

F. BASTENAIRE

**Étude de la précision d'une méthode d'approximations successives pour la détermination d'un paramètre**

*Revue de statistique appliquée*, tome 1, n° 3-4 (1953), p. 63-73

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1953\\_\\_1\\_3-4\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_3-4_63_0)

© Société française de statistique, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDE DE LA PRÉCISION D'UNE MÉTHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR LA DÉTERMINATION D'UN PARAMÈTRE

par

**F. BASTENAIRE**

*Ingénieur de l'École de Physique et Chimie Industrielles,  
Statisticien de l'Institut de Recherches de la Sidérurgie*

*Les services d'études de l'Institut de Recherches de la Sidérurgie ayant été amenés à employer la méthode d'approximations successives de H. ROBBINS et S. MONRO dans des essais industriels, se sont préoccupés d'en déterminer la précision.*

*L'étude mathématique qui suit se rapporte à un cas particulier. Dans des cas plus généraux, les expériences pratiques réalisées sur des objets réels (voir dans ce numéro de la Revue de Statistique Appliquée, l'article: " Méthodes statistiques de détermination d'une caractéristique des aciers doux ") et des essais effectués en utilisant des tables de nombres aléatoires nous ont donné des résultats assez voisins de ceux que laissait attendre l'étude théorique.*

## 1. — RÉSUMÉ.

Soit  $f(x)$  l'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $Y$  dont la distribution est fonction du paramètre  $x$ . Autrement dit, soit  $y = f(x)$  l'équation de la courbe de régression de  $Y$  par rapport à  $X$ , supposée monotone et de forme mathématique inconnue. Si l'on veut trouver la valeur  $\theta$  de  $x$  telle que  $f(\theta) = A$  où  $A$  est une valeur donnée, on peut utiliser la méthode d'approximations successives indiquée par H. ROBBINS et S. MONRO (1).

Ces auteurs ont démontré la convergence du processus qu'ils proposent en se basant sur des hypothèses assez larges, mais ils n'ont pas indiqué la précision et l'efficacité de cette méthode.

Nous donnons ici les expressions de l'écart-type et du biais de l'estimation de  $\theta$  au bout de  $n$  opérations dans un cas particulier.

## 2. — INTRODUCTION.

Soit  $\Pr [Y(x) \leq y] = H(y/x)$

la fonction de distribution de la variable aléatoire  $Y$  ;

---

(1) H. ROBBINS et S. MONRO : « A stochastic approximation method ». Ann. of. Math. Stat., 22 (1951), pp 400-407.

J. WOLFOWITZ a, dans un autre article (1), élargi les hypothèses utilisées par H. ROBBINS et S. MONRO, et nous les indiquons ici :

(1) Il existe deux constantes C et  $\sigma^2$  telles que

$$|f(x)| \leq C \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [y - f(x)]^2 dH(y/x) \leq \sigma^2 .$$

(2) ou bien

$$\begin{aligned} f(x) &\leq A - \delta && \text{pour } x < \theta \\ f(x) &\geq A + \delta && \text{pour } x > \theta \end{aligned}$$

$\delta$  étant une constante positive.

ou bien

$$\begin{aligned} f(x) &< A && \text{pour } x < \theta \\ f(x) &= A && \text{pour } x = \theta \\ f(x) &> A && \text{pour } x > \theta \end{aligned}$$

et il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(x)$  soit strictement croissante pour  $|x - \theta| < \delta$ , et  $\inf |f(x) - A| > 0$  pour  $|x - \theta| \geq \delta$

(3) La suite des coefficients  $a_n$  positifs dont nous verrons l'utilité est telle que la série de terme général  $a_n$  est divergente tandis que la série de terme général  $a_n^2$  est convergente,

Soit alors la chaîne de Markoff définie par les relations

$$x_{n+1} = x_n + a_n (A - y_n)$$

où  $y_n$  est une variable aléatoire distribuée selon la loi définie par la fonction  $H(y/x_n)$ .

Alors la variable aléatoire  $x_n$  converge en probabilité vers la valeur  $x = \theta$  telle que  $f(x) = A$ .

### 3. — ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DANS UN CAS PARTICULIER.

Pour appliquer pratiquement cette méthode de détermination de la valeur  $x = \theta$  telle que  $f(x) = A$ , il est nécessaire d'en connaître la précision. Nous allons calculer la dispersion de l'estimation  $x_n$  en supposant que

1)  $f(x)$  est une fonction linéaire de  $x$  ;

2) La variable aléatoire  $Y$  est distribuée normalement autour de  $f(x)$  avec un écart-type  $\sigma$  constant.

En effet, dans la pratique, il arrive souvent que l'on puisse assimiler  $f(x)$  à sa tangente et lorsque  $\sigma$  varie, on aura un renseignement sur la précision minimum à escompter en prenant la valeur maximum de  $\sigma$  dans l'intervalle où l'on travaille.

Soit donc  $x_1$  un nombre théoriquement arbitraire, mais choisi pratiquement aussi voisin que possible de la valeur  $\theta$  cherchée, et soit la suite :

$$\begin{aligned} 3/1 \quad x_2 &= x_1 + a_1 (A - y_1) \\ x_3 &= x_2 + a_2 (A - y_2) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{i+1} &= x_i + a_i (A - y_i) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= x_n + a_n (A - y_n) \end{aligned}$$

(1) J. WOLFOWITZ : On the stochastic approximation method of Robbins and Monro. Ann. of. Math Stat. 23, n° 3, pp. 457-461.

où  $y_i = \alpha x_i + \beta + \varepsilon_i$  est le résultat d'une épreuve effectuée en  $x = x_i$ . Les coefficients  $\alpha, \beta$  sont ceux de la droite  $y = f(x)$  et les  $\varepsilon_i$  les valeurs prises au cours des  $n$  épreuves par des variables normales indépendantes, de moyenne nulle, d'écart-type  $\sigma$  constant.

Il vient

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a_n (A - \alpha x_n - \beta - \varepsilon_n) \\ &= x_n (1 - a_n \alpha) + a_n (A - \beta - \varepsilon_n) \end{aligned}$$

et la suite s'écrit :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 (1 - a_1 \alpha) + a_1 (A - \beta - \varepsilon_1) \\ x_3 &= x_2 (1 - a_2 \alpha) + a_2 (A - \beta - \varepsilon_2) \\ \dots & \\ (3.1)' \quad \dots & \\ x_{n+1} &= x_n (1 - a_n \alpha) + a_n (A - \beta - \varepsilon_n) \end{aligned}$$

En multipliant la première ligne par :

$$(1 - a_n \alpha) (1 - a_{n-1} \alpha) \dots (1 - a_2 \alpha)$$

la seconde par :

$$(1 - a_n \alpha) (1 - a_{n-1} \alpha) \dots (1 - a_3 \alpha)$$

la  $(n-1)^{\text{ème}}$  par :

$$(1 - a_n \alpha)$$

en laissant la  $n^{\text{ème}}$  inchangée, et en additionnant, on exprime  $x_{n+1}$  en fonction de  $n$  variables aléatoires indépendantes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  :

$$\begin{aligned} (3.2) \quad x_{n+1} &= x_1 (1 - a_n \alpha) (1 - a_{n-1} \alpha) \dots (1 - a_1 \alpha) + \\ & a_1 (A - \beta - \varepsilon_1) (1 - a_n \alpha) \dots (1 - a_2 \alpha) + \\ & a_2 (A - \beta - \varepsilon_2) (1 - a_n \alpha) \dots (1 - a_3 \alpha) + \\ & \dots \\ & a_{n-1} (A - \beta - \varepsilon_{n-1}) (1 - a_n \alpha) + a_n (A - \beta - \varepsilon_n) \end{aligned}$$

(ultérieurement, nous tiendrons compte de la relation  $A = \alpha \theta + \beta$  et nous remplacerons  $(A - \beta)$  par  $\alpha \theta$  dans l'expression de  $x_{n+1}$ ).

**Espérance mathématique de  $x_{n+1}$ .**

Tout d'abord  $E[x_2] = x_1 (1 - a_1 \alpha) + a_1 \alpha \theta$  puisque  $E[\varepsilon_1] = 0$ .

Donc, si  $x_1 = \theta$ ,  $E[x_2] = \theta$ .

$$E[x_3] = (1 - a_2 \alpha) E[x_2] + a_2 \alpha \theta$$

et si  $E[x_2] = \theta$ , alors  $E[x_3]$  est aussi égal à  $\theta$ .

Il en est évidemment de même pour  $x_{n+1}$

$$E[x_{n+1}] = (1 - a_n \alpha) E[x_n] + a_n \alpha \theta$$

$$\text{et} \quad E[x_{n+1}] = \theta \quad \text{si} \quad E[x_n] = \theta$$

D'après (3.2), en remplaçant  $x_1$  par  $\theta$  et tous les  $\varepsilon_i$  par 0, c'est-à-dire en prenant l'espérance mathématique de  $x_{n+1}$  pour  $x_1 = \theta$  on a donc :

$$E [x_{n+1}] = \theta (1 - a_n \alpha)(1 - a_{n-1} \alpha) \dots (1 - a_1 \alpha) + \\ a_1 \alpha \theta (1 - a_n \alpha) \dots (1 - a_2 \alpha) + \\ a_2 \alpha \theta (1 - a_n \alpha) \dots (1 - a_3 \alpha) + \\ \dots \\ a_{n-1} \alpha \theta (1 - a_n \alpha) + a_n \alpha \theta = \theta$$

et si  $x_1$  est différent de  $\theta$ , on aura en remplaçant  $x_1$  par  $x_1 - \theta + \theta$  dans (3.2), et en tenant compte du résultat précédent

$$(3.3) \quad E [x_{n+1}] = \theta + (x_1 - \theta)(1 - a_n \alpha)(1 - a_{n-1} \alpha) \dots (1 - a_1 \alpha)$$

Remarquons que le produit infini tend vers zéro, lorsque la série de terme général  $a_n$  est divergente.

#### Minimisation de la variance de $x_{n+1}$ .

D'après (3.2) et étant donné l'indépendance des  $\varepsilon_i$ , on a

$$(3.4) \quad V(x_{n+1}) = \sigma^2 [a_1^2 (1 - a_n \alpha)^2 \dots (1 - a_2 \alpha)^2 + \\ a_2^2 (1 - a_n \alpha)^2 \dots (1 - a_3 \alpha)^2 + \\ \dots \\ a_{n-1}^2 (1 - a_n \alpha)^2 + a_n^2]$$

$\sigma^2$  étant une constante, nous allons étudier les quantités entre crochets en posant

$$\mu_{n+1} = \frac{V(x_{n+1})}{\sigma^2}$$

Entre  $\mu_n$  et  $\mu_{n+1}$ , on a la relation

$$(3.5) \quad \mu_{n+1} = \mu_n (1 - a_n \alpha)^2 + a_n^2$$

valable à partir de  $n = 2$  si l'on pose  $\mu_2 = a_2^2$ .

Nous allons montrer que le minimum de  $\mu_{n+1}$  s'obtient en partant du minimum de  $\mu_n$  et en cherchant la valeur de  $a_n$  qui rend  $\mu_{n+1}$  minimum lorsque  $\mu_n$  est ainsi donné ; c'est-à-dire que lorsque des valeurs de  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (soumises d'ailleurs, sauf  $a_n$ , à n'importe quelles autres conditions) rendent  $\mu_{n+1}$  minimum, les quantités  $\mu_n, \mu_{n-1}, \dots$  qui ne dépendent que de  $(n-1), (n-2), \dots$  termes  $a_i$  sont également minimum.

$\mu_{n+1}$  est un trinôme du second degré en  $a_n$  et il est minimum pour

$$a_n = \frac{\alpha \mu_n}{1 + \mu_n \alpha^2}.$$

il prend alors la valeur

$$(3.6) \quad \mu_{n+1} = \frac{\mu_n}{1 + \alpha^2 \mu_n}.$$

Soit  $\bar{\mu}_n$  le minimum de  $\mu_n$  (qui existe sûrement puisque  $\mu_n \geq 0$ ) et supposons qu'il existe un couple  $a_n, \mu_n$ , tel que

$$\mu_{n+1}(a_n, \mu_n) < \frac{\bar{\mu}_n}{1 + \alpha^2 \bar{\mu}_n}$$

on aurait

$$\mu_n (1 - a_n \alpha)^2 + a_n^2 < \frac{\bar{\mu}_n}{1 + \alpha^2 \bar{\mu}_n}$$

et

$$(\mu_n - \bar{\mu}_n)(1 - a_n \alpha)^2 + \bar{\mu}_n (1 - a_n \alpha)^2 + a_n^2 < \frac{\bar{\mu}_n}{1 + \alpha^2 \bar{\mu}_n}$$

Or, la somme du 2<sup>e</sup> et du 3<sup>e</sup> terme est toujours supérieure au second nombre sauf pour

$$a_n = \frac{\alpha \bar{\mu}_n}{1 + \bar{\mu}_n \alpha^2}$$

où il y a égalité.

Quant au premier terme, il est essentiellement positif ou nul, puisque  $\mu_n \geq \bar{\mu}_n$ , donc le minimum absolu de  $\mu_{n+1}$  correspond bien à

$$\mu_n = \bar{\mu}_n \text{ et } a_n = \frac{\alpha \bar{\mu}_n}{1 + \bar{\mu}_n \alpha^2}$$

Ceci signifie qu'ayant choisi arbitrairement un nombre fini de termes de la suite (et en particulier, en pratique,  $a_1$ ), on peut compléter celle-ci par des termes  $a_i$  qui rendent **en même temps** toutes les variances minimum, compte tenu des conditions imposées.

### Expression de la variance minimum.

L'équation (3.6) fournit une relation de récurrence. On obtient ainsi, si l'on choisit arbitrairement le 1<sup>er</sup> terme  $a_1$ , seulement

$$\mu_3 = \frac{\mu_2}{1 + \alpha^2 \mu_2}$$

$$\mu_4 = \frac{\mu_3}{1 + \alpha^2 \mu_3} = \frac{\mu_2}{1 + 2\alpha^2 \mu_2} \text{ etc...}$$

Il apparaît plus généralement que si

$$\mu_n = \frac{\mu_2}{1 + (n-2)\alpha^2 \mu_2}$$

et comme

$$\mu_{n+1} = \frac{\mu_n}{1 + \alpha^2 \mu_n}$$

on a

$$(3.7) \quad \mu_{n+1} = \frac{\mu_2}{1 + (n-1)\alpha^2 \mu_2}$$

comme

$$\mu_2 = a_1^2$$

$$(3.7)' \quad \mu_{n+1} = \frac{a_1^2}{1 + (n-1)\alpha^2 a_1^2}$$

### Expression des coefficients $a_i$ .

La suite des coefficients  $a_n$  existe car elle est déterminée par les conditions de minimum précédentes (Relation 3.5).

Nous avons ainsi obtenu :

$$a_n = \frac{\alpha \bar{\mu}_n}{1 + \alpha^2 \bar{\mu}_n}$$

Ces coefficients peuvent être déterminés soit en établissant entre eux une relation de récurrence et en recherchant ensuite l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ , comme nous l'avons fait pour  $\mu_n$ , soit plus rapidement en utilisant l'expression de  $\mu_n$ .

De cette façon, on obtient

$$a_n = \frac{\alpha \mu_2}{1 + (n-1) \alpha^2 \mu_2}$$

c'est-à-dire que lorsque l'on s'est donné le premier terme  $a_1$ , il faut choisir

$$(3.8) \quad a_n = \frac{\alpha a_1^2}{1 + (n-1) \alpha^2 a_1^2}$$

pour minimiser la variance de tous les  $x_n$ .

On constate que les  $a_n$  sont positifs et forment une série divergente car

$$a_n = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{(n-1) + \frac{1}{\alpha^2 a_1^2}} \right]$$

et que  $\frac{1}{(n-1) + \frac{1}{\alpha^2 a_1^2}}$  est supérieur au terme de rang  $n-1 + K$  de la série harmonique,

$K$  désignant le plus petit entier tel que  $K \geq \frac{1}{\alpha^2 a_1^2}$

Enfin, la série  $a_n^2$  est convergente car  $a_n^2 < \frac{1}{\alpha^2 (n-1)^2}$

#### 4. — APPLICATION PRATIQUE A L'ESTIMATION DE $\theta$ .

**Biais de l'estimation de  $\theta$  .**

D'après (3.3) le biais  $B$  est égal à

$$(x_1 - \theta)(1 - a_n \alpha)(1 - a_{n-1} \alpha) \dots (1 - a_1 \alpha)$$

Il est d'autant plus faible que l'on a mieux « deviné » la valeur de  $\theta$  et nul si  $x_1 = \theta$  ; il tend vers zéro avec  $n$ , ce qui, conjointement à la décroissance de l'écart-type, assure la convergence en probabilité. Enfin, il est nul quel que soit  $n$  si on a choisi  $a_1 = \frac{1}{\alpha}$  .

Dans ce cas, d'après (3.8) l'expression de  $a_n$  est particulièrement simple puisqu'alors  $a_n = \frac{1}{\alpha n}$  .

Pratiquement, cependant, on ne connaît pas  $\alpha$  qui est la pente de la droite dont on ignore les paramètres.

Soit alors  $\beta$  une évaluation de  $\alpha$  jugée la meilleure possible, on prendra  $a_1 = \frac{1}{\beta}$  .

D'après (3.8), le choix de  $a_1$  étant ainsi fait, on devrait prendre

$$a_n = \frac{\alpha / \beta^2}{1 + (n-1) \alpha^2 / \beta^2}$$

Ici encore, on ne connaît pas  $\alpha$  et comme on ne peut se contredire, on garde  $\beta$  partout et il vient

$$(4.1) \quad a_1 = \frac{1}{\beta} \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{\beta n}$$

On ne se trouve plus, de ce fait, dans les conditions optimum et il faut savoir comment l'estimation de  $\theta$  s'en trouve affectée.

Pour ce qui est du biais, il suffit de remplacer les  $a_i$  par leurs valeurs. On a

$$B = E \left[ x_{n+1} - \theta \right] = (x_1 - \theta) \left(1 - \frac{\alpha}{\beta n}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\beta (n-1)}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Posons  $\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon$  qui est généralement voisin de 1.

Nous allons chercher une limitation de  $B$ .

Observons d'abord que

$$\left| \left(1 - \frac{\varepsilon}{K}\right) \right| < e^{-\frac{\varepsilon}{K}}$$

quel que soit  $\frac{\varepsilon}{K} < 1$  cette limitation étant d'autant meilleure que  $\frac{\varepsilon}{K}$  est petit. Pour  $K$  faible, on gardera quelques termes sous la forme  $1 - \frac{\varepsilon}{K}$ , en vue d'améliorer la limitation.

On a ainsi, par exemple, en supposant  $\varepsilon < 2$

$$|B| < |x_1 - \theta| e^{-\frac{\varepsilon}{n}} e^{-\frac{\varepsilon}{n-1}} \dots e^{-\frac{\varepsilon}{3}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) |1 - \varepsilon|$$

$$< |x_1 - \theta| e^{-\frac{\varepsilon}{3} \frac{n+1}{n}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) |1 - \varepsilon|$$

On sait que la somme des  $n$  premiers termes de la série harmonique  $\frac{1}{n}$  est un infiniment grand équivalent à  $\text{Log}_e n$ . En fait, on a l'inégalité

$$\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \int_3^{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \log_e \left(\frac{n+1}{3}\right)$$

On en tire la formule

$$(4.2) \quad |B| < |x_1 - \theta| \frac{|1 - \varepsilon| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{3}\right)^\varepsilon}$$

Quant au signe de ce biais, on le déduit de la formule exacte. Si  $\varepsilon < 1$ ,  $B$  a le signe de  $(x_1 - \theta)$ , et si  $\varepsilon > 1$ , il a le signe contraire.

#### Applications numériques.

On trouve ainsi pour  $\varepsilon = 0,7$ ,  $n + 1 = 16$

$$\frac{|1 - \varepsilon| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{3}\right)^\varepsilon} = 0,06$$

Ce qui veut dire qu'au bout de 16 expériences, le biais se trouve réduit aux  $\frac{6}{100}$  de sa valeur initiale.

Pour  $\varepsilon = 1,3$

$$\frac{|1 - \varepsilon| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{3}\right)^\varepsilon} = 0,011$$

On voit donc que même avec une erreur importante (30 %) sur l'estimation de  $\alpha$ , l'erreur systématique est faible.

#### Ecart-type de l'estimation de $\theta$ .

Nous avons vu que les coefficients devraient être choisis égaux à

$$a_n = \frac{\alpha a_1^2}{1 + (n-1)\alpha^2 a_1^2}$$

Si l'on connaissait  $\alpha$  et que l'on choisisse  $a_1 = \frac{1}{\alpha}$  pour rendre nulle l'erreur systématique commise sur  $x_n$  dès que  $n = 2$  (c'est-à-dire à la première épreuve), on aurait d'après (3.8):

$$a_2 = \frac{1}{2\alpha} \quad a_3 = \frac{1}{3\alpha} \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{n\alpha}$$

On rendrait de cette façon, toutes les variances minimum lorsque la condition  $a_1 = \frac{1}{\alpha}$  est imposée, et l'on aurait d'ailleurs d'après (3.7)

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\alpha^2 n}$$

ou encore

$$(4,3) \quad V(x_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{n \alpha^2}$$

La précision de l'estimation  $x_{n+1}$  de  $\theta$  croît donc comme la racine carrée du nombre des essais.

Comme  $\alpha$  n'est pas connu, nous avons vu que les coefficients  $a_i$  utilisés sont de la forme

$a_i = \frac{1}{\beta^i}$  où  $\beta$  est une évaluation de  $\alpha$ .

La variance vraie peut alors se déduire de (3.4). Son expression est donc complexe et nous nous contenterons de la développer en série entière pour voir comment cette variance varie en fonction de  $\varepsilon$ .

On a

$$V(x_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \varepsilon^2 \left[ 1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{n-1}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \dots \right. \\ \left. \frac{1}{j^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{n-1}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{\varepsilon}{j+1}\right)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2} \right]$$

La dérivée du  $j^{\text{ième}}$  terme est pour  $\varepsilon = 1$  égale à

$$-2 \left[ \frac{1}{(n-1)n^2} + \frac{1}{(n-2)n^2} + \dots + \frac{1}{n^2 j} \right]$$

et on observe qu'en dérivant les différents termes de la variance, la quantité  $\frac{-2}{(n-1)n^2}$  est obtenue  $(n-1)$  fois, la quantité  $\frac{-2}{(n-2)n^2}$  est obtenue  $(n-2)$  fois, etc...

La dérivée de la quantité entre crochets est donc égale à  $\frac{-2(n-1)}{n^2}$  pour  $\varepsilon = 1$ .

En tenant compte maintenant du premier facteur  $\frac{\sigma^2 \varepsilon^2}{\alpha^2}$

$$\left[ \frac{dV}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=1} = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{2(n-1)}{n^2} = \frac{2\sigma^2}{n^2 \alpha^2}$$

En utilisant la formule des accroissements finis :

$$V(x_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{n \alpha^2} \left[ 1 + \frac{2(\varepsilon-1)}{n} \right]$$

Cette formule commode permet de donner un ordre de grandeur de la variation de la variance quand on s'est trompé sur  $\alpha$  d'une quantité définie par  $\varepsilon$ . Si, par exemple, on a surestimé  $\alpha$  de 5%,  $\varepsilon = 1,05$  et la variance de  $x_{n+1}$  se trouve augmentée de 0,007 de sa valeur seulement pour 16 observations.

### Étude de l'erreur totale.

L'erreur totale qui intéresse pratiquement l'expérimentateur est, en fait, la somme du biais et de l'erreur aléatoire.

En pratique,  $\theta$  n'est pas connu et la première évaluation  $x_1$  peut être plus ou moins heureuse.

Nous allons étudier rapidement l'influence du choix de  $x_1$  sur la précision finale.

L'expérimentateur ne connaît pas  $\theta$  exactement, mais il n'en est pas totalement ignorant. Nous supposons que l'ensemble des valeurs  $x_1$  proposées par une population d'expérimentateurs est répartie suivant une loi normale de moyenne  $m_1$ , d'écart-type  $\sigma_1$ .

Dans ces conditions, si  $\varepsilon$  n'est pas égal à 1 (c'est-à-dire si  $\beta \neq \alpha$ ) l'expression du biais qui, d'après (3.3) est

$$B = (x_1 - \theta) \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{n-1}\right) \dots \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (1 - \varepsilon) \right]$$

peut être dérivée en  $\varepsilon$  et l'on a en première approximation d'après la formule des accroissements finis

$$B \approx -(x_1 - \theta) \frac{(\varepsilon-1)}{n}$$

expression valable pour  $\varepsilon$  voisin de 1.

Dès lors, si  $x_1$  est aléatoire :

$$V(B) = \sigma_1^2 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{n^2}$$

et le « biais moyen » de B

$$B(B) = - (m_1 - \theta) \frac{(\varepsilon - 1)}{n}$$

Quant à la variance totale de  $x_{n+1}$  résultat obtenu après n opérations dont la première  $x_1$  est aussi aléatoire (et indépendante des autres) elle est :

$$V_T(x_{n+1}) = \sigma_1^2 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n \alpha^2} + \frac{2(\varepsilon - 1) \sigma^2}{n^2 \alpha^2}$$

c'est un trinôme du second degré et il est intéressant de constater qu'il n'est pas minimum lorsque  $\varepsilon = 1$ , c'est-à-dire lorsque l'on ne s'est pas trompé du tout sur  $\alpha$ .

Bien que les formules ne soient pas exactes, il est clair que pour  $(\varepsilon - 1)$  suffisamment petit, c'est le terme linéaire qui est prépondérant et l'on voit qu'on peut trouver des valeurs de  $\varepsilon - 1$  qui tendent à faire diminuer la variance totale  $V_T$ . En fait, il faudra prendre  $(\varepsilon - 1) < 0$ , c'est-à-dire  $\beta > \alpha$ .

Cette situation paradoxale s'explique intuitivement. Si l'on adoptait pour  $\beta$  la valeur  $\alpha$  en toutes circonstances, on peut voir que le fait d'avoir un expérimentateur très bien renseigné sur  $\theta$  à priori ne servirait à rien. Dès la 1<sup>ère</sup> expérience, l'importance du coefficient  $a_1$  donnerait à  $x_2$  une très grande dispersion, et l'on sait bien que si  $\sigma_1$  est petit, c'est-à-dire si l'on est déjà a priori bien renseigné sur  $\theta$ , il n'y a pas d'intérêt à « disperser le tir », mais au contraire à prendre  $\beta > \alpha$ , ce qui a pour effet d'éviter de grands écarts dès les premières épreuves.

Il y a d'ailleurs un optimum que nos formules simples ne permettent pas de calculer, et il est intéressant de noter ici l'incidence d'une connaissance a priori sur une méthode d'estimation d'un paramètre.

De telles particularités se produisent dans tous les problèmes de régression (régression linéaire, probit analysis) où le choix des valeurs de  $x$  influe sur la précision des estimations.

## 5. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA MÉTHODE SUR DES NOMBRES ALÉATOIRES.

Nous venons d'étudier en détail la convergence de  $x_n$  vers  $\theta$  dans un cas particulier, mais nous avons déjà signalé que la méthode est très générale (voir l'énoncé des hypothèses dans l'introduction). Elle est, en particulier, applicable à des distributions conditionnelles discrètes comme la distribution binômiale par exemple et permet de déterminer par approximations successives la valeur  $\theta$  du paramètre  $x$  pour laquelle la probabilité  $p(x)$  d'un événement de probabilité variable est égale à une valeur  $p_0$  fixée d'avance.

Lorsqu'une probabilité  $p(x)$  varie en fonction d'un paramètre  $x$ , l'une des circonstances la plus fréquemment rencontrée est que :

$$p(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}} dz$$

La courbe représentative de  $p(x)$  est alors une courbe en « S » de Galton dont les paramètres  $m$  et  $\sigma$  sont souvent déterminés par les méthodes de « probit » (1).

On peut appliquer la méthode de ROBBINS et MONRO à la recherche de  $\theta$  en effectuant pour chacune des valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de la suite un nombre constant  $m$  déterminé d'essais.

On déduira  $x_{n+1}$  de  $x_n$  par la formule :

$$(5.1) \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\alpha n} (p_0 - p_n)$$

$p_n$  désignant la fréquence expérimentale observée en  $x_n$ .

(1) On peut citer comme exemple pratique celui qui est traité dans l'article de la Revue de Statistique appliquée « Méthodes statistiques de détermination d'une caractéristique des aciers doux ».

Pour  $\alpha$  on peut, par analogie avec la régression linéaire, prendre la pente de la courbe  $\left[ \frac{dp}{dx} \right]_{x=\theta}$  au point cherché. On trouve que :

$$\alpha = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Comme  $p_0$  ne dépend que de « l'écart-réduit »  $t = \frac{\theta-m}{\sigma}$  la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

qui est la dérivée de la courbe en « S » réduite, ne dépend que de  $p_0$  et se trouve d'ailleurs dans la plupart des tables de la loi de Gauss.

Pour déterminer, par exemple, la valeur  $\theta$  de  $x$  pour laquelle  $p(x) = 0,50$ , on aura :

$$\theta = m, \quad t = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

On connaît souvent, par des essais préliminaires s'il le faut, l'ordre de grandeur du coefficient  $\sigma$  qui caractérise l'étalement de la courbe en S. Le processus d'approximations se trouve alors entièrement fixé.

En appliquant la formule (4.3) que nous avons obtenue dans le cas de la régression linéaire, on obtient pour la variance de l'estimation  $x_{n+1}$  de  $\theta$  :

$$(5.2) \quad V(x_{n+1}) = \frac{p_0(1-p_0)}{nm} \cdot 2\pi\sigma^2 e^{\frac{(\theta-m)^2}{\sigma^2}}$$

la variance de la loi binômiale conditionnelle étant introduite par  $\frac{p_0(1-p_0)}{m}$

L'application de la formule (4.3) au cas présent est une extrapolation hasardeuse, aussi nous sommes-nous livrés à une vérification expérimentale en utilisant des nombres aléatoires distribués indépendamment selon une loi normale. En prenant des séries de  $m$  nombres aléatoires consécutifs dans une table et en comptant dans chaque série ceux qui sont inférieurs à  $x_n$ , on obtient ainsi automatiquement le résultat d'un tirage dans une population binômiale où la probabilité  $p(x_n)$  est

$$p(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}} dz$$

conforme à la loi de Galton,  $m'$  et  $\sigma'$  désignant la moyenne et l'écart-type des nombre de la table.

TABLEAU I  
Caractéristiques de l'estimation  $x_{n+1}$  de  $\theta$

$x_1$	$n = 5$			$n = 10$		
	$\sigma_{n+1}$	$s_{n+1}$	$\bar{x}_{n+1}$	$\sigma_{n+1}$	$s_{n+1}$	$\bar{x}_{n+1}$
0,5	0,25	0,224	- 0,0028	0,177	0,165	- 0,0082
1	0,25	0,220	- 0,0048	0,177	0,153	- 0,0080
2	0,25	0,216	0,191	0,177	0,122	- 0,083

$\sigma_{n+1}$  : écart-type théorique (formule 5.2) ;

$s_{n+1}$  : écart-type expérimental ;

$\bar{x}_{n+1}$  : moyenne arithmétique de vingt valeurs expérimentales de  $x_{n+1}$  ;

Valeur de  $x$  recherchée:  $p(x) = 0,5$ .

La valeur de  $p_n$  trouvée permet de calculer  $x_{n+1}$  au moyen de la formule (5.1) et il n'y a plus qu'à recommencer jusqu'à ce que l'on ait effectué au total un nombre d'essais déterminé.

On vérifie d'après la formule (5.1) que les processus relatifs à différentes lois de Gauss obéissent à la loi de similitude et l'étude expérimentale peut être effectuée sur des nombres aléatoires tirés d'une population de moyenne nulle et d'écart-type unité.

Le tableau I donne la valeur moyenne expérimentale du dernier résultat  $x_{n+1}$  et son écart-

type expérimental obtenu d'après vingt répétitions indépendantes du même processus d'approximations. Tous les résultats du tableau sont exprimés en écart-types.

Les processus étudiés correspondent soit à 5 séries de 5 essais ( $m = 5, n = 5$ ) soit à 10 séries de 5 ( $m = 5, n = 10$ ). L'influence du choix de  $x_1$  a été étudiée en prenant un demi, un ou deux écart-types. On voit que les écart-types observés sont en bon accord avec les écart-types théoriques calculés d'après (5.2).

Le biais de  $x_{n+1}$  est négligeable, sauf pour  $x_1 = 2$  écart-types, mais on peut diminuer  $m$ , car si la formule (5.2) laisse attendre que  $\sigma_{n+1}$  ne dépend que du produit  $mn$ , le biais est d'autant plus faible que  $n$  est plus grand. Pour un nombre total d'essais fixé, ceci revient à diminuer  $m$ . Rien ne s'oppose même à prendre  $m = 1$  et ce sont des raisons de commodité (gain de temps le plus souvent) qui conduisent à prendre la plus grande valeur de  $m$  compatible avec un biais donné.

## CONCLUSION.

La méthode d'approximations successives de ROBBINS et MONRO permet, dans le cas où il y a régression linéaire d'une variable  $y$  par rapport à  $x$  avec écart-type lié constant, de former une estimation de la valeur  $\theta$  de  $x$  telle que  $f(\theta) = A$  avec un écart-type de l'ordre de  $\frac{\sigma}{\alpha\sqrt{n}}$  où  $\sigma$  représente l'écart-type lié,  $\alpha$  la pente de la droite et  $n$  le nombre d'expériences successives.

L'erreur systématique qui affecte cette estimation est bornée supérieurement par la quantité

$$\left| (x_1 - \theta) = \frac{(1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{3}\right)^\varepsilon} \right|$$

où  $x_1$  désigne la valeur de  $x$  pour laquelle le premier essai est effectué, et où  $\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $\beta$  désignant une évaluation du coefficient  $\alpha$  généralement inconnu figurant dans les coefficients

$$a_1 = \frac{1}{\beta} \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{n\beta}$$

qui déterminent la suite des essais.

Des expériences effectuées en se servant de tables de nombres aléatoires nous ont, d'autre part, montré que la méthode donne des résultats très satisfaisants lorsqu'il s'agit de déterminer l'abscisse correspondant à une ordonnée fixée d'avance d'une courbe en S de Galton.

Cette méthode est à la fois plus précise et plus simple que les méthodes classiques utilisées dans ces problèmes, mais elle ne permet pas d'obtenir une estimation du paramètre  $\sigma$  de la courbe en S à moins d'être appliquée en deux points différents.