

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

SHAUL LADANY

Détermination graphique d'un plan d'échantillonnage simple par variables (population normale d'écart-type connu)

Revue de statistique appliquée, tome 19, n° 3 (1971), p. 73-84

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_3_73_0

© Société française de statistique, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION GRAPHIQUE D'UN PLAN D'ÉCHANTILLONNAGE SIMPLE PAR VARIABLES

(Population normale d'écart-type connu)

Shaul LADANY
Université de Tel-Aviv

Il est fait un large usage des plans d'échantillonnage simple par variables, basés sur le risque α du fournisseur, le risque β du client, les pourcentages correspondants de défectueux p_1 et p_2 dans le lot échantillonné et une limite simple de tolérance (inférieure L ou supérieure U).

Les modifications fréquentes de ces plans, imposées par des raisons économiques ou techniques, avec cinq paramètres précédents, impliquent la répétition des calculs qui permettent d'en définir les règles. Il en est de même lorsque ces plans sont basés, au lieu de p_1 , p_2 et L ou U, sur les deux paramètres équivalents μ_h et μ_e , définissant respectivement la qualité moyenne acceptable et la qualité limite.

De tels plans devant fréquemment être choisis par un personnel peu familier avec les mathématiques ou souhaitant éviter les calculs nécessaires, il en résulte que, fréquemment, les plans utilisés, choisis dans des tables de plans d'échantillonnage, ne répondent pas aux conditions correspondant à certaines valeurs de α , β , p_1 , p_2 , L ou U.

Une méthode graphique, exposée ci-après, permet d'obtenir rapidement et facilement le plan qui convient le mieux à chaque cas, sans être obligé de refaire les calculs nécessaires ou de se contenter d'une solution de compromis, eu égard aux données économiques et techniques du problème envisagé. La méthode proposée peut être employée lorsque les conditions imposées sont exprimées en fonction de p_1 , p_2 et L ou U ou en fonction de μ_h et μ_e (ce dernier cas étant le moins fréquent).

La méthode est beaucoup plus générale que celle déjà présentée par STANGE [3], [4], puisqu'elle s'applique aussi bien aux problèmes énoncés en termes de pourcentage de défectueux qu'à ceux définis à partir de la qualité moyenne acceptable et de la qualité limite (cas des tests unilatéraux d'une moyenne).

LE PROBLEME STATISTIQUE

Dans ce qui suit, on admet que la population ou le lot dont provient l'échantillon d'effectif n est normalement distribué ou que le lot est suffisamment important pour utiliser les propriétés de la loi normale, et que l'écart-type σ est connu (ou a pu être estimé valablement).

Dans ces conditions le problème statistique nécessite la recherche des solutions des cinq équations ci-après (ou seulement des trois dernières, lorsque μ_e et μ_h sont donnés) :

$$(1) \quad \int_{x=-\infty}^L \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x-\mu_h}{\sigma}^2} dx = p_1 \quad \text{ou} \quad \int_U^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x-\mu_h}{\sigma}^2} dx = p_1$$

$$(2) \quad \int_{x=-\infty}^L \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x-\mu_e}{\sigma}^2} dx = p_2 \quad \text{ou} \quad \int_U^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x-\mu_e}{\sigma}^2} dx = p_2$$

$$(3) \quad \int_{x=-\infty}^c \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x-\mu_h}{\sigma}^2} d\bar{x} = \alpha \quad (\text{pour la limite inférieure de tolérance})$$

$$(4) \quad \int_{x=-\infty}^c \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x-\mu_e}{\sigma}^2} d\bar{x} = 1 - \beta \quad (\text{pour la limite supérieure de tolérance})$$

$$(5) \quad \sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

dans lesquelles x est une observation particulière, \bar{x} la moyenne de l'échantillon, le plan d'échantillonnage étant défini par son effectif n et par le critère d'acceptation c pour la moyenne : la condition d'acceptation étant $\bar{x} < c$ ou $\bar{x} > c$ suivant qu'il s'agit d'une limite supérieure ou inférieure de tolérance.

Les résultats formulés ci-dessus se déduisent aisément de la figure n° 1 correspondant au cas d'une limite inférieure L , et α , dans laquelle Z désigne une variable normale réduite définie par $p = \Pr(Z > Z_p)$.

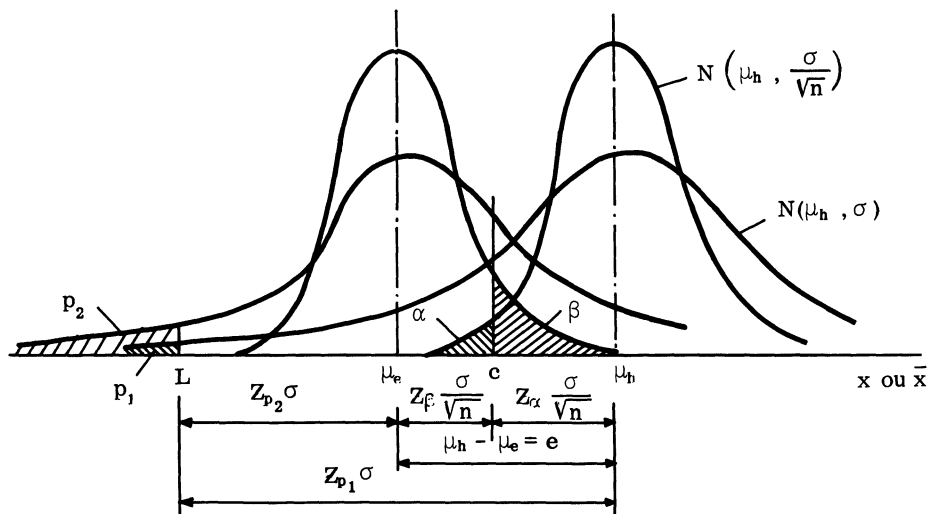


Figure n° 1 - Description graphique des conditions statistiques du plan d'échantillonnage.

Une figure analogue correspondant au cas d'une limite supérieure U se construit facilement.

De ces figures, il résulte que les équations (1) et (2) peuvent être remplacées par les équations suivantes :

$$(6) \quad \mu_h = L + Z_{P_1} \sigma \quad \text{ou} \quad U - Z_{p_1} \sigma$$

$$(7) \quad \mu_e = L + Z_{P_2} \sigma \quad \text{ou} \quad U - Z_{p_2} \sigma$$

La distance e définie par :

$$(8) \quad e = | \mu_h - \mu_e |$$

est égale à :

$$(9) \quad e = (Z_{P_1} - Z_{P_2}) \sigma$$

et aussi à

$$(10) \quad e = (Z_\beta + Z_\alpha) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

d'où il résulte que l'effectif de l'échantillon est

$$(11) \quad n = \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{Z_{P_1} - Z_{P_2}} \right)^2 = \left[\frac{\sigma}{e} (Z_\alpha + Z_\beta) \right]^2$$

Le critère d'acceptation c est alors défini par

$$(12) \quad c = L + Z_{P_1} \sigma - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = L + Z_{P_2} \sigma + Z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ou

$$(13) \quad c = U - \left(Z_{P_1} \sigma - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = U - \left(Z_{P_2} \sigma + Z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

ELEMENTS D'UNE SOLUTION GRAPHIQUE

L'équation (10) peut être traduite graphiquement à l'aide d'un papier de probabilité normale, les valeurs de n et de c s'en déduisant à l'aide d'un abaque à points alignés.

Si μ_h et μ_e sont connus, la figure n° 2, dans laquelle on a marqué par une échelle de probabilité normale les points d'abscisses α et $1 - \beta$, montre comment la distance $e = \mu_h - \mu_e$ peut être décomposée en deux parties $Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et $Z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (équation n° 10), à l'aide d'une parallèle à la diagonale du rectangle de côtés $e = \mu_h - \mu_e$ et $Z_\alpha + Z_\beta$.

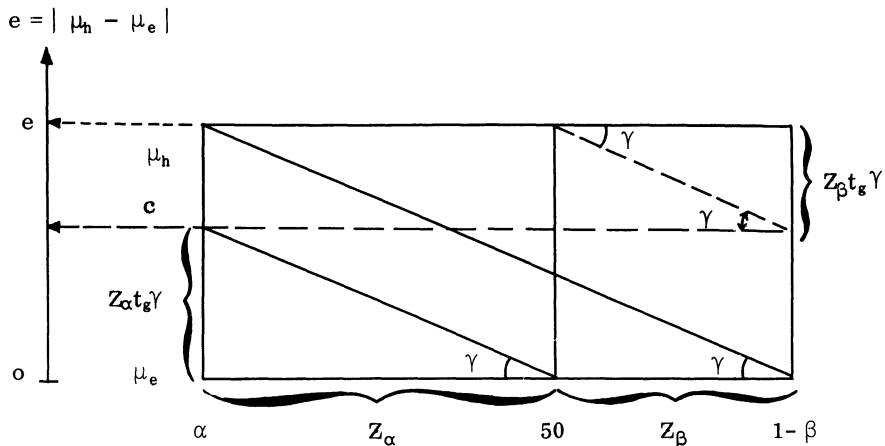


Figure n° 2 - Construction graphique de l'équation n° 10.

Il faut joindre au graphique ci-dessus un nomogramme à points alignés (nomogramme en N, tel que celui décrit par Bonfiglioli [1]).

Ce nomogramme décrit l'équation (15), $Z_P \sigma = e$, mais il décrit aussi bien l'équation (9), c'est-à-dire $e = (Z_{P_1} - Z_{P_2}) \sigma$.

Les trois axes de ce nomogramme sont

1/ l'axe Ωe construit à partir d'un point particulier de l'échelle de probabilité normale,

2/ l'axe oblique $\Omega 0$ sur lequel sera graduée l'échelle de σ ,

3/ un axe parallèle au premier, orienté vers le bas et qui sera gradué en p , à l'aide d'une échelle en Z_P tel que $p = \Pr(Z < Z_P)$.

Parallèlement à ce troisième axe, se trouve un axe isolé, de même échelle graduée en p , mais orienté positivement vers le haut. Cette échelle, une fois qu'elle aura été découpée, sera utilisée pour retrancher, sur l'axe OZ, la longueur Z_{P_2} de la longueur Z_{P_1} , de manière à obtenir la longueur $(Z_{P_1} - Z_{P_2})$.

Dès que ce point $(Z_{P_1} - Z_{P_2})$ est déterminé sur l'axe OZ, l'équation (9) est décrite par une droite joignant ce point au point coté σ de l'axe des écarts-types et coupant l'axe Ωe au point $e = (Z_{P_1} - Z_{P_2}) \sigma$ (fig. n° 3).

Pour cette même valeur de σ , une construction analogue permet de construire la longueur $Z_{P_1} \sigma$ et, compte tenu de la construction de $Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (fig. n° 2), d'en déduire sur l'échelle e la longueur $(Z_{P_1} \sigma - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ qui devra être ajoutée à la limite inférieure de tolérance ou retranchée de la limite supérieure, pour obtenir le critère d'acceptation c .

Pour cette construction, les unités graphiques sur les axes Ωe et OZ peuvent être choisies arbitrairement, l'unité graphique sur $\Omega 0$ s'en déduisant

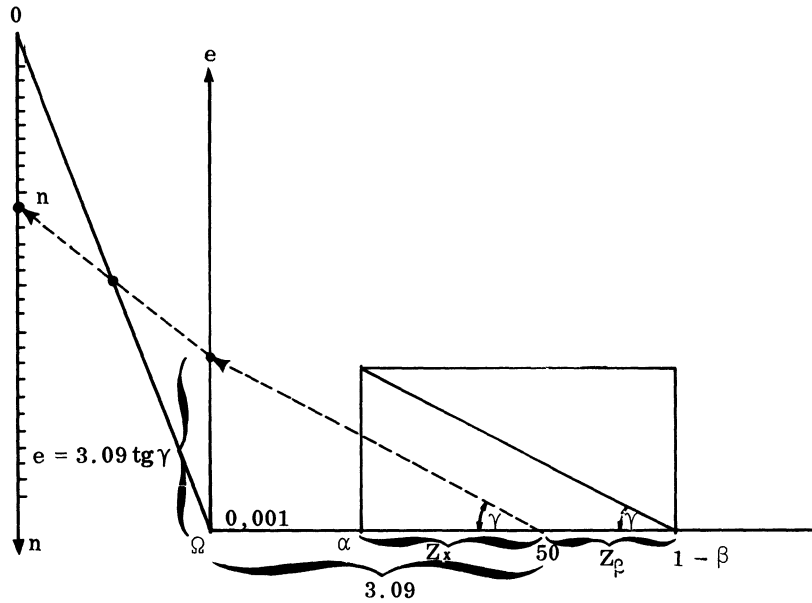


Figure n° 4 - Construction graphique de l'effectif de l'échantillon.

2/ Placer la règle mobile p_2 %, orientée vers le haut sur l'axe p_1 %, de manière que son point 50 % coïncide avec le point 2 % de l'échelle p_1 % et marquer sur celle-ci le point correspondant à $p_2 = 8$ %.

3/ Tracer la droite joignant ce point au point $\sigma = 4$ et marquer le point d'intersection avec l'axe Ωe .

4/ Tracer par ce point la parallèle à l'axe de probabilité normale et déterminer le rectangle limité par les verticales issues des points $\alpha = 5$ % et $(1 - \beta) = 90$ %.

5/ Tracer la diagonale de ce rectangle joignant les points ($\alpha = 5$ %, e) et $(1 - \beta = 90$ %, 0) et mener par le point 50 % une parallèle à cette diagonale.

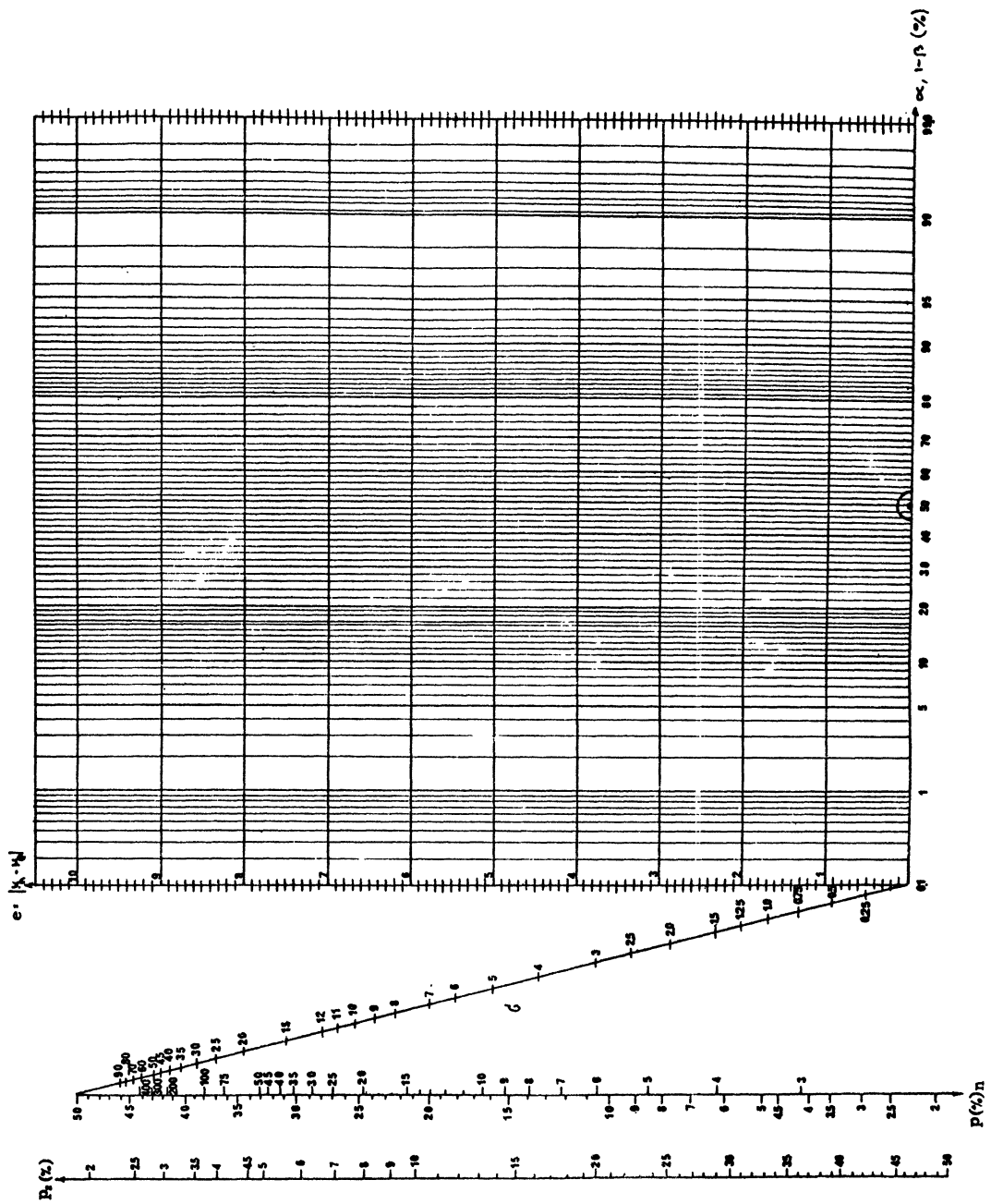
6/ Par le point d'intersection de cette parallèle avec la verticale $\alpha = 5$ %, mener une parallèle à l'axe horizontal et marquer son point d'intersection avec l'axe Ωe . La distance entre ce point et le point sur Ωe déterminé au § 1, mesurée sur l'échelle Ωe et trouvée égale à 6,75, est la valeur qu'il convient d'ajouter à la limite inférieure de tolérance (ou de soustraire de la limite supérieure) pour connaître le critère d'acceptation c , exprimé avec la même unité que σ et e .

7/ Joindre le point d'intersection de la parallèle à la diagonale du rectangle, avec l'échelle Ωe au point $\sigma = 4$. L'effectif de l'échantillon, soit $n = 20$, est lu sur l'échelle On .

Le calcul (formules (11) et (12)) donne :

$$n = 20,25 \rightarrow 20, \quad c = L + 6,756$$

Figure n° 5 - Nomogramme pour la détermination d'un plan d'échantillonnage simple par variables (Distribution normale d'écart-type connu).



Dans le cas où μ_e et μ_h sont déjà connus, le graphique se réduit aux constructions ci-après :

1/ Tracer l'horizontale d'ordonnée $e = |\mu_h - \mu_e|$, et les verticales issues des points $\alpha \%$, $(1 - \beta) \%$.

2/ Tracer la diagonale (α, e) , $(1 - \beta, e)$ et la parallèle à cette diagonale issue du point $(50, e = 0)$.

3/ Tracer une horizontale à partir du point d'intersection de cette parallèle avec la verticale α et marquer son intersection avec l'axe Ω_e . L'ordonnée de ce point est la valeur qu'il faut ajouter à μ_h , si $\mu_h < \mu_e$ ou soustraire de μ_h , si $\mu_h > \mu_e$, pour déterminer le critère d'acceptation c .

4/ L'effectif de l'échantillon est déterminé comme ci-dessus (§ 7).

CONCLUSIONS

Dès que le nomogramme a été construit et gradué avec des unités arbitraires pour e et Z , son utilisation permettra de déterminer rapidement les caractéristiques c et n de tout plan d'échantillonnage simple par mesures, répondant à des conditions données [p_1 , p_2 , α , β et L ou U] ou [α , β , μ_h , μ_e].

Un choix convenable des unités graphiques utilisées permettra d'obtenir toute précision désirée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BONFIGLIOLI, L. - "Nomographs" in S.G. Etingen, (ed.) Engineering Handbook, Volume I, pp. 144-152, Massadah, Tel-Aviv, 1964. (In Hebrew).
- [2] DUNCAN, ACHESON J. - Quality control and industrial statistics (3rd edition) Richard D. Irwin, Inc. Homewood, Ill. 1965.
- [3] STANGE K. - "Pläne für messende Prüfung. Teil 1 : Pläne für messende Prüfung bei bekannte Varianz der Fertigung" (Variables acceptance sampling with lots of known Variance), Qualitätskontrolle Operational Research, 5, No. 1, pp. 2-7, Januar 1960.
- [4] STANGE K. - "Détermination graphique de plans d'inspection par variables, au moyen du papier à double échelle gaussienne", Revue de Statistique Appliquée, X, No. 2, pp. 5-15, 1962.

CONSTRUCTION DE L'ABAQUE A POINTS ALIGNES

Cet abaque comporte six échelles, disposées et graduées ainsi qu'il est indiqué ci-après (fig. n° 7) :

1 - Echelle de probabilité normale

Cette échelle horizontale, se trouve dans des papiers d'usage courant (graphiques gaussio-arithmétiques). Graduée généralement à partir de 0,1 % ou 0,01 %, elle pourrait évidemment être graduée avec un module graphique différent à l'aide d'une table de la loi normale.

2 - Echelle e

C'est une échelle linéaire, graduée de 0 à 10 perpendiculaire à la précédente et dont l'origine est un point particulier de l'échelle de probabilité normale, par exemple le point coté 0,1 %.

3 - Echelle p_1 %

Echelle de probabilité normale parallèle à l'échelle e, à une distance quelconque, de module arbitraire, choisi de manière à utiliser au mieux le papier disponible. Echelle graduée vers le bas de 50 % à p_0 % (plus petite valeur pratiquement envisagée pour la valeur p_1 % qui pourra être utilisée).

Si l'on ne dispose pas directement d'une échelle de probabilité normale de module convenable, on graduera l'échelle p_1 % à l'aide d'une table de la loi normale cumulée.

Moyennant le choix d'une unité graphique convenable, par exemple 4 à 5 fois celle utilisée sur l'axe Ωe , le point coté p % sera situé à une distance $OM = Z_p$, Z_p étant défini par $1 - p = \int_{-\infty}^{Z_p} f(u) du$, $f(u)$ étant la fonction de densité de la loi normale réduite.

4 - Echelle p %

Echelle de probabilité normale identique à la précédente, mais dessinée sur bristol, de manière à constituer une réglette mobile pouvant s'appliquer sur l'échelle en p_1 %, de façon que le point 50 % coïncide avec la valeur p_1 % utilisée pour le test (les deux graduations étant de sens inverses).

5 - Echelle σ

Echelle dessinée sur la droite joignant le point zéro de l'échelle e au point 50 % de l'échelle p_1 %. Cette échelle sera graduée en valeurs de σ : un point coté σ étant défini par l'intersection du support de l'échelle avec la droite joignant p_1 au point correspondant d'ordonnée $Z_{p_1} \sigma$ de l'échelle e. Par exemple on pourra utiliser le faisceau des droites issues du point p_1 % = 15,9 % ($Z_{p_1} = 1$) et joignant ce point aux divers points $e = \sigma$ de l'échelle e.

La portion utile de cette graduation va du point $\sigma = e = 0$ au point de cote σ tel que $Z_{p_0} - \sigma = 10$ (l'unité de mesure choisie étant telle que $Z_{p_1} \sigma < 10$).

On peut aussi noter que si on mesure les longueurs sur $\Omega 0$ avec l'unité utilisée sur l'axe Ωe et si λ est le rapport de la mesure de l'unité graphique utilisée pour mesurer Z à celle utilisée sur l'axe Ωe on a pour le point coté σ sur $\Omega 0$:

$$\Omega S = \Omega 0 \frac{\sigma}{\sigma + \lambda}$$

6 - Echelle n

Cette échelle est graduée sur le même axe que p_1 , chaque point coté n de cette échelle étant l'intersection de l'axe p_1 % avec la droite joignant le point coté σ de l'échelle des écarts-types au point coté $e = 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de l'échelle e , si cette échelle a son origine au point coté $0,1$ % de l'échelle horizontale de probabilité normale.

Si pour graduer l'échelle p_1 % on a utilisé l'échelle métrique en Z , envisagée ci-dessus, le point coté n de l'échelle n se trouvera en N tel que $ON = Z_n \frac{3,09}{\sqrt{n}}$, mesuré avec l'unité choisie pour Z .