REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. OSWALD

Processus de Markov réversibles

Revue de statistique appliquée, tome 21, nº 4 (1973), p. 25-51
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1973__21_4_25_0>

PROCESSUS DE MARKOV RÉVERSIBLES (1)

J. OSWALD

Directeur Général des Laboratoires de Marcoussis (C.R. – C.G.E.)

L'auteur étudie les processus de Markov discrets et réversibles, c'est-à-dire tels qu'une séquence d'états quelconque et la séquence inverse ont même probabilité, lorsque la distribution des états est la distribution stationnaire.

A de telles chaînes de Markov, on peut associer des systèmes dont la covariance prend une forme particulièrement simple : le cas le plus caractéristique est celui des matrices de transition à changements d'états indépendants, qui forment un groupe abélien remarquable et dont la covariance décroît exponentiellement en fonction du temps.

On montre que les chemins aléatoires clos à nombre fini d'états sont réversibles et peuvent se déduire par projection des chemins aléatoires cycliques : dans le cas où les états sont équiprobables, on obtient encore une décroissance exponentielle de la covariance.

I. GENERALITES.

Nous nous proposons d'analyser la covariance de quelques processus stationnaires définis par une chaîne de Markov. Pour simplifier l'analyse, nous nous bornerons au cas des systèmes (S) ne pouvant posséder qu'un nombre fini l d'états, néanmoins quelques résultats sont encore applicables lorsque l augmente indéfiniment.

Soit donc (S) un système pouvant prendre, de façon aléatoire, les états $s_1, s_2, \ldots, s_l$, dont les probabilités a priori sont $p_1, p_2, \ldots, p_l$ $\left(\sum_1^l p_i = 1\right)$. Au système (S) nous associons une variable aléatoire $x(t)$, ou plus exactement un ensemble de variables aléatoires x_{t_i} définies sur l'ensemble des indices (2) $(1, 2, \ldots n, \ldots)$; chaque x_{t_i} a l valeurs possibles $a_1, a_2, \ldots a_l$ dans l'espace des états à l dimensions.

---

(1) Article remis en Septembre 1972.

(2) Nous poserons : $t_k = t_1 + (k-1)\,T$, en supposant pour simplifier que les changements d'état se produisent à des instants multiples d'un intervalle élémentaire T.

L'évolution du système (S), c'est-à-dire le passage de $x(t_i)$ à $x(t_{i+1})$, est déterminée par un processus de Markov de matrice de transition $[P_{ij}]$, que nous supposerons irréductible, récurrent positif et apériodique.

La matrice de transition P_{ij} :

$$[P_{ij}] = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1l} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{l1} & P_{l2} & \dots & P_{l,l} \end{vmatrix}$$

est supposée elle-même stationnaire. Comme la somme des coefficients de chaque ligne est égale à l'unité, la matrice est entièrement déterminée par ses termes-rectangles ; elle dépend donc de $l(l-1)$ paramètres.

II. EXEMPLE DU SYSTEME A DEUX ETATS.

Avant d'aborder le cas général, examinons le cas élémentaire d'un système (S) possédant deux états s_1, s_2, de probabilités p_1, $p_2 = 1 - p_1$.

La matrice de transition stationnaire a pour coefficients P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} avec :

$$P_{11} + P_{12} = P_{21} + P_{22} = 1 \tag{1}$$

Si (p_1, p_2) définit la distribution stationnaire, on a :

$$\left.\begin{array}{l} p_1 P_{11} + p_2 P_{21} = p_1 \\ p_1 P_{12} + p_2 P_{22} = p_2 \end{array}\right\} \tag{2}$$

D'où par substitution de (1) dans (2) :

$$\frac{P_{12}}{p_2} = \frac{P_{21}}{p_1} = \lambda = 1 - \rho \tag{3}$$

La matrice de transition peut ainsi se mettre sous une forme "canonique" :

$$\left.\begin{array}{l} P_{11} = p_1 + \rho\, p_2 \\ P_{12} = (1 - \rho)\, p_2 \\ P_{21} = (1 - \rho)\, p_1 \\ P_{22} = p_2 + \rho\, p_1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Si $p_1 > 0{,}5$, on a $-\frac{p_2}{p_1} \leqslant \rho \leqslant 1$

La forme canonique (4) montre que la probabilité d'une séquence $s_1 s_2$ est égale à $p_1 p_2 \ (1 - \rho)$; c'est aussi la probabilité d'une séquence $s_2 s_1$: nous dirons que le processus est *réversible.*

Si $\rho = 1$, le système est figé dans son état initial. Si $\rho = 0$, il y a indépendance complète entre les états de (S), car les situations aux instants t_1, $t_2 = t_1 + T$ sont sans corrélation entre elles. Pour

$$\rho = - p_2/p_1, \ P_{21} = 1, \ P_{22} = 0,$$

le système ne peut rester dans l'état s_2 qui est une barrière réfléchissante. Si, de surcroît, $p_1 = p_2 = 0{,}50$, $\rho = -1$ et le système oscille constamment entre les états s_1 et s_2 : il n'a plus aucun caractère aléatoire. Le paramètre λ peut ainsi être appelé "facteur d'accessibilité", puisque s'il est nul, il ne peut y avoir de passage d'un état à l'autre. Nous appelerons $\rho = 1 - \lambda$ le *coefficient d'interdiction,* car si ρ est nul, il y a passage "libre" d'un état à l'autre, d'une façon aléatoire et sans corrélation entre les situations du système aux divers instants (états indépendants). En revanche, pour $\rho = 1$, il y a impossibilité de passage d'un état à l'autre.

Montrons qu'*il y a identité entre le coefficient d'interdiction ρ et le coefficient de corrélation* r *du système.*

Considérons en effet les variables aléatoires

$$x(t_1) = x_1, \ x(t_1 + T) = x(t_2) = x_2$$

qui peuvent chacune prendre les valeurs a_1, a_2.

La loi de probabilité (x_1, x_2) est la loi :

$$p(x_1, x_2) = p_i P_{ij} \ (i, j = 1,2)$$

L'expression générale des moments de cette loi discrète est :

$$m_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} p_i \ P_{ij} \ x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

d'où, en utilisant les formules (4) :

$$m_{10} = m_{01} = p_1 a_1 + p_2 a_2 \qquad \text{(moyennes)}$$

$$m_{20} = m_{02} = p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 \qquad \text{(moyennes quadratiques)}$$

$$\sigma^2 = m_{20} - m_{10}^2 = p_1 p_2 (a_1 - a_2)^2 \quad \text{(variance)}$$

$$m_{11} = (p_1 a_1 + p_2 a_2)^2 + \rho \, p_1 p_2 \, (a_1 - a_2)^2$$

La covariance μ_{11} s'écrit donc :

$$\mu_{11} = m_{11} - m_{10} \, m_{01} = \rho \ p_1 \ p_2 \ (a_1 - a_2)^2 = \rho\sigma^2 \qquad (5)$$

Par définition classique du coefficient de corrélation r, $\mu_{11} = r\,\sigma^2$: on a donc bien $\rho \equiv r$.

La matrice des probabilités de transition à deux étapes s'obtient en élevant au carré la matrice $[P_{ij}]$. En effectuant ce produit, on trouve :

$$\left.\begin{aligned}
P_{11}^{(2)} &= P_{11}^2 + P_{12}\,P_{21} = p_1 + r^2 p_2 \\
P_{12}^{(2)} &= P_{12}\,(P_{11} + P_{22}) = (1 - r^2)\,p_2 \\
P_{21}^{(2)} &= P_{21}\,(P_{11} + P_{22}) = (1 - r^2)\,p_1 \\
P_{22}^{(2)} &= P_{21}\,P_{12} + P_{22}^2 = p_2 + r^2\,p_1
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Il y a invariance de la forme canonique (4) de la matrice de transition : seul le coefficient de corrélation r est élevé au carré. D'une façon générale, pour les transitions à n étapes, l'itération donne la correspondance évidente :

$$\left.\begin{aligned}
S(t_1) &\rightarrow S(t_1 + T) &&: \ [P_{ij}(r)] \\
S(t_1) &\rightarrow S(t_1 + 2T) &&: \ [P_{ij}^{(2)}]\,(r) = [P_{ij}]^2 = [P_{ij}\,(r^2)] \\
S(t_1) &\rightarrow S(t_1 + 3T) &&: \ [P_{ij}^{(3)}]\,(r) = [P_{ij}]^3 = [P_{ij}\,(r^3)] \\
&\ldots\ldots \\
S(t_1) &\rightarrow S(t_1 + nT) &&: \ [P_{ij}^{(n)}]\,(r) = [P_{ij}]^n = [P_{ij}\,(r^n)]
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ce résultat simple est dû au fait que les matrices de transition telles que (4) constituent un *groupe de transformation abélien* (voir Annexe) ; on a :

$$[P_{ij}\,(r_1)]\,[P_{ij}\,(r_2)] = [P_{ij}\,(r_1\,r_2)]$$

Comme r est inférieur en module à l'unité, il y a décroissance exponentielle de la corrélation ; la covariance $\mu_{11}(\Delta t)$ a en effet pour valeur, en posant $t_{n+1} = t_1 + nT = t_1 + \Delta_n t$:

$$\mu\ \ (\Delta_n t) = \sigma^2\,r^n = \sigma^2 \left(\frac{1}{r}\right)^{-\frac{t_{n+1} - t_1}{T}} \qquad (8)$$

On voit, dans ce cas particulier, comme les propriétés du deuxième ordre du processus aléatoire se déduisent simplement de la matrice de transition canonique. Nous allons maintenant examiner le cas général.

III. FORME CANONIQUE ET REVERSIBILITE

La matrice $[P_{ij}]$ étant supposée irréductible, récurrente et apériodique, on sait qu'il existe une distribution stationnaire unique $(p_1, p_2, \ldots p_l)$ qui s'obtient comme limite des P_{ij} dans l'itération :

$$\lim_{n\,\infty} P_{ij}^{(n)} = p_j$$

Par définition de la distribution stationnaire, on a :

$$\left.\begin{array}{l} p_1 P_{11} + p_2 P_{21} + p_3 P_{31} + \ldots + p_l P_{l1} = p_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_1 P_{1l} + \ldots\ldots \qquad\qquad + p_l P_{ll} = p_l \end{array}\right\} \tag{9}$$

Nous allons faire intervenir la distribution stationnaire en posant, par généralisation des formules (3) :

$$P_{ij} = \lambda_{ij}\, p_j = (1 - r_{ij})\, p_j \tag{10}$$

La matrice $[P_{ij}]$ est ainsi mise sous une forme "canonique"; nous avons introduit $l(l-1)$ grandeurs r_{ij}, en supplément des p_i, mais les p_i et les λ_{ij} (ou r_{ij}) sont liés par les équations (9), et il n'y a bien entendu que $l\,(l-1)$ paramètres indépendants.

L'intérêt de la forme (10) est qu'elle fait intervenir des grandeurs dont la signification est évidente : les λ_{ij} peuvent être appelés *facteurs d'accessibilité,* car si $\lambda_{12} = 0$ par exemple, il n'y a aucune possibilité de passage direct de l'état s_1 à l'état s_2. De la même façon r_{12} sera appelé *coefficient d'interdiction* de s_1 à s_2 : l'accés est impossible si $r_{12} = 1$.

Si nous utilisons la forme canonique (10), les relations de stationnarité (9) s'écrivent :

$$\begin{aligned} p_1 [p_2 \lambda_{21} + p_3 \lambda_{31} + \ldots + p_l \lambda_{l1}] &= p_1\, [1 - P_{11}] \\ &= p_1\, [p_2 \lambda_{12} + p_3 \lambda_{13} + \ldots + p_l \lambda_{l1}] \end{aligned}$$

et autres équations homologues. On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} 0 + p_2\,[\lambda_{21} - \lambda_{12}] + p_3 [\lambda_{31} - \lambda_{13}] + \ldots + p_l [\lambda_{l,1} - \lambda_{1,l}] = 0 \\ p_1 [\lambda_{12} - \lambda_{21}] + 0 + p_3 [\lambda_{32} - \lambda_{23}] + \ldots + p_l [\lambda_{l,2} - \lambda_{2,l}] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_1\,[\lambda_{1l} - \lambda_{l1}] + p_2\,[\lambda_{2l} - \lambda_{l2}] \qquad + \ldots + 0 \qquad = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Il y a $\dfrac{l(l-1)}{2}$ coefficients $\lambda_{ij} - \lambda_{ji}$ (ou $r_{ji} - r_{ij}$) et l relations homogènes indépendantes. Si on se donne une distribution stationnaire $(p_1, \ldots p_l)$, il y a donc une infinité de solutions pour les coefficients d'interdiction ou d'accessibilité.

Mais, parmi les solutions, il y a toujours la solution banale

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}\ (r_{ij} = r_{ji}).$$

Toutes les matrices stochastiques $[P_{ij}]$ répondant à cette condition seront appelées *réversibles* : les coefficients ne sont pas symétriques, mais satisfont à la relation $P_{ij}/p_j = P_{ji}/p_i$: les successions d'états $s_i s_j$ et $s_j s_i$ sont équiprobables(1). Si nous choisissons arbitrairement les coefficients r_{ij} (avec $r_{ji} = r_{ij}$) d'une part et une distribution quelconque $p_1, \ldots p_l$ ($\Sigma p_i = 1$) d'autre part, puisque les relations de stationnarité (11) sont satisfaites, on a une matrice de Markov réversible dont la distribution $(p_1, \ldots p_l)$ est la distribution stationnaire. Un tel système ne dépend plus que de $\frac{l(l-1)}{2} + l - 1 = \frac{(l-1)(l+2)}{2}$ paramètres.

Puisque la matrice de Markov la plus générale a $l(l-1)$ degrés de liberté P_{ij}, on en déduit que les conditions de réversibilité sont équivalentes à

$$l(l-1) - \frac{(l-1)(l+2)}{2} = \frac{(l-1)(l-2)}{2}$$

relations entre les P_{ij}(2).

Le cas des matrices réversibles permet de considérer comme indépendants les paramètres p_i et r_{ij}. Il est alors aisé d'effectuer les itérations successives permettant de déterminer les matrices de transitions à n étapes. Les calculs sont fastidieux, mais sans difficulté particulière. On peut noter les propriétés suivantes :

<u>1ère propriété</u> – Les puissances entières successives d'une matrice réversible par rapport à une distribution stationnaire donnée sont des matrices réversibles par rapport à cette même distribution.

<u>2ème propriété</u> – Les coefficients d'interdiction $r_{ij}^{(2)}$ de la matrice de transition à deux étapes $[P_{ij}]^{(2)}$ d'une matrice de transition réversible $[P_{ij}]$ sont des formes quadratiques et homogènes des coefficients d'interdiction r_{ij} de la matrice à une étape (ou matrice élémentaire). Plus généralement, les coefficients $r_{ij}^{(n)}$ sont des formes homogènes d'ordre n des r_{ij}.

Il en résulte que pour $|r_{ij}| < 1$, les $r_{ij}^{(n)}$ tendent bien vers zéro (ce qui est évident puisque $p_1, \ldots p_l$ est la distribution stationnaire). De plus, la décroissance est "quasi-exponentielle" dans la mesure où tous les r_{ij} sont du même ordre de grandeur.

Le calcul de la covariance est aisé, on trouve :

$$\mu_{11}(\Delta t) = R\sigma^2$$

---

(1) Propriété qui s'étend par récurrence aux séquences comportant un nombre quelconque d'états successifs.

(2) Ceci revient à choisir, dans la matrice de Markov la plus générale, les P_{ij} situés au-dessus de la diagonale principale (i < j), ainsi que les termes reotangles de la première colonne ($P_{21}, P_{31}, \ldots P_{l1}$). La distribution stationnaire est alors déterminée par : $p_k = p_1 \frac{P_{1k}}{P_{k1}}$. Il reste les coefficients r_{ji} situés sous la diagonale, première colonne exclue, dont la détermination $\left(\frac{r_{ij}}{P_i} = \frac{r_{ji}}{P_j}\right)$ constitue les conditions de réversibilité.

avec

$$\sigma^2 = \sum_{i,j} p_i p_j (a_i - a_j)^2$$

et :

$$\left.\begin{aligned} R &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} r_{ij} \qquad \left(\text{étendue aux } \frac{l(l-1)}{2} \text{ coefficient } r_{ij}\right) \\ \alpha_{ij} &= \frac{p_i p_j (a_i - a_j)^2}{\sigma^2} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Bien entendu, $\sum_{i,j} \alpha_{ij} = 1$.

Le coefficient de corrélation R est une fonction linéaire et homogeñe des coefficients d'interdiction r_{ij} ; dans l'itération, en raison de la propriété indiquée plus haut pour les r_{ij}, $R^{(2)}$ sera une forme quadratique et homogène des r_{ij}, et ainsi de suite.

IV. PROCESSUS A CHANGEMENTS D'ETATS INDEPENDANTS.

Considérons une matrice stochastique $[P_{ij}]$ dont les termes rectangles d'une même colonne sont tous égaux : $P_{ik} = \pi_k$ ($\forall_i$, $i \neq k$). Elle s'écrit donc :

$$[P_{ij}] = \left|\begin{matrix} P_{11}\, \pi_2 \pi_3 \ldots\ldots & \pi_l \\ \pi_1\, P_{22}\, \pi_3 \ldots\ldots & \pi_l \\ \pi_1\, \pi_2\, P_{33} \ldots\ldots & \pi_l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \pi_1 \pi_2 \pi_3 & P_{l,l} \end{matrix}\right| \qquad \text{avec :} \left\{\begin{aligned} P_{11} &= 1 - (\pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_l) \\ P_{22} &= 1 - (\pi_1 + \pi_3 + \ldots + \pi_l) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{ll} &= 1 - (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_{l-1}) \end{aligned}\right.$$

On voit que cette matrice de Markov ne dépend que de l paramètres différents, π_1, π_2, ... π_l. La probabilité conditionnelle d'atteindre l'état s_k en une étape ne dépend que du fait que le système (S) était ou n'était pas précisément dans l'état s_k à l'instant précédent. Nous dirons qu'il s'agit d'un processus à *changements d'états indépendants* (car il ne serait à états dépendants que si $P_{ii} = \pi_i$).

Nous allons montrer que ce processus est réversible. Appelons en effet (p_1, p_2, ... p_l) la distribution stationnaire associée. On a :

$$p_1 P_{11} + (p_2 + p_3 + \ldots + p_l)\, \pi_1 = p_1$$

donc

$$p_1\, [1 - \pi_2 - \pi_3 - \ldots. - \pi_l] + (1 - p_1)\, \pi_1 = p_1$$

d'où :

$$\pi_1 = p_1 \sum_1^l \pi_i$$

et plus généralement :

$$\pi_k = p_k \sum_1^l \pi_i$$

Le processus est donc bien réversible.

Posons :

$$\sum_1^l \pi_i = 1 - r$$

En désignant par δ_{ij} le delta de Kronecker, il vient :

$$P_{ij} = r\delta_{ij} + (1 - r)\, p_j \qquad \left(-\frac{1}{l-1} \leqslant r \leqslant 1\right) \tag{13}$$

C'est la forme "canonique" de la matrice de transition d'un processus de Markov à changements d'états indépendants, processus réversible possédant l degrés de liberté ($p_1, \ldots p_l$ et r, avec $\Sigma p_i = 1$)

Les formules (13) sont la généralisation des formules (4), relatives au système à deux états. Elles constituent le cas particulier des matrices de Markov réversibles dont les coefficients d'interdiction r_{ij} sont tous égaux, leur valeur commune étant désignée par r.

Comme on le montre dans l'annexe, les formules (13) définissent un groupe abélien de transformations linéaires extrêmement simple.

Toutes les propriétés déjà établies sont vérifiées sans restriction

Itération :

$$[P_{ij}]^{(n)} = [P_{ij}(r)]^n = [P_{ij}(r^n)]$$

Coefficient de corrélation :

$$r,\ r^{(2)} = r^2, \ \ldots\ r^{(n)} = r^n$$

Covariance :

$$\mu_{11}\ (\Delta_n t) = \sigma^2 r^n = \sigma^2 \left(\frac{1}{r}\right)^{-\frac{t_{n+1} - t_1}{T}}$$

En conclusion, les processus de Markov à changements d'état indépendants sont réversibles, ont un coefficient d'interdiction unique r qui s'identifie avec le coefficient de corrélation du système (S) associé. La covariance de ce système décroît exponentiellement avec le temps (série géométrique).

V. CHEMINS ALEATOIRES CLOS OU A BARRIERES.

Nous allons examiner maintenant le cas important des chemins aléatoires. Ce sont des processus de Markov liés à des systèmes (S) qui, au cours de leur évolution, ne peuvent passer en une seule étape de l'état qu'ils occupent qu'à l'un des deux états voisins. (les états sont ordonnés suivant une suite dénombrable).

La matrice de transition stationnaire ne comporte donc, au plus, que trois coefficients non nuls par ligne, et se met sous la forme :

$$[P_{ij}] = \begin{vmatrix} P_{11} P_{12} \, 0 \; 0 & \dots & 0 \\ P_{21} \, P_{22} \, P_{23} \, 0 & \dots & 0 \\ 0 \;\; P_{32} \, P_{33} \, P_{34} & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 & P_{l,l-1} & P_{l,l} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Les états extrêmes s_1, s_l constituent des "murs", ou barrières, en ce sens que le système (S) ne peut quitter l'état s_1 qu'en passant à l'état s_2, et l'état s_l qu'en revenant à l'état s_{l-1}. On a, bien entendu :

$$P_{11} + P_{12} = P_{21} + P_{22} + P_{23} = \dots = P_{l,l-1} + P_{l,l} = 1.$$

introduisons maintenant la distribution stationnaire $(p_1, p_2, \dots p_l)$. on aura, par définition :

$$\left.\begin{array}{r} p_1 P_{11} + p_2 P_{21} = p_1 \\ p_1 P_{12} + p_2 P_{22} + p_3 P_{32} = p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{l-1} \, p_{l-1,l} + p_l \, P_{l,l} = p_l \end{array}\right\} \tag{15}$$

($l - 1$ relations indépendantes, car $\Sigma_{p_i} = 1$)

En éliminant les termes carrés, on trouve facilement :

$$\frac{P_{12}}{p_2} = \frac{P_{21}}{p_1}, \frac{P_{23}}{p_3} = \frac{P_{32}}{p_2}, \text{ etc.} \dots$$

On écrira de façon générale :

$$\frac{P_{ij}}{p_j} = \frac{P_{ji}}{p_i} = \lambda_{ij} = 1 - r_{ij} \tag{16}$$

Donc : *Les chemins aléatoires clos sont des processus réversibles par rapport à leur distribution stationnaire.*

Si on élimine les termes carrés, on voit qu'un chemin aléatoire clos dépend de $2\,(l-1)$ paramètres. On peut choisir les $l-1$ coefficients $P_{i,\,i+1}$ situés au-dessus de la diagonale principale et les $l-1$ probabilités indépendantes p_i

$$(\Sigma\, p_i = 1).$$

Les équations de réversibilité fournissent alors les $l-1$ coefficients $P_{i,i-1}$.

Inversement, si un chemin aléatoire clos est défini par ses $2\,(l-1)$ probabilités de transition P_{ij}, sa distribution stationnaire s'obtient à l'aide des relations :

$$p_2 = p_1 \frac{P_{12}}{P_{21}}$$

$$p_3 = p_2 \frac{P_{23}}{P_{32}} = p_1 \frac{P_{12}\,P_{23}}{P_{21}\,P_{32}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_l = p_1 \frac{P_{12}\,P_{23}\,\ldots\,P_{l-1,l}}{P_{21}\,P_{32}\,\ldots\,P_{l,l-1}}$$

$$1 = p_1 \left[1 + \frac{P_{12}}{P_{21}} + \frac{P_{12}\,P_{23}}{P_{21}\,P_{32}} + \ldots + \frac{P_{12}\,P_{23}\,\ldots\,P_{l-1,l}}{P_{21}\,P_{32}\,\ldots\,P_{l,l-1}}\right]$$

Il y a donc équivalence complète entre la donnée des $2\,(l-1)$ coefficients P_{ij} de la matrice de transition et celle d'une distribution p_i (distribution stationnaire) complétée par $l-1$ coefficients d'interdiction r_{ij}.

L'évolution du système (S) est caractérisée par le graphe de la figure 1. On obtient la communication entre un état quelconque et n'importe quel autre après $l-1$ étapes ; la matrice de transition à $l-1$ étapes $[P_{ij}]^{(l-1)} = [P_{ij}]^{l-1}$ sera appelée *matrice de transition d'accès complet.*

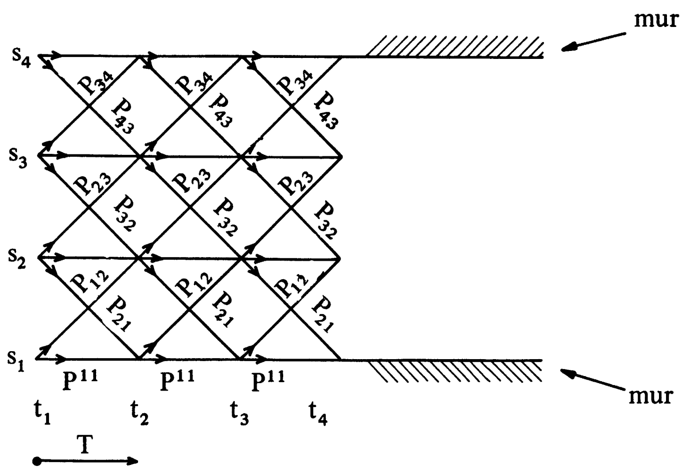

Figure 1 – Graphe d'un chemin aléatoire clos à matrice de transition stationnaire ($l = 4$).

Les considérations qui ont été développées plus haut s'appliquent sans difficulté : puisque les puissances successives d'une matrice réversible sont des matrices réversibles, la matrice d'accès complet est réversible. Ses coefficients sont des polynomes homogènes d'ordre $l - 1$ des r_{ij}. Le coefficient de corrélation est une forme linéaire et homogène des $r_{ij}^{(l-1)}$. Néanmoins les calculs sont laborieux et ne prennent une forme véritablement simple que dans les cas particuliers que nous allons examiner ci-après.

VI. CHEMINS ALEATOIRES CYCLIQUES.

L'itération des matrices de transition élémentaires des chemins aléatoires clos ne présente pas de difficulté particulière mais fournit des expressions compliquées et peu maniables. Nous recherchons ici les cas particuliers les plus simples, susceptibles d'interprétation commode. Or, la difficulté provient surtout de l'existence des "murs" ou frontières, qui se traduit par la présence de deux coefficients non nuls seulement à la première et à la dernière ligne de la matrice $[P_{ij}]$, alors que les autres lignes en ont trois.

Cette singularité disparaît dans le cas des *chemins aléatoires cycliques*, dans lesquels il y a passage direct possible entre les états extrêmes, et dont le principe est schématisé par la figure 2. Leur matrice de transition fondamentale peut s'écrire :

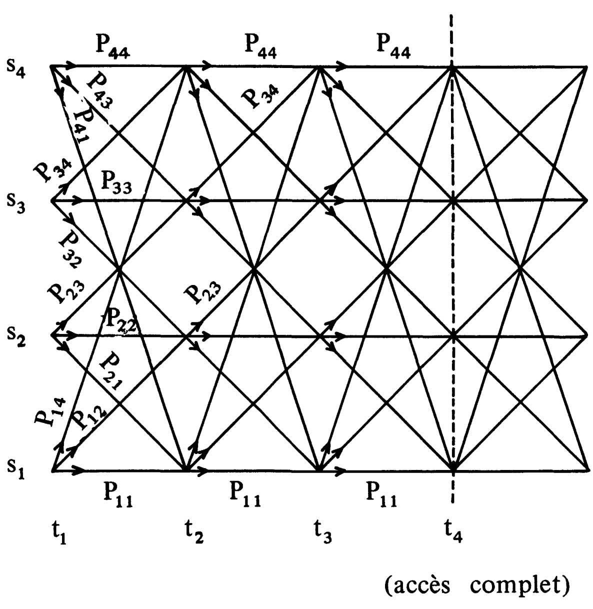

Figure 2 – Graphe d'un chemin aléatoire cyclique à matrice stationnaire ($l = 4$).

$$[P_{ij}] = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & & 0 & P_{1l} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 \ldots\ldots & & 0 & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & P_{34} & 0 \ldots\ldots & & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & P_{l-1,l-2} & P_{l-1,l-1} & P_{l-1,l} \\ P_{l,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{l,l-1} & P_{l,l} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

On a cette fois trois coefficients non nuls dans chaque ligne et dans chaque colonne, et le système a une expression entièrement symétrique. Il a $2l$ degrés de liberté, puique l'on a :

$$P_{11} + P_{12} + P_{1l} = P_{21} + P_{22} + P_{23} = \ldots = P_{l1} + P_{l,l-1} + P_{l,l} = 1.$$

En suivant la procédure habituelle, nous mettons en évidence la distribution stationnaire en posant :

$$P_{ij} = \lambda_{ij} p_j = (1 - r_{ij})\, p_j$$

Les relations de stationnarité ont la même forme que les équations (11), mais n'ont que deux termes par ligne. Si on considère les crochets $\lambda_{ij} - \lambda_{ji}$ comme des inconnues et les p_i comme des coefficients, on est en présence d'un système de l équations à l inconnues, linéaire et homogène, mais dont le déterminant est nul ainsi que ses mineurs. Néanmoins la solution banale correspond au cas où le système est réversible.

Considérons en effet les P_{ij} comme données ; s'il y a réversibilité, la distribution stationnaire est telle que :

$$p_2 = p_1 \frac{P_{12}}{P_{21}}$$

$$p_3 = p_2 \frac{P_{23}}{P_{32}} = p_1 \frac{P_{12}\, P_{23}}{P_{21}\, P_{32}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_l = p_1 \frac{P_{12}\, P_{23} \ldots P_{l-1,l}}{P_{21}\, P_{32} \ldots P_{l,l-1}}$$

Mais on a aussi :

$$p_1 = p_l \frac{P_{l,1}}{P_{1,l}}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $[P_{ij}]$ d'un chemin aléatoire cyclique soit réversible, s'écrit donc :

$$\frac{P_{12}\, P_{23}\, P_{34} \, \ldots\ldots \, P_{l-1,l}\, P_{l,1}}{P_{21}\, P_{32}\, P_{43} \, \ldots\ldots \, P_{l,l-1}\, P_{1,l}} = 1 \tag{18}$$

Lorsque cette condition est remplie, la distribution stationnaire est donnée par les formules précédentes, la probabilité p_1 satisfaisant à l'équation :

$$1 = p_1 \left[1 + \frac{P_{12}}{P_{21}} + \frac{P_{12}\, P_{23}}{P_{21}\, P_{32}} + \ldots + \frac{P_{12}\, P_{23} \, \ldots \, P_{l-1,l}}{P_{21}\, P_{32} \, \ldots \, P_{l,l-1}} \right]$$

Un chemin aléatoire cyclique réversible dépend donc de $2\,l - 1$ paramètres, qui peuvent être les l coefficients d'interdiction r_{ij} et les $l - 1$ valeurs indépendantes p_i de la distribution stationnaire.

Un cas particulier intéressant est celui des chemins aléatoires cycliques dont les changements d'état *autorisés* sont indépendants : les deux termes rectangles d'une même colonne sont égaux. La matrice de transition élémentaire prend alors la forme :

$$\begin{array}{llllll}
P_{11} & \pi_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \pi_l \\
\pi_1 & P_{22} & \pi_3 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
0 & \pi_2 & P_{33} & \pi_4 & \ldots\ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\pi_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \, \pi_{l-1} & P_{l,l}
\end{array}$$

Un tel système est réversible, car la condition (18) est remplie ; elle s'écrit :

$$\frac{\pi_2\, \pi_3 \, \ldots\ldots \, \pi_l\, \pi_1}{\pi_1\, \pi_2 \, \ldots\ldots \, \pi_l} = 1$$

Puisqu'il y a réversibilité, on a :

$$\frac{\pi_1}{p_1} = \frac{\pi_2}{p_2} = \ldots\ldots = \frac{\pi_l}{p_l} = \sum_1^l \pi_i = 1 - \rho \tag{19}$$

On a donc simplement :

$$P_{ij} = (1 - \rho)\, p_j \tag{20}$$

et le système ne dépend plus que de l paramètres.

Néanmoins, même avec ces simplifications, les formules d'itération restent compliquées. En effet, il y a accès progressif aux états non voisins, donc des coefficients d'interdiction différents dans chaque ligne et dans chaque colonne. En dépit des apparences, un tel processus est donc plus complexe que le processus à changements d'états indépendants analysé au § 4, auquel il s'apparente : la présence de $l - 3$ termes nuls dans chaque ligne montre d'ailleurs qu'on a *deux* coefficients d'interdiction différents au lieu d'un seul à savoir ρ et $\rho' = 1$.

VII. RELATION ENTRE CHEMINS ALEATOIRES CLOS ET CYCLIQUES.

L'intérêt des chemins aléatoires cycliques résulte de la proposition suivante :

Tout chemin aléatoire clos d'ordre l peut être considéré comme la "projection" d'un chemin aléatoire cyclique d'ordre $2\ (l - 1)$, *d'où dérivent toutes ses propriétés.*

Cette proposition est illustrée par la figure 3, sur laquelle on a représenté par des points sur le diamètre d'un cercle les l états du système (S) correspondant au chemin aléatoire clos et par des croix sur la circonférence, les $2\,l - 2$ états du système (S') correspondant au chemin aléatoire cyclique associé à (S). La projection sur le diamètre du point figuratif de l'état de (S') fournit exactement le comportement de (S), pourvu que l'on ait, en désignant par

$$p'_1 , p'_2 , \ldots , p'_{2l-2} ,$$

les probabilités des états de S' et par P'_{ij} les coefficients de sa matrice de transition :

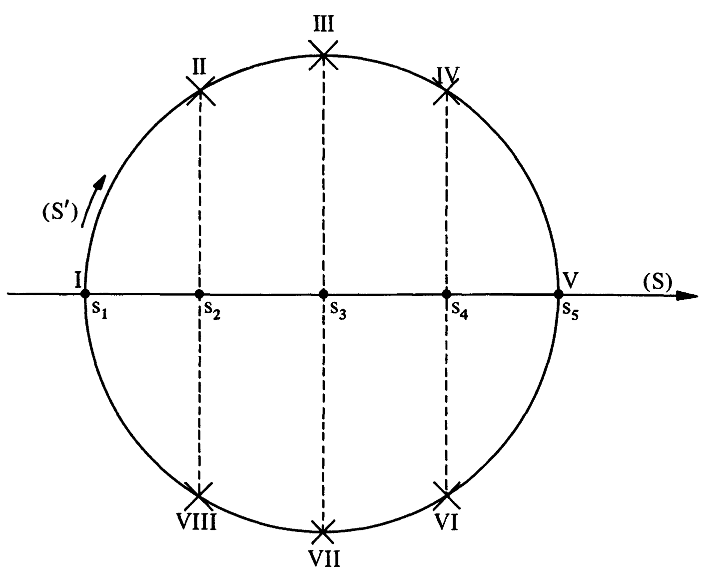

Figure 3 – Correspondance entre un système clos ($l = 5$) et un système cyclique ($2(l-1) = 8$).

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p'_1 \\ p_2 &= p'_2 + p'_{2l-2} = 2\,p'_2 \\ p_3 &= p'_3 + p'_{2l-3} = 2\,p'_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_l &= p'_l \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

et :

$$\left.\begin{aligned} &P_{11} = P'_{11}\ ;\ P_{12} = P'_{12} + P'_{1,2l-2} \\ &P_{21} = \frac{1}{2}\,[P'_{21} + P'_{2l-2,1}]\ ;\ P_{22} = P'_{22}\ ;\ P_{23} = \frac{1}{2}\,[P'_{23} + P'_{2l-2,2l-3}] \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &P_{l,l-1} = P'_{l,l-1} + P'_{l,l+1}\ ;\ P_{l,l} = P'_{l,l} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

On voit, en effet, puisque les états s'_k, s'_{2l-k} du système (S′) ont la même valeur a_k, que les moyennes du premier et du deuxième ordre, la variance et la covariance de (S) et (S′) sont identiques.

Ces formules générales trouvent une application particulièrement simple dans le cas d'un système cyclique dont :

a) Les états sont de même probabilité :

$$p'_i = \frac{1}{2(l-1)} = p \qquad (\forall i)$$

b) Les changements d'état autorisés sont indépendants :

$$P'_{ij} = (1-\rho)\,p'_j = (1-\rho)\,p = \lambda p$$

Les formules (21) montrent qu'à la distribution uniforme des probabilités du système cyclique (S′) correspond une distribution "en trapèze" du système (S) :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_l = p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l-1} \\ p_2 &= p_3 = \ldots = p_{l-1} = 2\,p = \frac{1}{l-1} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

On peut écrire alors les matrices de transition élémentaires $[P'_{ij}]$ et $[P_{ij}]$ de (S′) et (S) sous les formes (24), (25) (on a pour fixer les idées pris ici $l = 4$, $2(l-1) = 6$, mais la généralisation est évidente) :

$$
[P'_{ij}] = \begin{array}{c}
\overleftarrow{\hspace{4em} l \text{ termes} \hspace{4em}} \times \overrightarrow{\hspace{3em} l-2 \text{ termes} \hspace{3em}} \\
\left|\begin{array}{cccccc}
1-2\lambda p & \lambda p & 0 & 0 & 0 & \lambda p \\
\lambda p & 1-2\lambda p & \lambda p & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda p & 1-2\lambda p & \lambda p & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda p & 1-2\lambda p & \lambda p & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda p & 1-2\lambda p & \lambda p \\
\lambda p & 0 & 0 & 0 & \lambda p & 1-2\lambda p
\end{array}\right|
\end{array} \qquad (24)
$$

$$
[P_{ij}] = \left|\begin{array}{cccc}
1-2\lambda p & 2\lambda p & 0 & 0 \\
\lambda p & 1-2\lambda p & \lambda p & 0 \\
0 & \lambda p & 1-2\lambda p & \lambda p \\
0 & 0 & 2\lambda p & 1-2\lambda p
\end{array}\right| \qquad (25)
$$

– La matrice $[P'_{ij}]$ est une matrice cyclique symétrique : chaque ligne se déduit de la précédente par une permutation circulaire, et les termes rectangles symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

– La matrice $[P_{ij}]$ s'obtient par *repliement* de la matrice $[P'_{ij}]$ autour de la $l^{\text{ème}}$ colonne, ou si l'on veut par simple addition, dans chaque ligne de $[P'_{ij}]$, des termes symétriques par rapport à la $l^{\text{ème}}$ colonne.

Pour tirer partie de cette règle simple, il convient d'établir rapidement les propriétés des matrices cycliques symétriques.

VIII. PROPRIETES DES MATRICES CYCLIQUES SYMETRIQUES.

Une matrice est cyclique lorsque chaque ligne se déduit de la précédente par permutation circulaire ; exemple :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16} \\
a_{16}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15} \\
a_{15}\ a_{16}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14} \\
\ldots\ldots
\end{array}
$$

Une matrice est symétrique si les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux. Dans le cas précédent, on aura :

$$a_{16} \equiv a_{12},\ a_{13} \equiv a_{15}.$$

Il en résulte qu'une matrice cyclique symétrique d'ordre $2(l-1)$ ne possède que l coefficients distincts ; bien entendu, les éléments d'une diagonale quelconque parallèle à la diagonale principale sont égaux ; exemple :

$$\begin{array}{llllll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{13} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cdots \end{array}$$

Les propriétés qui suivent sont immédiates et peuvent être énoncées sans démonstration :

– Les matrices cycliques symétriques de même ordre sont commutables.

– Le produit de deux matrices cycliques symétriques est une matrice cyclique symétrique.

Le *repliement* consiste à déduire de la matrice cyclique symétrique à $2(l-1)$ lignes et $2(l-1)$ colonnes une matrice "repliée" à l^2 éléments, en ajoutant deux à deux les termes symétriques par rapport à la $l^{\text{ème}}$ colonne ; exemple :

$$\begin{array}{llll} a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{11} + a_{13} & a_{12} + a_{14} & a_{13} \\ a_{13} & a_{12} + a_{14} & a_{11} + a_{13} & a_{12} \\ a_{14} & 2a_{13} & 2a_{12} & a_{11} \end{array}$$

Représentons symboliquement par $\urcorner$ l'opération de repliement. On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

– Deux matrices repliées de même ordre sont commutables :

$$A\urcorner B\urcorner = B\urcorner A\urcorner$$

– Les opérations de produit et de repliement sont commutables (la repliée du produit est identique au produit des repliées) :

$$\overline{A\,B}\urcorner = A\urcorner B\urcorner = B\urcorner A\urcorner$$

Grâce à ces propriétés, on peut effectuer toutes les opérations sur les matrices cycliques symétriques au lieu de les effectuer sur les matrices repliées.

IX. PROPRIETES DES CHEMINS ALEATOIRES CYCLIQUES SYMETRIQUES A ETATS EQUIPROBABLES.

Reprenons le cas très simple d'un chemin aléatoire cyclique stationnaire, à changements d'état autorisés indépendants, et états équiprobables. Sa matrice élémentaire d'ordre $2(l-1)$ est donnée par l'expression (24).

Examinons tout d'abord le passage, par $(l-1)$ itérations, de la matrice élémentaire à la matrice d'accès complet.

Posons :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda p = (1-\rho)\,p = P \\ 1 - 2\,\lambda p = Q.\end{array}\right. \qquad (2P + Q = 1)$$

La première ligne de la matrice de transition élémentaire est :

$$Q \quad P \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad P$$

et les lignes suivantes s'en déduisent par une simple permutation circulaire. La matrice d'accès complet est, en vertu des propriétés établies précédemment, une matrice cyclique symétrique d'ordre $2(l-1)$, mais qui n'a que l coefficients différents (dont $l-1$ indépendants).

Renonçons, pour simplifier l'écriture, à la notation $P_{ij}^{\prime(l-1)}$ pour le coefficient de la matrice cyclique d'accès complet et désignons le simplement par P_{ij}. Cette matrice prend l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{array}{l} P_{11}\ P_{12}\ P_{13}\ \ldots\quad P_{1,l-1}\ \ P_{1,l}\quad P_{1,l-1}\ \ldots\ P_{13}\ P_{12} \\ P_{12}\ P_{11}\ P_{12}\ P_{13}\ \ldots\ P_{1,l-2}\ \ P_{1,l-1}\ \ P_{1,l}\quad \ldots\ P_{14}\ P_{13} \\ \ldots\ldots \end{array}$$

(la suite par permutation circulaire)

ou, en désignant par r_a, r_b, ... les coefficients d'interdiction ($P \quad = (1 - r_a)p$, etc.).

$$\left.\begin{array}{llllllll} X & (1-r_a)p & (1-r_b)p & (1-r_c)p \ldots (1-r_j)p & (1-r_k)p & (1-r_j)p \ldots (1-r_a)p \\ (1-r_a)p & X & (1-r_a)p & (1-r_b)p \ldots & (1-r_j)p & (1-r_k)p \ldots (1-r_b)p \\ \ldots\ldots \end{array}\right] \quad (26)$$

(la suite par permutation circulaire).

Le terme carré P_{11}, complément à l'unité de la somme du reste de la ligne, a été remplacé par une croix.

Bien entendu, le chemin aléatoire clos d'ordre l associé, obtenu par repliement, a pour matrice d'accès complet :

$$\begin{array}{lllll} P_{11} & 2P_{12} & 2P_{13}\quad \ldots & 2P_{1,l-1} & P_{1,l} \\ P_{12} & P_{11} + P_{13} & P_{12} + P_{14} \ldots & P_{1,l-2} + P_{1,l} & P_{1,l-1} \end{array}$$

ou encore :

$$\begin{array}{lllll} X & 2(1-r_a)p & 2(1-r_b)p \quad \ldots & 2(1-r_j)p & (1-r_k)p \\ (1-r_a)p & X & (2-r_a-r_b)p \ldots & & (1-r_j)p \end{array}$$

etc.

Revenons à la détermination des l éléments P_{ij}. Un calcul simple mais fastidieux fournit leur expression en fonction de $P = \lambda p = (1 - \rho)p$ et de $Q = 1 - 2P$:

$$\left[\begin{array}{ll}
P_{1,l} & = 2\, P^{l-1} \\
P_{1,l-1} & = \binom{l-1}{1} P^{l-2}\, Q \\
P_{1,l-2} & = \binom{l-1}{2} P^{l-3}\, Q^2 + \binom{l-1}{1} P^{l-1} \\
P_{1,l-3} & = \binom{l-1}{3} P^{l-4}\, Q^3 + 2 \binom{l-1}{2} P^{l-2}\, Q \\
P_{1,l-4} & = \binom{l-1}{4} P^{l-5}\, Q^4 + 3 \binom{l-1}{3} P^{l-3}\, Q^2 + \binom{l-1}{2} P^{l-1} \\
\hdashline
P_{1,l-k} & = \binom{l-1}{k} P^{l-k-1}\, Q^k + \binom{k-1}{1}\binom{l-1}{k-1} P^{l-k+1}\, Q^{k-2} + \binom{k-2}{2}\binom{l-1}{k-2} P^{l-k+3}\, Q^{k-4} + \binom{k-3}{3}\binom{l-1}{k-3} P^{l-k+5}\, Q^{k-6} \dots \\
\hdashline
P_{12} & = \binom{l-1}{l-2} P\, Q^{l-2} + \binom{l-3}{1}\binom{l-1}{l-3} P^3\, Q^{l-4} + \binom{l-4}{l-2}\binom{l-1}{l-4} P^5\, Q^{l-6} + \binom{l-5}{3}\binom{l-1}{l-5} P^7\, Q^{l-8} \dots \\
P_{11} & = Q^{l-1} + \binom{l-2}{1}\binom{l-1}{l-2} P^2\, Q^{l-3} + \binom{l-3}{2}\binom{l-1}{l-3} P^4\, Q^{l-5} + \binom{l-4}{3}\binom{l-1}{l-4} P^6\, Q^{l-7} \dots
\end{array}\right. \tag{27}$$

Les éléments de la matrice d'accès complet sont évidemment des polynômes de degré $l - 1$ du coefficient d'interdiction ρ (ou de $\lambda = 1 - \rho$), avec : $-(l-2) \leqslant \rho \leqslant 1$.

Etudions maintenant la corrélation. Associons au chemin aléatoire cyclique une fonction du temps x(t), telle que $x(t_1) = x_1$ puisse prendre une des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_{2l-2}$ avec les probabilités $p = \dfrac{1}{2l-2}$, et considérons la loi de probabilité (x_1, x_k) ; c'est la loi à deux variates $p_i P_{ij}'^{(k-1)}$, i et j prenant toutes les valeurs de 1 à $2l - 2$, et $[P'_{ij}]^{(k-1)}$ désignant la matrice de transition à $k - 1$ étapes. Les moments du premier et du deuxième ordre sont :

$$m_{10} = m_{01} = p \sum_1^{2l-2} a_i$$

$$m_{20} = m_{02} = p \sum_1^{2l-2} a_i^2$$

$$\sigma^2 = p^2\, \Sigma\Sigma (a_j - a_i)^2$$

la somme double étant étendue aux $(l-1)(2l-3)$ combinaisons des indices pris deux à deux.

Prenons en premier lieu les instants t_1, $t_2 = t_1 + T$, la matrice de transition considérée est alors la matrice élémentaire.

On trouve sans difficulté, pour la covariance :

$$\mu_{11}(T) = r\sigma^2 = [1 - \alpha(1 - \rho)]\, \sigma^2 \tag{28}$$

avec :

$$\alpha = \frac{\sum\limits^{(h)} (a_j - a_i)^2}{\sum \sum (a_j - a_i)^2}$$

Dans l'expression de α, $\sum\limits^{(h)}$ désigne la somme étendue aux indices différant d'une unité :

$$(a_2 - a_1)^2, (a_3 - a_2)^2, \ldots, (a_{2l-2} - a_{2l-3})^2, (a_1 - a_{2l-2})^2.$$

Le coefficient de corrélation r est égal à 1 pour $\rho = 1$: dans ce cas en effet le passage d'un état à un autre est impossible, et le système reste figé dans son état initial. La valeur minimale de r est : $1 - (l - 1)\alpha$;en effet, il y a toujours une corrélation puisque les seuls états accessibles en une seule étape sont les états immédiatement voisins.

Si nous considérons maintenant les instants t_1, $t_l = t_1 + (l - 1)$ T, on doit prendre en compte la matrice d'accès complet. La covariance $\mu_{11}[(l - 1)T]$ a pour expression : $R\sigma^2$, le coefficient de corrélation R étant une forme linéaire et homogène des coefficients d'interdiction $r_a, r_b, \ldots, r_k$:

$$R = \alpha r_a + \beta r_b + \gamma r_c + \ldots + \kappa r_k \tag{29}$$

avec :

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sum\limits^{(h)} (a_j - a_i)^2}{\sum \sum (a_j - a_i)^2} \\
\beta &= \frac{\sum\limits^{(2h)} (a_j - a_i)^2}{\sum \sum (a_j - a_i)^2} \\
\kappa &= \frac{\sum\limits^{(l-1)h} (a_j - a_i)^2}{\sum \sum (a_j - a_i)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Dans les formules (30), $\sum\limits^{(h)}$ désigne la somme des carrés des différences portant exclusivement sur les indices différant d'une unité :

$$(a_2 - a_1)^2, (a_3 - a_2)^2, \ldots, (a_1 - a_{2l-2})^2,$$

$\sum\limits^{(2h)}$ est la même somme étendue aux termes dont les indices diffèrent de deux unités :

$$(a_3 - a_1)^2, (a_4 - a_2)^2, \ldots,$$

et ainsi de suite.

On a, bien évidemment :

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \kappa = 1 \qquad (31)$$

L'expression (26) de la matrice de transition d'accès complet montre que R est forcément une forme linéaire et homogène des $r_a, r_b, \ldots, r_k$, car s'ils sont tous nuls (formellement) on obtient une indépendance complète des états ($P_{ij} = p, \forall_{i,j}$).

Si $r_a = r_b = r_c = \ldots = r_k = r$, ce qui ne peut se produire que pour une valeur numérique particulière de ρ, on a $R = r$.

Si l'on effectue maintenant une itération : $S(t_1) \to S(t_1 + 2T_l)$, on montre sans difficulté que les nouveaux coefficients d'interdiction $r_a^{(2)}, r_b^{(2)}, r_k^{(2)}$ sont des formes *quadratiques et homogènes* des coefficients d'origine $r_a, r_b, \ldots, r_k$ (les matrices cycliques symétriques d'accès complet forment un groupe). Il en résulte que le nouveau coefficient de corrélation $R^{(2)}$ est, lui aussi, une forme quadratique et homogène des coefficients d'origine $r_a, r_b, \ldots, r_k$.

Nous allons montrer sur deux exemples, qui se généralisent aisément, la propriété suivante :

Le coefficient de corrélation R associé à la matrice d'accès complet d'un chemin aléatoire clos d'ordre l, déduit par projection d'un chemin aléatoire cyclique symétrique, à 2 l − 2 états équiprobables et répartis conformément sur le cercle (division de la circonférence en 2 l − 2 arcs égaux), est élevé à ses puissances entières successives dans l'itération ; en d'autres termes il y a décroissance exponentielle de la covariance, exactement comme dans le cas d'un processus de Markov à changements d'états indépendants.

X. EXEMPLES DE CHEMINS ALEATOIRES CLOS A VARIATION EXPONENTIELLE DE LA COVARIANCE.

1^er exemple.

Considérons le chemin aléatoire clos possédant 3 états de probabilités $p_1 = p_3 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ (distribution triangulaire). On lui associe le chemin aléatoire cyclique à 4 états de probabilité uniforme $p = \frac{1}{4}$, représenté par la figure 4.

La matrice de transition d'accès complet, d'après (27), a pour coefficients

$$P_{12} = 2p(1-\rho)\,[1 - 2p(1-\rho)] = \frac{1}{4}(1-\rho^2) = p(1-r_a)$$

$$P_{13} = 2\,p^2(1-\rho)^2 \qquad\qquad = \frac{1}{8}(1-\rho)^2 = p(1-r_b)$$

D'où :

$$r_a = \rho^2, \; 1 - r_b = \frac{1}{2}(1-\rho)^2 \quad (-1 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

La matrice d'accès complet du chemin aléatoire clos est donc :

$$\left|\begin{matrix} x & \frac{1}{2}(1-\rho^2) & \frac{1}{8}(1-\rho)^2 \\ \frac{1}{4}(1-\rho^2) & x & \frac{1}{4}(1-\rho^2) \\ \frac{1}{8}(1-\rho)^2 & \frac{1}{2}(1-\rho^2) & x \end{matrix}\right|$$

C'est la repliée (non symétrique) de la matrice d'accès complet du chemin cyclique associé. La figure 4 montre qu'il faut donner à la variable x(t) les valeurs :

$$a_1, \; a_2 = a_1 + h, \; a_3 = a_1 + 2h, \; a_4 = a_1 + h$$

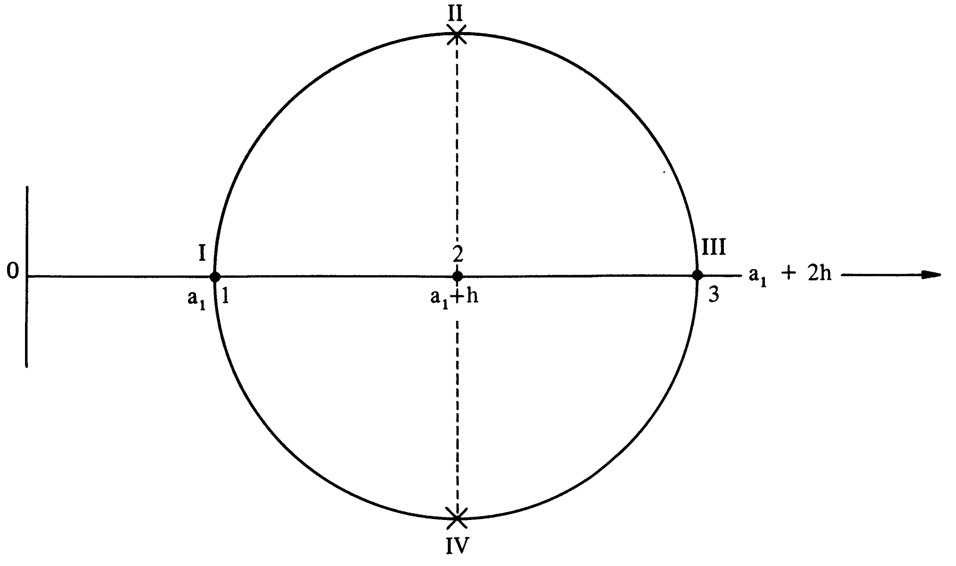

Figure 4 – Système à 3 états (chemin cyclique associé à 4 états).

On a :

$$\alpha\sigma^2 = (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_1 - a_4)^2 = 4h^2$$

$$\beta\sigma^2 = (a_3 - a_1)^2 + (a_4 - a_1)^2 = 4h^2$$

Donc :

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Il vient, d'après (28), pour le coefficient de corrélation élémentaire r :

$$r = 1 - \alpha(1 - \rho) = \frac{1 + \rho}{2} \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

De plus, d'après (29) :

$$R = \frac{1}{2}(r_a + r_b) = \left[\frac{1 + \rho}{2}\right]^2 = r^2 \qquad (0 \leqslant R \leqslant 1)$$

L'itération de la matrice d'accès complet conduit aux coefficients d'interdiction :

$$r_a^{(2)} = r_a^2$$

$$r_b^{(2)} = \frac{1}{2}(r_a + r_b)^2 - r_a^2$$

Donc :

$$R^{(2)} = \frac{r_a^{(2)} + r_b^{(2)}}{2} = \left[\frac{r_a + r_b}{2}\right]^2 = R^2 = r^4$$

Le coefficient de corrélation R est porté à ses puissances successives dans l'itération, ce qui correspond à une décroissance exponentielle de la covariance.

2ème exemple.

Prenons le chemin aléatoire clos à 4 états de probabilités

$$p_1 = p_4 = \frac{1}{6}, \ p_2 = p_3 = \frac{1}{3}.$$

On lui associe le chemin aléatoire cyclique à 6 états de probabilité uniforme $\frac{1}{6}$, représenté par la figure 5. La matrice d'accès complet du chemin cyclique a pour première ligne :

$$x \quad (1 - r_a)p \qquad (1 - r_b)p \qquad (1 - r_c)p \qquad (1 - r_b)p \qquad (1 - r_a)p$$

les autres lignes s'en déduisent par permutation circulaire.

Des formules (27) on tire facilement :

$$(1 - r_c)p = \frac{1}{6}(1 - r_c) = \frac{2}{6^3}(1 - \rho)^3 \qquad , \qquad 1 - r_c = \frac{1}{18}(1 - \rho)^3$$

$$(1 - r_b)p = \frac{1}{6}(1 - r_b) = \frac{3}{6^2}(1 - \rho)^2 \left[1 - \frac{1}{3}(1 - \rho)\right] \quad , \quad 1 - r_b = \frac{1}{6}(1 - \rho)^2 (2 + \rho)$$

$$(1 - r_a)p = \frac{1}{6}(1 - r_a) = \frac{3}{6}(1 - \rho)\frac{(2 + \rho)^2}{9} + \frac{3}{63}(1 - \rho)^3, \quad 1 - r_a = \frac{1}{3}(1 - \rho)\left[(2 + \rho)^2 + \left(\frac{1 - \rho}{2}\right)^2\right]$$

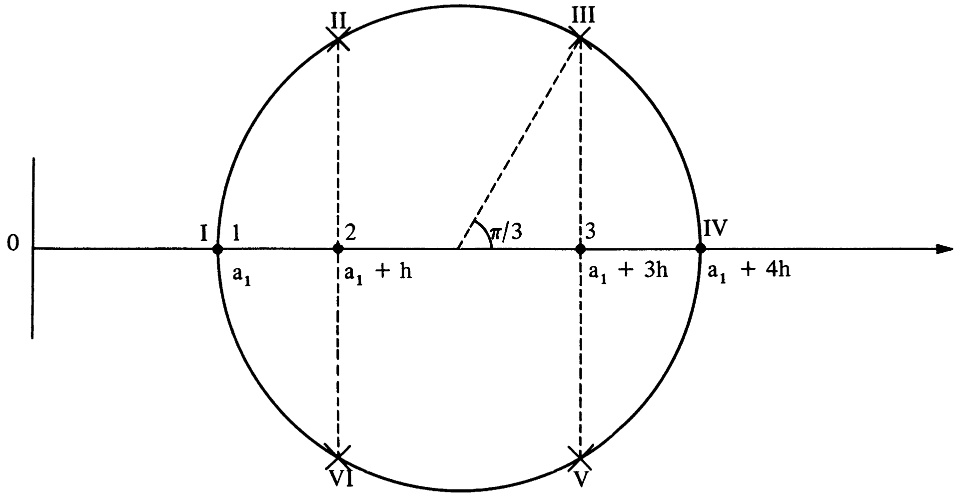

Figure 5 – Système à 4 états (chemin cyclique associé à 6 états).

L'itération de la matrice d'accès complet conduit aisément aux formules[1] :

$$r_a^{(2)} = \frac{2}{3} r_a^2 - \frac{1}{3} r_b r_c + \frac{1}{3} r_c r_a + \frac{1}{3} r_a r_b$$

$$r_b^{(2)} = \frac{1}{2} r_b^2 - \frac{1}{6} r_a^2 + \frac{1}{3} r_b r_c - \frac{1}{3} r_c r_a + \frac{2}{3} r_a r_b$$

$$r_c^{(2)} = \frac{1}{3} r_c^2 + \frac{2}{3} r_b r_c + \frac{2}{3} r_c r_a - \frac{2}{3} r_a r_b$$

----

(1) Ces formules se déduisent immédiatement des lois du groupe associé, qui sont les suivantes :

$$[r_a] = r_a' r_a'' - p \quad [(r_a' - r_b')(r_a'' - r_c'') + (r_a'' - r_b'')(r_a' - r_c')]$$

$$[r_b] = r_c' r_b'' - p \quad [(r_c' - r_b')(r_a'' - r_b'') + (r_a' - r_b')(r_c'' - r_b'') + (r_c' - r_b')(r_a'' - r_b'')]$$

$$[r_c] = r_c' r_c'' - 2p\ [(r_a' - r_c')(r_b'' - r_c'') + (r_b' - r_c')(r_a'' - r_c'')]$$

Associons maintenant au chemin aléatoire clos une variable aléatoire x(t) prenant des valeurs a_1, a_2, a_3, a_4, avec les probabilités $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$, $p_4 = \frac{1}{6}$. Si l'on choisit une variation des a_k en fonction des indices qui correspond à une répartition uniforme et symétrique des points sur le cercle (figure 5), c'est-à-dire une loi sinusoïdale pour les projections sur le diamètre :

$$a_k = a_1 + 2h \left[1 - \cos \frac{k-1}{l-1} \pi\right] \qquad (1 \leqslant k \leqslant 2l - 2)$$

soit :

$$a_2 = a_6 = a_1 + h, \; a_3 = a_5 = a_1 + 3h, \; a_4 = a_1 + 4h$$

On trouve facilement, en appliquant les formules (29) :

$$\alpha = \frac{1}{6} \qquad \beta = \frac{1}{2} \qquad \gamma = \frac{1}{3}$$

Le coefficient de corrélation élémentaire r vaut :

$$r = 1 - \alpha (1 - \rho) = \frac{5 + \rho}{6} \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1\right), (-2 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

Le coefficient de corrélation correspondant à l'accès complet vaut :

$$R = \alpha r_a + \beta r_b + \gamma r_c = \frac{r_a + 3r_b + 2r_c}{6}$$

et il vérifie la relation :

$$R^{(2)} = \alpha r_a^{(2)} + \beta r_b^{(2)} + \gamma r_c^{(2)} = [\alpha r_a + \beta r_b + \gamma r_c]^2 = R^2$$

La loi d'élévation du coefficient de corrélation à ses puissances successives dans l'itération, c'est-à-dire la loi de décroissance exponentielle de la covariance, est vérifiée.

CONCLUSION

Nous ne donnons pas la démonstration générale, qui pourrait être faite par la méthode trigonométrique, mais il est clair que la propriété d'évolution exponentielle de la covariance est vérifiée par les chemins aléatoires cycliques symétriques à états équiprobables et distribution uniforme et donc par les chemins aléatoires clos dont ils sont la projection.

Nous avons surtout cherché à mettre en évidence l'intérêt de la notion de réversibilité qui confère des propriétés simples aux processus de Markov, et tout particulièrement aux processus à changements d'état indépendants, dans le cas de la distribution stationnaire.

ANNEXE

GROUPE DES MATRICES DE TRANSITION DES CHAINES DE MA RKOV A CHANGEMENTS D'ETAT INDEPENDANTS.

Soit un processus de Markov stationnaire, à matrice de transition complète et stationnaire, définie par :

$$P_{ij} = r\,\delta_{ij} + (1 - r)p_j \qquad (\delta_{ij} \text{ est le Delta de Kronecker}).$$

r est une constante, qui est le coefficient de corrélation du système.

Raisonnons pour simplifier l'écriture sur un système (S) à 3 états de probabilités p_1, p_2, p_3, la généralisation étant absolument évidente.

Considérons un espace à trois dimensions X, Y, Z, dans lequel nous choisissons un point particulier $X_0 = p_1$, $Y_0 = p_2$, $Z_0 = p_3$. En donnant au paramètre r une valeur particulière r', la matrice $[P_{ij}]$ définit une transformation linéaire qui associe à tout point de l'espace M (X, Y, Z) un autre point M' (X', Y', Z'), conformément à la relation matricielle (produit à gauche) :

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 + r'(p_2 + p_3) & p_2(1 - r') & p_3(1 - r') \\ p_1(1 - r') & p_2 + r'(p_1 + p_3) & p_3(1 - r') \\ p_1(1 - r') & p_2(1 - r') & p_3 + r'(p_1 + p_2) \end{vmatrix}$$

qu'on écrit plus synthétiquement :

$$[OM'] = [OM] \,.\, P(r') \qquad (\text{détermin. } P = r')$$

Une deuxième transformation analogue, de paramètre r'', appliquée à M', va fournir le point M'' :

$$[OM''] = [OM'] \,.\, P(r'') = [OM]\, P(r')\, P(r'')$$

Un calcul élémentaire montre que la matrice produit $P(r') \,.\, P(r'')$ a pour éléments :

$$p_1 + r'r''(p_2 + p_3),\ (1 - r'r'')p_2,\ (1 - r'r'')p_3, \text{ etc.}$$

On a donc :

$$P_{(r')} \,.\, P_{(r'')} = P_{(r'r'')} = P_{(r)} \qquad \text{avec } r = r'r''$$

L'élément neutre est la matrice-unité

$$E = P(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

car $r' \times 1 = r'$.

Chaque élément P a un symétrique P^{-1}, de paramètre $\frac{1}{r}$, car :

$$P P^{-1} = P^{-1} P = P(r) \; P\left(\frac{1}{r}\right) = P(1) = E$$

Les transformations P forment donc un *groupe commutatif* (abélien). Dans l'espace à 3 dimensions, le point $M_0(X_0 = p_1, \; Y_0 = p_2, \; Z_0 = p_3)$ est situé dans le plan $X + Y + Z = 1$; comme $0 < p_i < 1$, M_0 est même situé à l'intérieur du triangle équilatéral de sommets (1 0 0, 0 1 0, 0 0 1). Si un point M (X, Y, Z) est lui-même à l'intérieur du triangle, le transformé M′ par P (r′) avec $0 < r' < 1$ est nécessairement aussi à l'intérieur du triangle, car si l'on a :

$$\begin{cases} X' = P_{11} X + P_{21} Y + P_{31} Z \\ Y' = P_{12} X + P_{22} Y + P_{23} Z \\ Z' = P_{13} X + P_{23} Y + P_{33} Z \end{cases} \quad \text{avec : } X + Y + Z = 1, \; X \geqslant 0, \; Y \geqslant 0, X \geqslant 0$$

il vient :

$$X' > 0, \; Y' > 0, \; Z' > 0, \qquad X' + Y' + Z' = X + Y + Z = 1$$

Le point double de la transformation est $M_0(p_1, \; p_2, \; p_3)$, ce qui est évident en vertu de la stationnarité.

Les transformations linéaires P(r) (avec $0 < r < 1$) conservent donc le triangle équilatéral du trièdre positif.

Plus généralement, dans le cas de *l* dimensions, les transformations P (r) forment un groupe abélien et conservent "l'hypertétraèdre" régulier de l'hyperplan $\Sigma X_i = 1$.