REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. BONITZER

Unicité de la solution de l'équation de vraisemblance de la loi binomiale négative

Revue de statistique appliquée, tome 26, nº 4 (1978), p. 55-59
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1978__26_4_55_0>

UNICITÉ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE VRAISEMBLANCE DE LA LOI BINOMIALE NÉGATIVE

J. BONITZER

Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts-et-Chaussées, Paris

Soit une variable aléatoire X, distribuée selon une loi binomiale négative, de paramètres m et k ; pour $n \geqslant 0$,

$$P[X = n] = \left(1 + \frac{m}{k}\right)^{-k} \frac{\Gamma(k+n)}{n!\,\Gamma(k)} \left(\frac{m}{m+k}\right)^n$$

Soit un échantillon de cette variable aléatoire, de distribution empirique $\hat{P}$, de moyenne $\hat{m}$ et de variance s^2. On pose :

$$\hat{P}[X = n] = \hat{p}_n$$

L'estimation des paramètres m et k, à partir de cet échantillon, par la règle du maximum de vraisemblance, demande la résolution d'une équation de la forme :

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{x+\ell} - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\hat{m}}{x}\right) = 0$$

(pratiquement, $\hat{p}_n$ ne diffère de zéro que pour un nombre fini de valeurs de n, mais cela ne joue pas de rôle dans la suite).

Dans un article développé, consacré à la distribution binomiale négative et à des distributions apparentées, ANSCOMBE – utilisant la notation $\bar{r}$ pour désigner la moyenne empirique ici notée $\hat{m}$ – note l'existence d'une racine au moins dans le cas où $s^2 > \bar{r}$ (démonstration rappelée ci-après). Il ajoute : "Je n'ai pas démontré que dans ce cas il y a une seule racine, ni qu'il n'y en a pas si $s^2 < \bar{r}$, mais après avoir infructueusement cherché un contre-exemple, je suppose que ces deux assertions sont vraies".(1)

L'objet de la présente note est de démontrer l'exactitude de la conjecture d'ANSCOMBE. La méthode employée parait susceptible d'être appliquée à d'autres cas.

*

* *

(1) F.J. ANSCOMBE. – Sampling Theory of the negative binomial and logarithmic séries distributions. *Biometrika*, 1950, p. 367.

Mots-clés : **Estimation – maximum de vraisemblance – loi binomiale négative – unicité – solution – équation.**

A – Existence

Au voisinage de $x = 0$, $\phi(x) \sim \frac{1 - \hat{p}_0}{x}$; pour x très grand, $\phi(x) \sim -\frac{s^2 - \hat{m}}{2x^2}$.
Comme $\phi(x)$ est continue, $\phi(x)$ a au moins un zéro positif fini si $s^2 > \hat{m}$.

B – Unicité

La démonstration repose entièrement sur le lemme suivant et son corollaire :

B_1 – ***Lemme*** – Si la fonction $\phi(u)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(x)$, définie sur R^+, et s'il existe un nombre $x_0 > 0$, fini, tel que $f(x) \geqslant 0$ pour $x < x_0$ et $f(x) \leqslant 0$ pour $x > x_0$ (ou *vice versa*), $\phi(u)$ a au plus un zéro positif fini. Si $f(x) \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$) pour tout x, $\phi(u)$ n'a pas de zéro positif fini ;

Corollaire – Si la fonction $\phi(u)$ est la transformée de Laplace de la fonction finie $f(x)$, définie sur R^+, et s'il existe $x_0 > 0$ fini tel que $f^*(x) = \int_0^x f(z)\,dz \geqslant 0$ pour $x < x_0$ et $f^*(x) \leqslant 0$ pour $x > x_0$ (ou *vice versa*), $\phi(u)$ a au plus un zéro strictement positif fini. Si $f^*(x) \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$) pour tout x, $\phi(u)$ n'a pas de zéro strictement positif fini.

Remarques

1) Il suffit que $f(x)$ soit continue et ait un zéro strictement positif unique pour que le lemme s'applique ;

2) Le corollaire s'étend par récurrence à la primitive $n^{ème}$.

Démontration – La seconde partie du lemme est évidente. Supposons que u_0 et u_1, soient deux zéros finis distincts de $\phi(u)$, tels que $u_1 > u_0$; alors :

$$\int_0^{x_0} f(x)\, e^{-u_0 x}\, dx = -\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, e^{-u_0 x}\, dx ;$$

$$\int_0^{x_0} f(x)\, e^{-u_1 x}\, dx = -\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, e^{-u_1 x}\, dx ;$$

mais :

$$\int_0^{x_0} f(x)\, e^{-u_0 x}\, dx \times e^{-(u_1 - u_0)x_0} < \int_0^{x_0} f(x)\, e^{-u_1 x}\, dx$$

$$-\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, e^{-u_0 x}\, dx \times e^{-(u_1 - u_0)x_0} > -\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, e^{-u_1 x}\, dx ;$$

Ces résultats étant contradictoires, il ne peut y avoir plus d'un zéro positif fini de $\phi(u)$.

Le corollaire résulte de ce que la transformée de Laplace de $f^*(x)$ est $\frac{\phi(u)}{u}$.

B_2 – *Première application du lemme*

Utilisant les relations :

$$\frac{1}{u} = \int_0^\infty e^{-ux}\, dx$$

$$\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\hat{m}}{u}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(1 - e^{-\hat{m}x}\right) e^{-ux}\, dx$$

On trouve que la fonction :

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{u+l} - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\hat{m}}{u}\right)$$

est la transformée de Laplace de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sum_n \hat{p}_n \left(1 - e^{-nx}\right)}{1 - e^{-x}} - \frac{1 - e^{-\hat{m}x}}{x}$$

Soit $\psi(x) = f(x) \times \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$; il suffit de démontrer que $\psi(x)$:

– a un zéro strictement positif fini unique si $\hat{m} < s^2$;

– n'en a pas si $\hat{m} \geqslant s^2$,

pour que le problème soit résolu.

B_3 – *Expression de $\psi(x)$ comme transformée de Laplace*

$\dfrac{1 - e^{-kx}}{x}$ est la transformée de Laplace de la fonction caractéristique $I_k(z)$ de l'intervalle $(0,k)$ (égale à 1 si $z \in (0,k)$ et à 0 si $z \notin (0,k)$) ; $\dfrac{1 - e^{-x}}{x} \times \dfrac{1 - e^{-\hat{m}x}}{x}$ est donc la transformée de Laplace de la convoluée de $I_1(z)$ et de $I_{\hat{m}}(z)$.

$\psi(x)$ est donc la transformée de Laplace de la fonction finie $\Psi(z)$, différence des fonctions positives finies $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$, définies comme suit :

a) $\Psi_1(z)$ est une fonction étagée décroissante, prenant sur l'intervale $(n, n+1)$ la valeur $G_n = \sum_{k>n} \hat{p}_k$;

b) $\Psi_2(z)$ prend les valeurs suivantes :

$$\Psi_2(z) = \begin{cases} 0 \text{ pour } z < 0 \text{ et } z > \hat{m} + 1 \\ z \text{ pour } 0 < z < \min(\hat{m}, 1) \\ \min(\hat{m}, 1) \text{ pour } \min(\hat{m}, 1) < z < \max(\hat{m}, 1) \\ \hat{m} + 1 - z \text{ pour } \max(\hat{m}, 1) < z < \hat{m} + 1 \end{cases}$$

B_4 – *Application du corollaire*

– $\hat{m} \leqslant 1$. Soit respectivement $\Psi^*(z)$, $\Psi_1^*(z)$, $\Psi_2^*(z)$ les primitives de $\Psi(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$. $\Psi_1^*(z)$ a pour graphe une ligne polygonale concave, dont les sommets ont des abscisses entières ; c'est une fonction croissante, dont la limite est $\sum_{n=1}^{\infty} G_n = \hat{m}$ $\Psi_2^*(z)$ est une fonction convexe pour $z \leqslant 1$, concave pour $z > 1$, croissante, et égale à $\hat{m}$ pour $z \geqslant \hat{m} + 1$, et donc a fortiori pour $z \geqslant 2$. Il en résulte qu'il existe une abscisse unique z_0 telle que $\Psi^*(z)$ soit positive pour $z < z_0$ et négative pour $z > z_0$. Et par conséquent que $\psi(x)$, et $f(x)$, ont au plus un zéro strictement positif. Il en est donc de même de $\phi(u)$. On démontrera, par le même raisonnement que dans le cas $\hat{m} > 1$ (voir ci-dessous), que ce zéro n'existe que si $s^2 > \hat{m}$.

– $\hat{m} > 1$. Il se peut que $\Psi^*(z)$ ait plusieurs zéros strictement positifs, entre lesquels elle prend des valeurs alternativement positives et négatives.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que, pour l'abscisse entière K appartenant à l'intervalle $]\hat{m}, \hat{m}+1]$, $\Psi_1^*(K) \geqslant \Psi_2^*(K)$ (sinon, le raisonnement précédent s'applique).

Dans ce cas, il existe un nombre z_0 strictement positif tel que $\Psi^{**}(z) = \int_0^z \Psi^*(t)\,dt$ soit positive pour $z < z_0$ et négative pour $z > z_0$ si $s^2 > \hat{m}$; si $s^2 \leqslant \hat{m}$, $\Psi^{**}(z)$ est positive pour toute valeur de z.

Démonstration

a) $\Psi^{**}(z)$ est nécessairement positive pour $z < K$. En effet, du fait de la concavité de la fonction Ψ_1^*, dans tout l'intervalle, inclus dans $(0, K)$, ou $\Psi^*(z)$ peut être négatif, $\Psi^{**}(z)$ reste supérieur à la différence des aires A et B de la figure (1) ci-dessous.

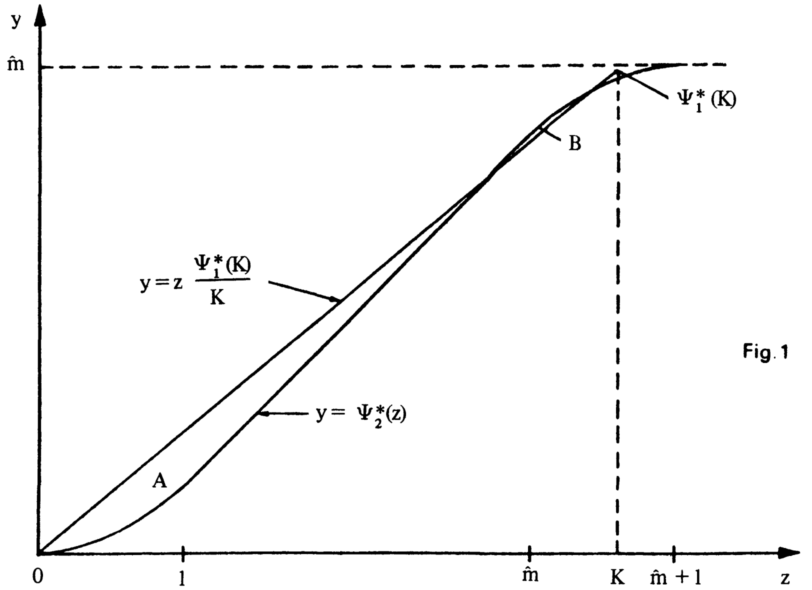

Fig. 1

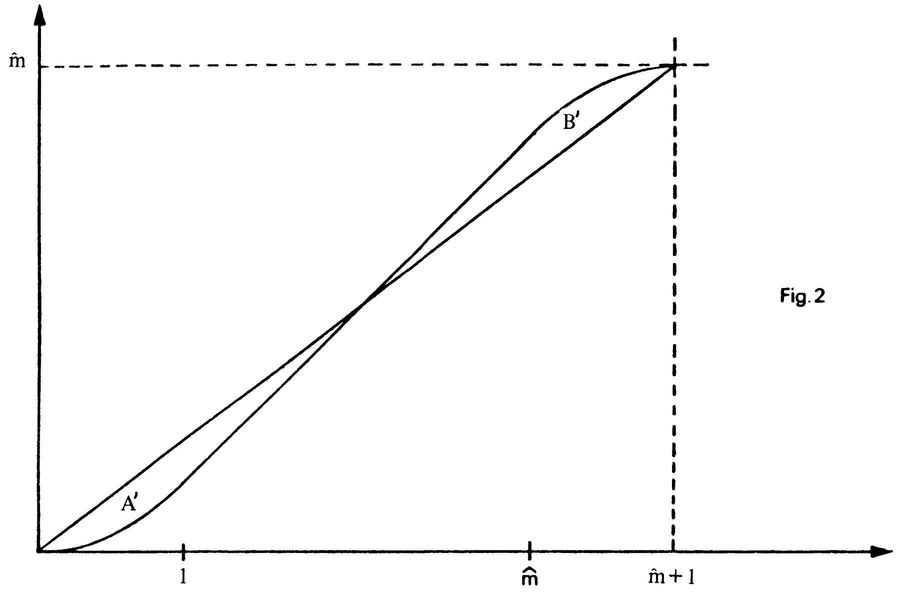

Fig. 2

Ces deux aires sont respectivement supérieure et inférieure aux aires A' et B' de la figure 2, qui sont égales entre elles (par symétrie). D'où le résultat.

b) Il résulte de a) que si $\Psi^{**}(z)$ est positive à l'infini, elle est positive pour tout z. Or, le signe de $\Psi^{**}(z)$ à l'infini est celui de $\psi(x)$ au voisinage de zéro, et $\psi(x) \sim \frac{1}{2}(\hat{m} - s^2)\, x$.

Ce qui achève la démonstration.