizer Colloquium" organisé par le département de statistique de l'Université du Connecticut. Nous remercions vivement le Professeur H. CRAMER de nous avoir donné l'autorisation de publier la traduction de cet article, ainsi que l'Editeur de la Revue Internationale de Statistique.



*Mots-Clés* : **Théorème central limite ; Régions de confiance ; Probabilité fiduciaire ; Fondements du calcul des probabilités ; Estimation statistique ; Processus stochastique.**

La plus grande partie de mon exposé sera consacrée à quelques souvenirs sur cette période de 20 ans ; j'ajouterai quelques remarques diverses sur la période qui suivit. Je parlerai d'un point de vue strictement personnel, donnant mes impressions sur les évènements qui suscitèrent mon intérêt, tels que je me les rappelle aujourd'hui, bien des années après.

Je commencerai par un bref panorama du développement qui intervint, jusqu'à la fin de la première guerre mondiale, dans les deux domaines que j'ai évoqués tout à l'heure.

## 2. LA THEORIE DES PROBABILITES AVANT 1920

La première tentative d'utiliser ce que nous appelons maintenant la "mathématique des probabilités" pour prédire les valeurs de fréquences statistiques a pour origine, comme chacun sait, le "problème des joueurs". Ceux-ci avaient constaté, à leurs dépens, que l'expérience pratique était en désaccord avec leur "calcul des chances". Il est bien connu que l'un de ces joueurs malchanceux consulta Blaise PASCAL, à Paris, vers les années 1650, et que ce fut le point de départ d'une étude scientifique des probabilités qui, très rapidement, suscita un vif intérêt.

James BERNOULLI, de la célèbre famille de mathématiciens suisses, fit un exposé de cette nouvelle théorie dans son ouvrage posthume de 1713 : "Ars Conjectandi" ou "The Art of Conjecture". Il est intéressant de rappeler qu'en réalité, les termes qu'il utilisa étaient "Ars Conjectandi sive Stochastica", et je crois que c'est la première fois qu'apparaît le terme "stochastique" qui, depuis lors, a été très généralement utilisé. Dans son remarquable ouvrage, BERNOULLI expose la théorie mathématique, jusqu'au point de développement qu'elle avait alors atteint, et fait observer qu'il est possible de l'appliquer à des questions diverses, non seulement dans le domaine des jeux, mais aussi en sciences sociales, en économie et en météorologie. Il y démontre son théorème bien connu qui, à partir d'une probabilité connue, permet de prédire une valeur approchée d'une fréquence statistique, et inversement, à partir d'une fréquence observée, d'obtenir une estimation de la probabilité correspondante. Il est bon, je crois, de rappeler que James BERNOULLI a été le premier à voir la possibilité d'utiliser la théorie des probabilités comme outil permettant des inférences solidement fondées à partir de données statistiques.

C'est en 1812, presque exactement cent années après "Ars Conjectandi", que fut publié le célèbre ouvrage de LAPLACE : "Théorie Analytique des Probabilités". Celui-ci couvre un large domaine, à la fois en théorie mathématique et en applications statistiques, et sa lecture reste encore stimulante ; il est cependant regrettable qu'il manque souvent de rigueur mathématique, et il est surprenant qu'on n'y trouve aucune discussion sur le bien fondé des applications de la théorie mathématique. Pour LAPLACE, la définition de la probabilité basée sur le concept des "cas également possibles", qui convient aux jeux de pur hasard, était de toute évidence applicable en tout domaine. En outre, la principale contribution théorique de LAPLACE, la proposition très importante connue en théorie probabiliste sous le nom de "théorème central limite" n'est qu'incomplètement démontrée.

Durant une partie de sa carrière, LAPLACE fut l'un des ministres de l'empereur Napoléon, qui par la suite lui fit la critique d'avoir introduit "l'esprit des infiniment petits" dans la pratique administrative.

Néanmoins, les travaux de LAPLACE furent le point de départ de la plupart des recherches en probabilité et en statistique pendant tout le siècle qui suivit la publication de la "Théorie Analytique". Je ne dirai ici que quelques mots des deux principales lignes de recherche suivies au cours de cette époque, et qui se révèlèrent particulièrement importantes pour les développements ultérieurs. Je parlerai en premier lieu des travaux sur le théorème central limite énoncé par LAPLACE, et ensuite de la discussion sur les fondements de la théorie des probabilités.

Les mathématiciens du dix-neuvième siècle étaient très conscients que le théorème central limite énoncé par LAPLACE n'avait pas reçu une démonstration rigoureuse, et qu'il serait de la plus grande importance d'en établir une. Après un grand nombre de tentatives infructueuses, c'est finalement en 1901 que le mathématicien russe LIAPOUNOV réussit à donner une démonstration complète, rigoureuse sous certaines conditions. LIAPOUNOV utilisa l'important outil analytique connu aujourd'hui sous le nom de "fonction caractéristique d'une distribution de probabilités", mais son travail resta pendant quelque temps à peu près ignoré ; ce n'est que beaucoup plus tard, vers les années 1920, que d'autres recherches sur le même sujet furent entreprises.

D'un autre côté, les fondements de la théorie des probabilités furent longuement discutés par mathématiciens, statisticiens et philosophes, et ils demeurent un sujet fortement controversé. Certains philosophes s'efforcèrent de donner une signification claire à la notion des "cas également possibles" sur laquelle LAPLACE avait fondé sa définition générale, mais ils n'obtinrent aucun résultat convaincant. Estimant que cette direction de recherche aboutissait à une impasse, d'autres auteurs s'efforcèrent de trouver une définition radicalement différente, basée sur la stabilité des fréquences statistiques empiriquement observées dans une longue série. La tentative la plus élaborée dans cette direction est celles de VON MISES, un mathématicien allemand, qui plus tard travailla aux U.S.A.. VON MISES fonda sa théorie sur deux axiomes concernant le comportement limite des fréquences statistiques dans une séquence illimitée d'épreuves. Il eut des partisans enthousiastes, mais aussi de sévères critiques. Parmi ces derniers, je dois notamment signaler le célèbre probabiliste français Paul LEVY qui écrivit, dans son autobiographie rétrospective de 1970, qu'il est aussi impossible d'obtenir dans cette voie une définition satisfaisante de la probabilité, que de résoudre la quadrature du cercle.

## 3. UNE DECADE DE PREPARATION

Les travaux de VON MISES parurent en 1919, au seuil d'une nouvelle ère de la théorie des probabilités. J'étais alors jeune, étudiant cette théorie et ses applications, et naturellement, ils suscitèrent de ma part un vif intérêt.

Bien que personnellement très critique à l'égard de son axiomatique, je trouvais dans les travaux de VON MISES l'énoncé d'un principe auquel j'agréais de tout cœur et auquel j'agrée encore. A savoir que la théorie des probabilités devrait être "une science naturelle, de même nature que la géométrie ou la mécanique théorique" ("a natural science of the same kind as geometry or theoretical mechanics"), ayant pour objet de décrire certains phénomènes observables, liés à des expériences aléatoires, non pas exactement mais avec un certain degré d'abstraction et d'idéalisation ("not exactly, but with some abstraction and idealization"). Il me semblait naturel d'exprimer ce point de vue en disant que la théorie des probabilités devrait être considérée comme un modèle mathématique de cette classe de phénomènes. Cependant, je pensais que VON MISES n'avait pas dans l'élaboration de son système, été jusqu'au bout de ses conséquences. Ce fut plus tard l'œuvre de KOLMOGOROV, dont l'aboutissement fut une formalisation stricte de la théorie des probabilités, sur laquelle je reviendrai tout à l'heure.

Durant les années 1920, je suivis avec un vif intérêt le nouveau et puissant progrès international de la théorie mathématique des probabilités, et je vais maintenant donner quelques souvenirs couvrant cette période. Ce ne fut qu'un peu plus tard, vers 1930, que je me trouvai activement engagé dans les applications de l'inférence statistique.

Dans un article paru en 1920, Georges POLYA, qui travaillait alors en Suisse –plus tard en Californie– introduisit l'expression "théorème central limite de la théorie des probabilités", qui depuis a été universellement adoptée. Rappelant les travaux de LIAPOUNOV, il discuta de ses relations avec d'autres branches de l'analyse mathématique. Peu après, en 1922, le mathématicien finlandais J.W. LINDBERG, appliquant une nouvelle méthode, montra la validité du théorème central limite sous des conditions plus générales que celles énoncées par LIAPOUNOV. La condition de LINDBERG joua plus tard un rôle important dans les recherches entreprises pour trouver des conditions qui soient à la fois nécessaires et suffisantes.

Comme chacun sait, le théorème central limite établit que, sous certaines conditions, la distribution de probabilité d'une somme convenablement normalisée de variables aléatoires indépendantes, tend vers la distribution normale –ou de LAPLACE-GAUSS– lorsque le nombre de termes augmente indéfiniment. LIAPOUNOV avait donné une limite supérieure de l'erreur commise lorsque, pour un nombre fini de termes, on remplace la distribution réelle par la distribution limite. Cette erreur limite était excessive dans les applications à la théorie du risque en assurance, à laquelle je m'intéressais alors, et je me demandais s'il ne serait pas possible d'obtenir une approximation meilleure en considérant la distribution normale comme le premier terme de quelque développement asymptotique. Dans deux articles parus en 1925 et 1928, je démontrai que le développement connu sous le nom de "Séries d'Edgeworth", étudié par EDGEWORTH de façon purement formelle, possédait effectivement les propriétés asymptotiques que je recherchais. J'obtins ce résultat par la méthode des fonctions caractéristiques, utilisée précédemment par LIAPOUNOV.

Dans un article remarquable daté de 1927, le mathématicien russe S.N. BERNSTEIN discuta de l'extension du théorème central limite à la somme de variables aléatoires non nécessairement indépendantes. La méthode qu'il introduisit à propos de ce problème conduisit par la suite à d'importants résultats.

Vers la même époque, le mathématicien français Paul LEVY publia le premier de ses très importants travaux sur la théorie des probabilités. C'est dans son "Calcul des probabilités" (1925), que l'on trouve pour la première fois le traitement systématique des variables aléatoires, de leur distribution de probabilité, et de leurs fonctions caractéristiques. Cet ouvrage inaugure le transfert de la théorie des probabilités, d'une collection d'exemples plus ou moins illustratifs, vers une théorie mathématique importante qui lui est liée, transfert qui fut ensuite rapidement et définitivement achevé.

Dans la dernière partie de la décade 1920, il devint évident qu'un nouveau et puissant développement de la théorie des probabilités était en train de naître en

Union Soviétique. J'ai cité les travaux de BERNSTEIN. Les deux grands mathématiciens A.Y. KHINTCHINE et A.N. KOLMOGOROV, encore très jeunes en 1920, avaient déjà commencé leurs travaux, bien que leurs principales contributions datent des années 1930. En 1925, dans un article commun, ils démontrèrent le fameux "théorème des trois séries", donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de séries dont les termes sont des variables indépendantes. La probabilité pour que de telles séries convergent ne peut être que 0 ou 1, ce qui constitue un cas particulier de la "loi de zéro ou un" découverte à la même époque. En 1929, KOLMOGOROV démontra la loi maintenant bien connue dite "loi du logarithme itéré", précédemment découverte par KHINTCHINE dans le cas particulier où les variables aléatoires sont simplement les chiffres d'une fraction dyadique ou décimale. Après avoir été considéré comme relevant de la pure théorie de la mesure, la généralisation de ce résultat par KOLMOGOROV prépara la voie à une identification entre probabilité et mesure, laquelle aboutit rapidement.

## 4. LE PASSAGE DES ANNEES 1930

En jetant un regard en arrière sur la genèse de cette nouvelle théorie des probabilités, il me paraît maintenant évident qu'elle s'imposa vraiment lors de la publication en 1933 de l'ouvrage de KOLMOGOROV : "Grundegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Dans celui-ci l'auteur pose les fondements axiomatiques d'une théorie abstraite, destinée à servir de modèle mathématique d'éventualités observables lors d'expériences aléatoirement répétées. Le concept fondamental de cette nouvelle théorie est le concept maintenant familier d'espace de probabilité $(\Omega , A , P)$, où $\Omega$ est un espace de points $\omega$ appelés événements élémentaires. D'autre part, A est une $\sigma$ algèbre d'ensembles S dans $\Omega$, qui sont les représentations conceptuelles d'événements observables, tandis que P est une mesure de probabilité définie pour tous les ensembles appartenant à A. Le concept de variable aléatoire $x = x(\omega)$ est introduit, d'une manière qui nous est maintenant familière mais qui en 1933 constituait une radicale innovation, comme une fonction A –mesurable de l'évènement élémentaire $\omega$. Toute la théorie des variables aléatoires et des distributions de probabilité est construite sur cette base. Le concept de probabilité conditionnelle est traité d'une manière entièrement nouvelle. L'ouvrage publié en 1933 par KOLMOGOROV reste encore un des documents de base de la théorie moderne des probabilités.

Alors que ces nouvelles idées faisaient leur apparition, je venais d'être nommé premier titulaire d'une chaire d'Actuariat Mathématique et de Statistique Mathématique à l'Université de Stockholm. Je travaillais avec un petit groupe d'étudiants ambitieux et intelligents, et nous suivions avec un vif intérêt les développements qui se produisaient autre part. WILL FELLER, qui avait été chassé par les nazis d'une chaire d'université allemande, vint se joindre à nous en 1934 et resta à Stockholm pendant cinq ans, apportant des contributions de grande valeur à nos travaux, avant de nous quitter en 1939 pour poursuivre sa carrière renommée aux U.S.A..

Durant la première partie de la décade 1930, nous nous sommes surtout intéressés dans notre groupe aux travaux probabilistes des mathématiciens français et russes. La théorie des fonctions caractéristiques nous paraissait ouvrir un vaste champ de possibilités nouvelles. L'addition de variables aléatoires indépendantes correspond à la multiplication de leurs fonctions caractéristiques, et il était naturel de considérer la distribution de probabilité d'une somme comme le produit symbolique des facteurs constitutifs des distributions composantes. Une distribution de probabilité qui peut être représentée comme produit symbolique d'un nombre quelconque de facteurs mutuellement identiques est dite infiniment divisible. La distribution normale, la distribution de POISSON et les distributions stables appartiennent à cette classe, qui a été spécialement étudiée par LEVY et KHINTCHINE. Dans un admirable article de 1934, LEVY donne une expression générale de la fonction caractéristique d'une distribution infiniment divisible. Il conjecture à cette occasion que tout facteur d'une distribution normale doit lui-même être normal, écrivant qu'il considère cela comme très probable, mais qu'il n'a pas été en mesure de le démontrer. J'ai eu l'heureuse chance de trouver une démonstration basée sur les propriétés des fonctions caractéristiques, et, quelque temps après, RAIKOV, en Union Soviétique, démontra que la distribution de POISSON jouissait de la même propriété.

Les conditions de validité du théorème central limite énoncées par LIAPOUNOV et LINDBERG furent généralisées par LEVY, KINTCHINE et FELLER, travaillant en étroit contact. Ce fut FELLER qui, le premier, découvrit les conditions à la fois nécessaires et suffisantes ; ses travaux et leur publication datent de son séjour à Stockholm. Dans ma brochure de Cambridge "Random Variables and Probability Distributions" (1937), je résumai les travaux de notre groupe de Stockholm, en les fondant sur les axiomes de KOLMOGOROV. Les principales parties de ce petit ouvrage concernent la théorie des distributions de probabilité et des fonctions caractéristiques, et son application au théorème central limite et à ses développements asymptotiques.

Un autre pôle d'intérêt de notre groupe de Stockholm dans les années 1930 fut la théorie et les applications des processus stochastiques, un sujet tout à fait nouveau à cette époque. Dans un remarquable article de 1923, Norbert WIENER avait donné une déduction rigoureuse du modèle probabiliste du mouvement moléculaire brownien introduit par EINSTEIN. Mais cet article était très difficile à lire, et nous n'en avions pas vu la signification jusqu'à ce que le grand ouvrage de KOLMOGOROV nous eut tracé la voie. En 1931, KOLMOGOROV étudia la classe de processus connus maintenant sous le nom de markoviens, dont le processus de mouvement brownien est un cas particulier. Il introduisit les équations différentielles qui, sous des conditions de continuité appropriées, déterminent leurs distributions de probabilité. Un peut plus tard FELLER compléta ce travail sous des conditions plus générales, où les relations de base sont du type intégro-différentiel. D'autres membres de notre groupe s'intéressèrent à la catégorie particulière des processus markoviens connue sous le nom de processus à accroissements indépendants, qui sont étroitement liés aux distributions infiniment divisibles, et qui ont d'importantes applications dans la théorie des risques en assurance.

Un processus markovien intervient lorsqu'une variable aléatoire évolue dans le temps de telle façon qu'à tout instant ses propriétés probabilistes futures sont complétement déterminées par son état présent, son histoire passée n'intervenant pas. En 1934, dans un article fondamental, KHINTCHINE fit observer que cette hypothèse n'est pas valable dans beaucoup d'applications importantes telles que celles qui se présentent en météorologie, en économie et en sociologie, où l'on doit tenir compte de tout l'historique du processus. Comme modèle probabiliste adapté à ces situations, il introduisit la classe de processus actuellement appelés "stationnaires", où les distributions de probabilité sous-jacentes sont plus ou moins invariantes par une translation dans le temps. Il donna une représentation de la fonction d'autocorrélation d'un tel processus par une intégrale de FOURIER-STIELTJES, et un peu plus tard je donnai la représentation de la variable aléatoire elle-même associée au processus par une intégrale stochastique du même type. Dans sa thèse de 1938, HERMAN WOLD, à cette époque l'un de mes étudiants, traita de la classe des séries temporelles stationnaires, et démontra pour celles-ci un théorème de décomposition, largement étendu par la suite à toute une classe de processus stochastiques.

C'est au cours de ces années, vers le milieu de la décade 1930, que je commençai à m'intéresser de près aux travaux des statisticiens britanniques et américains. Naturellement, j'avais déjà depuis longtemps pris connaissance de la littérature sur les courbes de fréquence, la corrélation et la régression, associée aux noms de Karl PEARSON, G.U. YULE et autres. Mais j'avais la ferme –et sans doute quelque peut excessive– impression que tout cela était bien superficiel et sans grand intérêt. Les premiers travaux de R.A. FISHER, vers les années 1920, étaient de nature toute différente. Ils avaient clairement pour but de permettre des inférences irréfutables à partir de données statistiques ; et ils étaient toujours intéressants et stimulants, même dans les cas où je n'étais pas d'accord avec l'auteur. Les travaux de FISHER sur les distributions de probabilité multidimensionnelles, l'estimation statistique et l'emploi de la méthode du maximum de vraisemblance me firent une grande impression. Mais FISHER utilisait une théorie des probabilités qui manquait encore de bases rigoureuses, et il admit lui-même que certains résultats de son admirable article de 1925 sur l'estimation statistique n'étaient pas encore complètement démontrés. Naturellement cela m'incita à aller plus loin et à rechercher, chaque fois que possible, des démonstrations.

Au début de la décade 1930, il devint évident que la situation concernant les "statistiques britanniques" était extrêmement controversée, pour ne pas dire plus. FISHER critiquait vivement l'emploi du célèbre théorème de BAYES pour l'estimation du paramètre inconnu d'une distribution de probabilité, et lui opposait sa propre méthode du maximum de vraisemblance. Bien que mettant l'accent sur la différence entre les concepts de probabilité et de vraisemblance, il considérait cependant –d'une façon quelque peu surprenante selon moi– ces deux concepts comme des mesures alternatives d'une connaissance rationnelle ("alternative measures of rational belief"). Et il affirmait qu'à partir d'un échantillon statistique connu, il est possible d'exprimer notre connaissance incomplète de la population en terme de vraisemblance ("express our incomplete knowledge of the population in terms of likelihood"), et de porter un jugement probabiliste définitif sur le paramètre inconnu ("a definite probability statement about the unknown parameter"). Il s'agit là de la fameuse "distribution fiduciaire" du paramètre en cause.

Je considérai comme tout à fait impossible de suivre FISHER dans cette nouvelle voie, qui me semblait basée sur un véritable dérapage mathématique. Dans certaines applications, il est légitime de considérer la valeur d'un paramètre inconnu comme déterminée par une expérience aléatoire, et la méthode de BAYES est alors clairement applicable. Mais dans d'autres cas –et je crois que c'est la majorité– le paramètre est simplement une constante ayant une valeur fixée mais inconnue, et la déduction fisherienne d'une distribution fiduciaire est en évidente contradiction avec la théorie moderne des probabilités.

A cette époque, vers le milieu des années 1930, Jerzy NEYMAN travaillait encore en Angleterre. Il avait été élevé dans l'atmosphère des traditions mathématiques polonaises, et il mettait au point une méthode d'estimation statistique par intervalles de confiance, ou plus généralement par régions de confiance, basée sur ce qu'il appelait la "théorie classique modernisée" ("modernized classical probability theory"). Ses travaux furent vivement critiqués par FISHER. Je suivais la discussion dans les publications de la Royal Statistical Society et ailleurs, et il me parut très vite évident que l'argumentation fiduciaire de FISCHER était erronée et que, dûment corrigée, elle conduirait à quelqueschose de très voisin de la théorie de NEYMAN. FISHER manifesta aussi une vive opposition aux travaux conjoints de NEYMAN et Egon PEARSON sur le test des hypothèses statistiques qu'ils avaient entrepris à cette époque. Un peu plus tard (1939) lorsque l'exposé complet de NEYMAN tomba entre mes mains, je me suis rallié totalement à cette très importante théorie, qui fut ensuite complétée d'une manière très remarquable, ainsi que cela est exposé dans l'ouvrage remarquable et bien connu d'Erich LEHMANN.

Ma brochure de Cambridge, et la démonstration que j'avais donnée de la conjecture de LEVY, me valurent quelques invitations à faire des exposés en différents lieux, et je fus heureux de saisir cette occasion de rencontrer quelques uns des auteurs dont j'avais suivi les travaux avec un très grand intérêt. Au printemps 1937, je fus invité à Paris, pour donner quelques conférences à la Sorbonne. Des probabilistes français, je connaissais FRECHET de longue date, depuis le premier congrès international de mathématique auquel j'avais assisté en 1920. Cette fois je rencontrai Paul LEVY et quelques membres de la plus jeune génération, DUGUE, FORTET et LOEVE. Il me parut évident que LEVY avait été l'un des chefs de file dans le développement de la théorie des probabilités –son important ouvrage "Théorie de l'addition des variables aléatoires" venait juste d'être publié.

Un peu plus tard, dans la même année 1937, se tint à Genève une conférence sur les probabilités et la statistique mathématique, et ce fut pour moi tout à fait passionnant de rencontrer un grand nombre de personnalités scientifiques renommées. Malheureusement, nos collègues russes, qui avaient accepté l'invitation, ne furent pas en mesure d'être présents –ce qui s'est souvent produit par la suite–. FELLER et moi-même vinrent de Stockholm ; personnellement il m'intéressait surtout de rencontrer NEYMAN, qui était venu exposer sa nouvelle méthode d'estimation par régions de confiance. Au milieu de sa conférence, il fut interrompu par deux contradicteurs, FRECHET et LEVY. Comme je présidais la réunion, je dus faire appel à ma connaissance assez mince de la langue française pour les calmer, et permettre à NEYMAN de terminer son exposé. J'avais déjà lu son article magistral dans les Proceedings of the Royal Society, et j'avais la conviction que ses idées étaient saines ; je crois que par la suite, ses contradicteurs français arrivèrent à la même conclusion.

Vers la fin de 1938, ayant été invité à Londres, je fus reçu par quelques uns de mes vieux amis actuaires et je rencontrai pour la première fois FISHER et Egon PEARSON. NEYMAN se trouvait déjà en Californie. Je fis un bref exposé de mes travaux en probabilité, prenant soin d'éviter les thèses controversées de l'inférence statistique. C'était peu après les accords de Munich, et la question de paix ou de guerre était dans l'esprit de tous. Durant l'été 1939, à peine un mois avant le début de la guerre, il y eut à nouveau une conférence à Genève, cette fois sur l'application des probabilités. FISHER était présent ; je me souviens lui avoir dit quelques mots de compliment sur son intuition géométrique dans le traitement des distributions multidimensionnelles, et d'avoir reçu une réplique quelque peu acide : "I am sometimes accused of intuition as a crime" (je suis parfois accusé d'intuition comme d'un crime). Je fis la connaissance de Sam WILKS et de Maurice BARTLETT. Nous eûmes juste le temps de regagner la Suède avant que les nazis attaquent la Pologne, déclenchant la deuxième guerre mondiale.

## 5. LES ANNEES DE GUERRE

Durant les années de guerre nous étions en Suède complètement isolés. Nous étions entourés par la guerre : le Danemark et la Norvège étaient occupés par les nazis, la Finlande était en guerre avec la Russie. A Stockholm, dans notre petit groupe de probabilistes,nous essayions de continuer à travailler, mais il était presque impossible d'avoir accès aux publications scientifiques étrangères. Dans cette situation d'isolement et d'insécurité, je décidai de reprendre un ancien projet d'écrire un nouvel ouvrage.

Dans les années qui avaient précédé la guerre, j'avais eu le sentiment que statisticiens anglo-saxons et statisticiens du continent travaillaient sans un contact réciproque suffisant, et qu'il pourrait être utile d'essayer de faire la liaison entre leurs lignes de recherche. Dès 1937 j'étais déjà avancé dans mon intention d'écrire un ouvrage sur les méthodes statistiques modernes, basé sur la théorie mathématique des probabilités. Un éditeur scientifique allemand s'y était intéressé, et j'ai encore le projet de table des matières pour un livre écrit en langue allemande. Mais en raison de mes sentiments profondément anti-nazis je répugnais à publier en Allemagne ; je renonçai à mon projet : seule la table des matières a été écrite...

En 1942, alors que la fin de la guerre semblait bien lointaine, je repris une nouvelle fois ce vieux projet et commençai à écrire un livre en langue anglaise. Dès l'été 1945, le manuscrit était prêt à imprimer sous le titre de "Mathematical methods of Statistics". L'ouvrage fut publié conjointement par les éditeurs suédois ALMQUIST et NIKSELL, et Princeton University Press. Il contenait trois parties : une introduction purement mathématique, une théorie des variables aléatoires et de leurs distributions de probabilité, puis l'application à l'inférence statistique. Il était dédié à ma femme Martha qui, comme toujours, m'avait aidé et encouragé au cours de mon travail. Tandis que je l'écrivais, je lui disais parfois mon souhait que ce livre soit ma carte d'entrée dans le nouveau monde d'après-guerre. Et sans aucun doute il nous a valu de chères amitiés dans beaucoup de pays.

J'ai souvent regretté de n'avoir pas donné dans la partie probabiliste de cet ouvrage la théorie complète de KOLMOGOROV, me limitant aux distributions dans des espaces euclidiens finis. Cela le rend peut-être plus facile à lire ; par contre il devenait impossible d'y inclure une discussion satisfaisante sur la convergence des suites de variables aléatoires, et d'aborder les processus stochastiques. Dans la partie consacrée à l'inférence statistique, j'ai essayé d'exposer de façon systématique les travaux de FISHER sur les distributions d'échantillonnage et l'estimation statistique, et j'ai donné des démonstrations rigoureuses de ses résultats, en les complétant sur certains points. J'ai consacré un chapitre aux régions de confiance de NEYMAN, en essayant de les rendre claires au lecteur, sans trop insister sur le fait que j'avais pris le parti de NEYMAN dans la controverse sur la probabilité fiduciaire de FISHER. J'ai aussi donné un aperçu de la théorie de NEYMAN-PEARSON, m'apercevant après coup que j'aurais dû traiter plus complètement cet important sujet.

Mes ouvrages, et mes travaux sur les processus stochastiques, sont l'aboutissement de ce que j'avais appris dans les 20 années de l'entre-deux guerres. Au cours de cette période est intervenue une modification radicale de structure dans la théorie mathématique des probabilités et de ses applications à l'inférence statistique. J'ai essayé de vous donner quelques souvenirs personnels sur cet important sujet. Je vais maintenant terminer par quelques commentaires sur les développements qui suivirent.

## 6. NOTE SUR LES DEVELOPPEMENTS ULTERIEURS

Durant les années de guerre, l'importance d'une méthodologie statistique très élaborée en vue des applications industrielles et militaires était devenue de plus en plus évidente. Les mathématiciens et les statisticiens des pays en guerre s'étaient appliqués à perfectionner les méthodes et leurs applications. Lorsqu'après la guerre, quelques uns des résultats obtenus furent connus, il apparut que les problèmes de contrôle du tir anti-aérien et de radar, avaient fait l'objet de travaux de recherche très importants. La théorie des processus stochastiques stationnaires, dont j'ai parlé tout à l'heure, avait à cet égard fourni un outil efficace. Indépendamment l'un de l'autre, KOLMOGOGOROV à Moscou et Norbert WIENER au Massachussetts Institute of Technology avaient effectué d'importants travaux sur ce sujet.

Dans deux notes, courtes mais extrêmement importantes, publiées pendant la guerre, KOLMOGOROV avait fait observer que la théorie mathématique de l'espace de HILBERT pouvait être appliquée avec succès à l'étude des variables aléatoires et des processus stochastiques stationnaires. Peu après la guerre, ce travail fit l'objet de nouveaux développements de la part de quelques uns de ses étudiants et du mathématicien finlandais Karl KARHUNEN, qui, pendant quelques temps, travailla dans notre groupe de probabilistes de Stockholm. Il exerça une profonde influence sur le développement de la théorie et des applications des processus stochastiques, stationnaires ou autres. Un autre travail important dans cette voie fut en 1950 la thèse "Stochastic Processes and Statistical Inference" de Ulf GRENANDER, à cette époque membre de notre groupe de Stockholm, plus tard mon successeur comme Professeur à l'Université de Stockholm et maintenant, comme chacun le sait, à l'Université Brown où il poursuit ses travaux de recherche d'une façon remarquable.

Au cours d'une visite à Paris, au printemps 1946, j'eus le plaisir de revoir quelques uns de mes vieux amis. LEVY avait eu son apppartement saccagé par les nazis, qui avaient détruit ses livres et ses notes, mais il avait déjà entrepris un nouveau travail sur les processus stochastiques, qui apporta d'importants résultats. Dans une de mes conférences à Paris, j'avais à parler de l'estimation statistique, et j'avais projeté de dire quelques mots sur la question controversée des intervalles de confiance et de la probabilité fiduciaire. Il me fut quelque peu désagréable d'apprendre que FISHER était à Paris et assistait à ma conférence. Je m'attendais à quelques commentaires désagréables, mais, à la fin de mon exposé, il me dit qu'il ne connaissait pas suffisamment le français pour avoir bien compris ce que je disais, et qu'il souhaitait un entretien particulier. Celui-ci eut lieu le même soir et se termina tout à fait bien, bien que je ne cachai pas mon opinion.

En 1946, je me rendis pour la première fois aux Etats-Unis où je rencontrai quelques uns de mes vieux amis, FELLER, NEYMAN, WILKS et autres, ainsi qu'un grand nombre de nouveaux, à l'occasion du bicentenaire de Princeton. C'est avec un intérêt tout particulier que je fis la connaissance de DOOB, dont j'ai toujours admiré les travaux sur les processus stochastiques. Sur l'invitation de Gertrude COX et de Harold HOTELLING, je fis une rapide visite à Chapel Hill, où je suis souvent retourné depuis. A Berkeley, où j'étais invité pour un séminaire d'été, NEYMAN était en train de préparer sa célèbre série de "Berkeley Symposium" ; je fus vivement intéressé par ses recherches, ainsi que par ma rencontre avec la solide équipe de ses jeunes collaborateurs du Laboratoire Statistique de Berkeley. Tous sont maintenant bien connus pour leurs remarquables travaux scientifiques.

En 1955, j'assistai au Bicentenaire de l'Université de Moscou, comme représentant de l'Université de Stockholm. J'ai gardé le souvenir d'un évènement extraordinaire lorsque, le premier soir, nous nous rendimes à l'Opéra Bolschoi et vimes la totalité du Gouvernement Soviétique réunie sur le podium. Personnellement, ce fut surtout l'occasion souhaitée de faire connaissance avec les mathématiciens soviétiques dont les travaux avaient si profondément contribué au progrès de la théorie des probabilités. Malheureusement KHINTCHINE était malade et mourut peu après. Mais je rencontrai KOLMOGOROV, qui me fit l'impression d'une éminente personnalité scientifique, et que j'ai été heureux de revoir plusieurs fois par la suite. Je rencontrai aussi DYNKIN, qui commençait alors ses travaux sur les processus markoviens, qu'il poursuit maintenant aux U.S.A.. Je rencontrai LINNIK dont les travaux avaient d'étroites relations avec les miens. Je rencontrai GNEDENKO qui, en collaboration avec KOLMOGOROV, avait écrit un important ouvrage sur les problèmes de limite en probabilité –et encore bien d'autres–. Ils préparaient le lancement du nouveau "Journal for Probability Theory and its Applications" qui, depuis, est devenu une importante publication internationale.

Dans les années 1950, j'étais lourdement absorbé par des travaux administratifs à l'Université, et cela me prenait beaucoup de temps. Ayant pu abandonner ces tâches en 1961, j'ai fait quelques recherches sur les processus stationnaires, et j'ai essayé de généraliser quelques parties importantes de la théorie à des classes plus générales de processus stochastiques. J'ai passé une bonne partie de mon temps à voyager, visitant les Etats-Unis, l'Union Soviétique, l'Inde et plusieurs pays européens. Partout j'ai constaté un intense effort de recherche dans les domaines dont je vous ai parlé aujourd'hui. De nouvelles directions sont explorées, et de nouveaux résultats obtenus sur des problèmes anciens. Mais il n'est plus possible, pour un seul homme, de suivre et de réellement comprendre plus qu'une très petite partie du grand travail entrepris.

Je terminerai en vous adressant mes remerciements pour votre attention, et en exprimant mes vœux les plus sincères pour un puissant et continuel développement de la recherche et de la collaboration internationale dans les domaines de la théorie des probabilités et de la méthodologie statistique.