Revue de statistique appliquée

Lucien Feraud

Tests d'hypothèses par la méthode des conséquents

Revue de statistique appliquée, tome 22, n° 1 (1974), p. 49-56
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1974__22_1_49_0>

TESTS D'HYPOTHÈSES PAR LA MÉTHODE DES CONSÉQUENTS

Lucien FERAUD

Dans un article intitulé "Dialectique du probable" paru dans la Revue Internationale de Statistique (Vol. 40, N° 2, 1972) a été décrite une méthode d'inférence statistique –plus précisément applicable aux tests d'hypothèses – sous le nom de méthode des *conséquents.* La place qui était allouée n'a permis que de donner le principe de cette méthode et d'indiquer en quoi elle diffère des méthodes habituelles. Nous allons ici revenir sur l'application de la méthode des conséquents en employant le même langage que dans l'article cité. Auparavant doivent être rappelées quelques remarques.

REMARQUES PRELIMINAIRES

1 – Lorsque l'on connaît les probabilités a priori, la règle de Bayes n'est autre chose que la probabilisation d'un sous-ensemble à partir de celle d'un ensemble. Lorsque l'on ne connaît pas les probabilités a priori et que l'on veut appliquer la règle de Bayes (se dire ou se trouver bayesien) on est incité à rechercher les probabilités a priori en remontant aux *antécédents* (voir dans l'article cité le N° 17).

2 – Lorsque les probabilités n'interviennent pas –dans le raisonnement certain– un résultat permet de rejeter une hypothèse ; on pourrait dire que le test est *crucial* (l'expérience qui a donné le résultat est cruciale).

3 – Lorsque les probabilités interviennent –dans le raisonnement que l'on peut dire probabilitaire– il n'y a plus de test crucial. Une hypothèse ne conduit à une conclusion que si on l'assortit d'une double spécification de Cournot (d.s.C.) comportant un seuil ϵ, et un sous-ensemble d'exclusion[1] E. Il est bien évident qu'une hypothèse seule, non munie d'une d.s.C., n'aboutissant à aucune conclusion ne peut être testée. Il importe de noter qu'en outre l'hypothèse même assortie d'une d.s.C. c'est-à-dire intégrée dans l'association H et (E, ϵ) ne peut être testée.

---

* Article remis le 22/11/72

(1) Pour faciliter la lecture les notations de l'article cité sont légèrement modifiées : l'ensemble d'exclusion est désigné par E au lieu de $\bar{I}$
l'ensemble d'inclusion étant toujours désigné par I, on a $E \cup I = \Omega$.

4

En effet de H et (E, ϵ) $\Rightarrow$ r $\notin$ E

on tire par *contraposition*

$$r \in E \Rightarrow \begin{cases} \text{soit rejet de H} \\ \text{soit rejet de (E, } \epsilon) \\ \text{soit rejet des deux} \end{cases}$$

Cette remarque simple permet d'éviter l'erreur répandue qui consiste à conclure d'une petite probabilité au rejet d'une hypothèse : par exemple une loterie équitable à six numéros n'accorde à chacun qu'une probabilité 10^{-6} ; celui qui est sorti n'avait qu'une petite probabilité de sortir et cependant on ne peut conclure de son apparition que la loterie n'était pas équitable. Si l'on s'en tenait là toute recherche visant à déterminer ou au moins à parfaire une probabilisation, c'est-à-dire tout test d'hypothèse serait condamné. Ainsi paraissent pleinement justifiées l'attention qui est portée à l'inférence statistique et la masse des travaux qui lui ont été consacrés.

Pour sortir de l'impasse il est indispensable de préciser et par conséquent de restreindre l'énoncé des problèmes que l'on se propose de traiter : ce que nous allons faire en distinguant sept problèmes.

PROBLEME I

Soit à choisir entre deux hypothèses dont l'une seule est munie d'une d.s.C. :

d'une part H_0 munie d'une d.s.C. c'est-à-dire H_0 et (E_0, ϵ_0)

et d'autre part H_1 non munie(1) d'une d.s.C.

Par définition de la d.s.C.

$$\text{Prob}(r \in E_0/H_0) = \epsilon_0$$

où r désigne un résultat et la probabilité étant prise d'après l'hypothèse H_0.

Si

$$\text{Prob}(r \in E_0/H_1) \leqslant \epsilon_0$$

$r \in E_0$ est exclu par les deux hypothèses on reste dans le *doute* ($\forall r \Rightarrow$ doute) :

si $$\epsilon_0 < \text{Prob}(r \in E_0/H_1) < 1 - \epsilon_0$$

$r \in E_0$ est exclu par H_0 et non par H_1, on conclut(2) $r \in E_0 \Rightarrow H_1$ ($r \in J_0 \Rightarrow$ doute) ;

- - - - - - - - - - - - - - - - -

(1) Par "non munie d'une d.s.C." on peut aussi entendre que l'on pose le problème de telle sorte qu'il est convenu que l'on ne tient pas compte de la d.s.C. associée à H_1.

(2) La conclusion notée par le signe $\Rightarrow$ signifie "*conduit à choisir*" ; en fait on exclut une hypothèse (dans le cas présent H_0) ce qui équivaut en vertu de la dichotomie implicite dans l'énoncé (il n'existe d'autre hypothèse que H_0 et H_1) à *choisir* H_1. Cette remarque s'applique aussi à tous les problèmes qui suivent.

si $\quad 1 - \epsilon_0 \leqslant \mathrm{Prob}(r \in E_0/H_1)$

$r \in E_0 \Rightarrow H_1$ comme ci-dessus et de plus, par le même raisonnement appliqué en inversant les rôles de H_0 et de H_1, $r \in I_0 \Rightarrow H_0$.

Il est bien évident qu'en appliquant cette méthode une conclusion fausse ne peut être prise qu'avec une probabilité au plus égale au seuil ϵ_0.

PROBLEME II

Soit à choisir, entre deux hypothèses, l'une et l'autre munies d'une d.s.C. : d'une part H_0 et (E_0, ϵ_0), d'autre part H_1 et (E_1, ϵ_1).

On procède séparément pour chaque hypothèse comme au Problème I puis on coordonne les conclusions obtenues pour éliminer les contradictions.

Le parallélisme des conclusions apparaît dans le tableau suivant.

	$\mathrm{Prob}(r \in E_0/H_1) = \bullet$		$\mathrm{Prob}(r \in E_1/H_0) = \blacksquare$
i/g	$\bullet \leqslant \epsilon_0$: $\forall\ r \Rightarrow$ doute	i/d	$\blacksquare \leqslant \epsilon_1$: $\forall\ r \Rightarrow$ doute
ii/g	$\epsilon_0 < \bullet < 1 - \epsilon_0$: $\begin{cases} r \in E_0 \Rightarrow H_1 \\ r \in I_0 \Rightarrow \text{doute} \end{cases}$	ii/d	$\epsilon_1 < \blacksquare < 1 - \epsilon_1$: $\begin{cases} r \in E_1 \Rightarrow H_0 \\ r \in I_1 \Rightarrow \text{doute} \end{cases}$
iii/g	$1 - \epsilon_0 \leqslant \bullet$: $\begin{cases} r \in E_0 \Rightarrow H_1 \\ r \in I_0 \Rightarrow H_0 \end{cases}$	iii/d	$1 - \epsilon_1 \leqslant \blacksquare$: $\begin{cases} r \in E_1 \Rightarrow H_0 \\ r \in I_1 \Rightarrow H_1 \end{cases}$

Les trois cas sont numérotés i/, ii/, iii/ séparément à gauche (g) et à droite (d).

On combine ces conclusions de telle sorte qu'elles n'entraînent aucune contradiction. Les associations possibles sont au nombre de 9 parmi lesquelles 3 sont duales de 3 autres.

i/g-i /d : $\forall\ r \Rightarrow$ doute

i/g-ii /d : $r \in E_1 \Rightarrow H_0$ et sa duale ii/g-i/d : $r \in E_0 \Rightarrow H_1$

i/g-iii/d : $\begin{cases} r \in E_1 \Rightarrow H_0 \\ r \in I_1 \Rightarrow H_1 \end{cases}$ et sa duale iii/g-i/d : $\begin{cases} r \in E_0 \Rightarrow H_1 \\ r \in I_0 \Rightarrow H_0 \end{cases}$

ii/g-iii/d : $\begin{cases} r \in I_1 \Rightarrow H_1 \\ r \in I_0 \cap E_1 \Rightarrow H_0 \end{cases}$ et sa duale iii/g-ii/d : $\begin{cases} r \in I_0 \Rightarrow H_0 \\ r \in I_1 \cap E_0 \Rightarrow H_1 \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} \text{ii/g-ii/d} & \left\{ \begin{array}{l} r \in I_0 \cap E_1 \Rightarrow H_0 \\ r \in E_0 \cap I_1 \Rightarrow H_1 \end{array} \right. \\ \text{et iii/g-iii/d} & \end{array}$$

L'exemple banal : $H_0 = N(0, 1)$, $H_1 = N(m, 1)$

où $\quad I_0 = (-l, +l) \quad$ et $\quad I_1 = (m - l, m + l) \quad$ avec $\quad m > 21$

montre que la solution obtenue en iii/g-iii/d coïncide avec celle que suggère l'intuition.

Lorsque l'on considère des classes[1] d'hypothèses, le raisonnement, bien que le même en principe, n'échappe pas à quelque complexité. Quatre problèmes sont à envisager. Pour alléger l'écriture les notations employées jusqu'ici seront légèrement modifiées.

PROBLEME III

Soit H et (E, ϵ) une hypothèse munie d'une d.s.C. à laquelle on oppose une classe $\mathcal{K}$ d'hypothèses K non munies de d.s.C.

On a $\text{Prob}(r \in E/H) = \epsilon$ et l'on pose $\text{Prob}(r \in E/K) = Q(E/K)$.

Le raisonnement du Problème I donne pour *inf* et *sup* pris sur la classe des hypothèses K :

$$\sup Q(E) \leqslant \epsilon : \ \forall r \Rightarrow \text{doute}$$

$$\inf Q(E) \leqslant \epsilon < \sup Q(E) \leqslant 1 - \epsilon : \ \exists \text{ K telle que } r \in E \Rightarrow K$$

$$\inf Q(E) \leqslant \epsilon < 1 - \epsilon < \sup Q(E) : \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ K telle que } r \in E \Rightarrow K \\ \exists \text{ K telle que } r \in I \Rightarrow H \end{array} \right.$$

$$\epsilon < \inf Q(E) \leqslant \sup Q(E) \leqslant 1 - \epsilon : \quad r \notin E \Rightarrow \mathcal{K}$$

$$\epsilon < \inf Q(E) \leqslant 1 - \epsilon \leqslant \sup Q(E) : \left\{ \begin{array}{l} r \in E \Rightarrow \mathcal{K} \\ \exists \text{ K telle que } r \in I \Rightarrow H \end{array} \right.$$

$$1 - \epsilon < \inf Q(E) \quad : \left\{ \begin{array}{l} r \in E \Rightarrow \mathcal{K} \\ r \in I \Rightarrow H \end{array} \right.$$

En laissant de côté les relations d'existence ($\exists$) pour ne retenir que les relations d'implication

$$\epsilon < \inf Q(E) \ : \ r \in E \Rightarrow \mathcal{K}$$

$$1 - \epsilon < \inf Q(E) : \left\{ \begin{array}{l} r \in E \Rightarrow \mathcal{K} \\ r \in I \Rightarrow H \end{array} \right.$$

---

(1) Dans la terminologie statistique usuelle à l'heure actuelle une classe d'hypothèses est dite une "hypothèse multiple" et une hypothèse est dite "hypothèse simple".

PROBLEME IV

Soit une classe $\mathcal{H}$ d'hypothèses H, chacune étant munie d'une d.s.C., à laquelle on oppose une seule hypothèse K non munie d'une d.s.C.

Soit H et (E, ϵ) une des hypothèses de $\mathcal{H}$ et $\bigcap E$ pour toutes ces hypothèses.

On a $\mathrm{Prob}(r \in \bigcap E/H) \leqslant \epsilon$ pour $H \in \mathcal{H}$ et l'on pose

$$\mathrm{Prob}(r \in \bigcap E/K) = Q(\bigcap E)$$

Si $Q(\bigcap E) \leqslant \epsilon$: $\forall r \Rightarrow$ doute

$$\epsilon < Q(\bigcap E) < 1 - \epsilon : r \in \bigcap E \Rightarrow K$$

$$1 - \epsilon \leqslant Q(\bigcap E) \quad : \begin{cases} r \in \bigcap E \Rightarrow K \\ r \in \bigcup I \Rightarrow \mathcal{H} \end{cases}$$

car $\bigcap E$ et $\bigcup I$ sont complémentaires et pour n'importe quel H

$$\mathrm{Prob}(r \in \bigcup I/H) \geqslant \mathrm{Prob}(r \in I/H) = 1 - \epsilon.$$

PROBLEME V

Soit une classe $\mathcal{H}$ d'hypothèses H, chacune étant munie d'une d.s.C., à laquelle on oppose une seule hypothèse K munie d'une d.s.C.

Si l'on considère la classe des H et (E, ϵ) et l'hypothèse K sans tenir compte de la d.s.C. de celle-ci on est dans le problème IV et l'on introduit les conclusions figurant ci-dessus. Ensuite on considère K et (F, ϵ) –ce deuxième ϵ pourrait différer du premier– que l'on oppose à $\mathcal{H}$ sans tenir compte des d.s.C. des H, on est dans le problème III dont on écrit les conclusions

$$\epsilon < \inf Q(F) \quad : \quad r \in F \Rightarrow \mathcal{H}$$

$$1 - \epsilon < \inf Q(F) : \begin{cases} r \in F \Rightarrow \mathcal{H} \\ r \in \mathcal{I} \Rightarrow K \end{cases}$$

$\mathcal{I}$ étant le complémentaire de F.

En coordonnant les deux séries de conclusions :

$$\begin{cases} r \in (\bigcap E) \cap \mathcal{I} \Rightarrow K \\ r \in (\bigcup I) \cap F \Rightarrow \mathcal{H} \end{cases}$$

PROBLEME VI

Soit une classe $\mathcal{H}$ d'hypothèses, chacune étant munie d'une d.s.C. , H et (E, ϵ), à laquelle on oppose une classe $\mathcal{K}$ d'hypothèses non munies d'une d.s.C.

On reprend le problème IV :

Si
$$\epsilon < \inf Q(\bigcap E) : \quad r \in \bigcap E \Rightarrow \mathcal{K}$$
$$1 - \epsilon \leqslant \inf Q(\bigcap E) : \quad \begin{cases} r \in \bigcap E \Rightarrow \mathcal{K} \\ r \in \bigcup I \Rightarrow \mathcal{H} \end{cases}$$

les *inf* étant pris pour $K \in \mathcal{K}$.

PROBLEME VII

Le cas le plus général est celui où s'opposent deux classes d'hypothèses toutes munies de d.s.C.

On traite le problème VI deux fois en échangeant les rôles de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ puis l'on coordonne les conclusions :

Si $\epsilon < \inf Q(\bigcap E)$ et $\epsilon < \inf Q(\bigcap F)$:

$$r \in (\bigcap E) \cap (\bigcup \mathcal{J}) \Rightarrow \mathcal{K}$$
$$r \in (\bigcap F) \cap (\bigcup I) \Rightarrow \mathcal{H}$$

RETOUR SUR LE PRINCIPE DE LA METHODE DES CONSEQUENTS

Si l'on s'interroge sur le raisonnement qui conduit aux solutions des sept problèmes qui précèdent, on aperçoit qu'il repose sur une cohérence que l'on impose aux deux phases d'utilisation et d'invention de l'hypothèse. En effet, dans la phase d'utilisation on passe de H_0 et (E_0, ϵ_0) à $r \notin E_0$, l'observation d'un $r \in E_0$ est donc contradictoire avec l'acceptation de H_0 et (E_0, ϵ_0). On considère une autre hypothèse (ou une classe d'autres hypothèses), on la munit de la même d.s.C. : on considère donc H_1 et (E_0, ϵ_0) :

– Si avec celle-ci $r \in E_0$ n'est pas contradictoire on accordera une préférence à H_1 et (E_0, ϵ_0) –qui n'entraîne pas une contradiction– sur H_0 et (E_0, ϵ_0) –qui entraîne une contradiction– ce qui conduit à choisir H_1 c'est-à-dire $r \in E_0 \Rightarrow H_1$;

– Si par contre $r \in E_0$ entraîne également une contradiction avec H_1 et (E_0, ϵ_0) il y a contradiction avec les deux hypothèses, aucune préférence n'est à marquer, on reste dans le doute.

Ce raisonnement peut être illustré en supposant que l'on donne à un exécutant les deux *consignes* suivantes :

1/ exclure $r \in E_0$ si H_0 et (E_0, ϵ_0) sont adoptés

2/ adopter H_0 et (E_0, ϵ_0) si et seulement si $r \in X$.

Pour qu'il n'y ait pas contradiction il est nécessaire et suffisant que E_0 et X soient disjoints : on doit donc rejeter H_0 si l'on observe $r \in E_0$.

Toutefois la liaison entre les deux consignes n'étant pas *nécessaire* ce raisonnement ne suffit pas à imposer le rejet de H_0. On reprend le même raisonnement avec H_1 et (E_0, ϵ_0) et ainsi qu'il a été vu ci-dessus si cette deuxième hypothèse évite une contradiction on la choisit, sinon on reste dans le doute.

Nous dirons qu'en procédant ainsi on impose une *cohérence immédiate* par opposition à la *cohérence à la longue* qui résulte du raisonnement bien connu : une longue suite de répétitions d'une expérience permet d'estimer l'espérance mathématique en la confondant avec la moyenne des nombreux résultats observés (notamment lorsque la dite moyenne tend –en probabilité – vers l'espérance mathématique lorsque le nombre des résultats augmente indéfiniment). On peut objecter à la cohérence immédiate que les deux phases du raisonnement ne sont pas nécessairement contigües ni dans le temps ni dans l'espace et par suite mettre en cause sa nécessité. On peut objecter à la cohérence à la longue qu'elle ne donne rien pour un petit nombre– voire une seule– de répétitions. Aucune méthode ne sera jamais à l'abri de toute objection.

RECEVABILITE D'UNE HYPOTHESE

Dans tous les problèmes envisagés ci-avant on est parti d'une dichotomie, entre deux classes d'hypothèses (chacune pouvant se réduire à une seule hypothèse). Il peut se faire toutefois qu'une proposition soit admise comme certaine ce qui veut dire qu'aucune variante ne peut lui être opposée mais aussi que l'observation d'un résultat, dit aberrant, conduise à revenir sur la certitude prématurément accordée à la proposition et à lui opposer une nouvelle proposition. Prenons par exemple la sortie d'un numéro (131 094) pour fixer les idées) dans une loterie à 6 numéros. On sait que d'énormes précautions sont prises pour éviter qu'une loterie soit truquée. L'apparition de 131 094 n'avait qu'une petite probabilité de se produire : à quelles conditions examinera-t-on l'hypothèse d'une loterie truquée, en d'autres termes à quelles conditions cette hypothèse sera-t-elle *recevable* ? Dans l'article cité, nous avons montré au N° 17, que la réponse à cette question dépend de la probabilité a priori assignée à l'hypothèse dont on discute la recevabilité, et que par suite on est conduit à partir à la recherche de cette probabilité a priori en remontant aux *antécédents*. Il est clair qu'une nouvelle hypothèse ayant été reconnue recevable on se trouve devant un des sept problèmes traités ci-dessus et que l'hypothèse initiale pourra être rejetée.

Reprenons le Problème I pour montrer que la recevabilité de H_0 lorsqu'elle peut conduire au rejet de H_0 assigne une borne inférieure à la probabilité a priori de H_1.

Soit H_0 et (E_0, ϵ_0) une hypothèse munie d'une d.s.C.

Soit H_1 une autre hypothèse que nous déclarons recevable.

On a $\text{Prob}(r \in E_0/H_0) = \epsilon_0$ et l'on pose $\text{Prob}(r \in E_0/H_1) = \alpha$.

Si $\alpha > \epsilon_0$ on conclut (Problème I) $r \in E_0 \Rightarrow H_1$.

Considérons maintenant les probabilités a priori p et $1 - p$ de H_0 et de H_1. Lorsque l'on a observé $r \in E_0$ la probabilité a posteriori de H_0 est

$$\frac{p\,\epsilon_0}{p\,\epsilon_0 + (1-p)\,\alpha}$$

On pourra rejeter H_0 par une proposition décisoire de Cournot (p.d.C.), au seuil ϵ, si

$$\frac{p\,\epsilon_0}{p\,\epsilon_0 + (1-p)\,\alpha} < \epsilon$$

Il en résulte

$$1 - p = \text{Prob a priori de } H_1 > \frac{\epsilon_0(1-\epsilon)}{\epsilon_0(1-\epsilon) + \alpha\epsilon}$$

Ainsi déclarer H_1 recevable équivaut, si l'on admet le seuil ϵ, à assigner à sa probabilité a priori la borne inférieure

$$\frac{\epsilon_0(1-\epsilon)}{\epsilon_0(1-\epsilon) + \alpha\epsilon}$$

Dans l'exemple de la loterie on a $\epsilon_0 = 10^{-6}$, on peut supposer le truquage parfait $\alpha = 1$: au seuil $\epsilon = 0{,}01$, la borne inférieure de la probabilité a priori du truquage est

$$\frac{0{,}99}{0{,}99 + 10^4} \cong 10^{-4}$$

Ainsi déclarer H_1 recevable et rejeter H_0 par la solution du Problème I revient à admettre que la probabilité a priori de H_1 est au moins égale à 10^{-4} (environ) et à appliquer une p.d.C. au seuil de 0,01.