RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

DOMINIQUE LEPELLEY

LAURENT VIDU

Règles positionnelles itératives, principe majoritaire et préférences unimodales

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 34, n° 3 (2000), p. 347-362

<http://www.numdam.org/item?id=RO_2000__34_3_347_0>

RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **34** (2000) 347-362

RÈGLES POSITIONNELLES ITÉRATIVES, PRINCIPE MAJORITAIRE ET PRÉFÉRENCES UNIMODALES (*)

par Dominique LEPELLEY ([1]) et Laurent VIDU ([1])

Communiqué par Jean-Yves JAFFRAY

Résumé. – *Les règles positionnelles itératives sont des règles de choix collectif procédant par éliminations successives et dans lesquelles le score des options est calculé sur la base des positions qu'elles occupent dans les ordres de préférence des individus prenant part à la décision collective. Le présent article se propose d'étudier l'aptitude de ces règles à choisir l'option majoritaire (ou fortement majoritaire) lorsque les préférences des individus sont unimodales.*

Mots clés : Choix social, règles de vote, critère de Condorcet, unimodalité.

Abstract. – *Sequential scoring rules are multi-stage social choice rules that work as follows: at each stage of the process, a score is computed for each alternative by taking into account its position in the individual preference rankings, and the alternative with the lowest score is eliminated. The current paper studies the ability of these rules for choosing the Condorcet winner (or the strong Condorcet winner) when individual preferences are single-peaked.*

1. INTRODUCTION

Comment une société peut-elle choisir collectivement ? Selon quelles règles peut-on déduire une préférence collective des préférences individuelles ? Ces questions, qui sont au cœur de la théorie du choix social, ont suscité de nombreux débats et les réponses qui leur ont été apportées sont d'une grande diversité. On peut cependant regrouper les principales règles proposées et/ou utilisées dans la pratique des choix collectifs en deux grandes catégories (Moulin 1988, p. 227). La première réunit les procédures fondées sur le principe majoritaire ; ces procédures ont en commun de vérifier ce que l'on appelle aujourd'hui le critère de Condorcet, qui stipule que si l'une des options soumises au choix est capable de battre toutes ses concurrentes dans des duels à la majorité des voix, alors cette option doit constituer le choix collectif (une telle option sera qualifiée de *majoritaire* dans ce qui suit).

(*) Reçu en novembre 1998.
([1]) CREME, Université de Caen, 14032 Caen Cedex, France.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/00/03/$ 7.00

Les processus de décision en usage dans les parlements relèvent généralement de cette catégorie, au même titre que la règle de Copeland qui consiste à confronter toutes les options deux à deux et à retenir celle qui obtient le maximum de victoires dans les duels majoritaires. La seconde catégorie regroupe les règles dites positionnelles. Ces règles attribuent des points aux différentes options en fonction des positions qu'elles occupent dans les ordres de préférence des individus prenant part à la décision collective ; l'option qui recueille le total de points le plus élevé est alors choisie. L'exemple le plus significatif dans cette catégorie est la règle suggérée par Borda qui, lorsque m options sont en présence, attribue $m - j$ points à chaque fois qu'une option occupe une $j^{\text{ème}}$ position.

Les logiques qui sous-tendent ces deux catégories de règles sont malheureusement conflictuelles. Considérons, pour s'en convaincre, dix-sept individus devant choisir une option dans un ensemble de trois options $\{a, b, c\}$. Les préférences de ces individus se répartissent de la manière suivante :

6	**3**	**4**	**4**
a	c	b	b
b	a	a	c
c	b	c	a

ce qui signifie que six individus préfèrent a à b, b à c et a à c (les préférences sont transitives), trois préfèrent c à a et a à b etc. Dans des duels à la majorité des voix, l'option a l'emporte sur l'option b (par 9 voix contre 8) ainsi que sur l'option c (par 10 voix contre 7). L'option a est donc *majoritaire*, au sens défini ci-dessus. Or l'application de n'importe quel système positionnel conduirait dans cet exemple à l'élection de l'option b[1].

Cet exemple, qui met en évidence le conflit opposant l'approche positionnelle à la Borda au principe de Condorcet, appelle deux observations.

1) Il est possible – au moins dans l'exemple considéré – de réconcilier Borda et Condorcet en appliquant l'approche positionnelle dans le cadre d'un processus d'éliminations successives : à chaque étape, l'option dont le score est le plus faible est éliminée et la dernière option non éliminée est

[1] En effet, en notant s_i le nombre de points attribués pour une $i^{\text{ème}}$ position, le score de b est égal à $8s_1 + 6s_2 + 3s_3$, le score de a à $6s_1 + 7s_2 + 4s_3$ et le score de c à $3s_1 + 4s_2 + 10s_3$. Si l'on pose, comme il est naturel, $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ et $s_1 > s_3$, il apparaît que l'option b bat non seulement l'option c mais aussi l'option majoritaire a.

déclarée vainqueur. Dans l'exemple, c'est, quel que soit le système de points utilisé, l'option c qui obtient le score le plus faible et qui est donc éliminée. Au tour suivant, a et b s'affrontent et c'est a – l'option majoritaire – qui l'emporte. Cette remarque justifie l'intérêt porté dans cet article aux règles positionnelles *itératives*.

2) Les préférences exhibées dans l'exemple expriment des points de vue nettement divergents. En particulier, elles ne vérifient pas l'hypothèse d'*unimodalité*, qui traduit un certain degré de consensus dans le corps social. Cette hypothèse, introduite par Black (1948), conduit à éliminer certaines configurations de préférences. Elle se fonde sur la remarque suivante : dans de nombreux contextes, les choix des différents votants reposent sur des valeurs communes, de telle sorte que certains ordres de préférence individuels n'apparaissent que très rarement. Deux exemples permettront de préciser ce point de vue. (1) Supposons que les agents aient à choisir entre trois niveaux de financement d'un bien public : 5 millions d'euros (option a), 10 millions d'euros (option b) et 15 millions d'euros (option c). Un agent qui classe l'option a en première position souhaite un engagement limité de l'État, et l'on peut par conséquent imaginer que l'option qu'il classera en deuxième position sera b (dépense moyenne) et non c (dépense forte). De la même façon, il est probable qu'un agent dont l'option préférée est c classera b en deuxième position. (2) Supposons maintenant que les options soient des candidats politiques : g (candidat de gauche), c (centriste) et d (candidat de droite). Dans la mesure où les électeurs se prononcent en fonction de la position des candidats sur l'axe gauche-droite, il est naturel de considérer que l'occurrence d'ordres de préférence tels que « g préféré à d préféré à c » ou « d préféré à g préféré à c » est improbable. L'hypothèse d'unimodalité consiste à exclure purement et simplement ces deux ordres de préférence. Dans les deux exemples ci-dessus, les votants considèrent les options soumises au choix selon une *seule* et *même* dimension et déterminent leurs préférences en fonction d'un ordre « objectif » préexistant (les niveaux de dépense croissants dans le premier exemple, l'axe gauche-droite dans le second)[2]. C'est l'existence d'un tel ordre, assez fréquente en pratique, qui justifie l'hypothèse d'unimodalité[3].

---

[2] Black utilise une représentation graphique pour tester l'unimodalité d'un ordre de préférence. Si l'on fait apparaître l'ordre objectif en abscisse et si l'on représente un ordre de préférence individuel selon une échelle verticale, alors cet ordre de préférence est unimodal si et seulement si sa représentation graphique ne comporte qu'un seul sommet (un seul « mode »).

[3] L'unimodalité permet en outre, pour un nombre impair de votants, de garantir l'existence d'une option majoritaire. C'est aussi pour cette raison que Black l'a introduite.

Le présent article se propose d'étudier l'aptitude des règles positionnelles itératives à vérifier le principe majoritaire lorsque les préférences sont unimodales, complétant ainsi une série de travaux récents (Gehrlein 1997 ; Lepelley 1995 ; 1996 ; Lepelley et Merlin 1998) qui analysent la portée et les limites du conflit Borda-Condorcet. Nous définissons formellement les différentes notions utilisées dans la section 2. La section 3 propose quelques résultats permettant d'identifier – sinon de caractériser – les règles positionnelles itératives compatibles avec deux versions du principe majoritaire de Condorcet sous l'hypothèse d'unimodalité des préférences. Nous présentons dans la section 4 des calculs de nature probabiliste qui fournissent une mesure de la propension de certaines règles itératives à vérifier le principe majoritaire. La section 5 conclut l'article.

2. NOTATION ET DÉFINITIONS

On note $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des votants et l'on suppose que leur nombre n est impair afin d'éviter les problèmes posés par les *ex aequo* dans les duels majoritaires. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ désigne l'ensemble (fini) des options soumises au choix. Lorsque la numérotation de l'option considérée est sans importance, celle-ci est simplement notée a. On suppose que chaque votant est en mesure de classer complètement et sans *ex aequo* les éléments de A ; l'ordre de préférence du votant i est noté P_i. Un *profil de préférences* est une liste $\pi = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de n ordres de préférence individuels. D désigne l'ensemble de tous les profils de préférences logiquement possibles et D^{ad} l'ensemble des profils considérés comme admissibles.

DÉFINITION 1 : *Une règle de choix collectif est une fonction f définie sur $D^{ad} \subseteq D$ à valeurs dans A.*

Le processus de choix collectif analysé dans cet article consiste donc à associer à tout profil de préférences admissible $\pi \in D^{ad}$ une (et une seule) option $f(\pi)$ qui constitue le choix de la collectivité.

Les règles de choix collectif que nous allons étudier se définissent à l'aide de *vecteurs scores*. Un vecteur score est un vecteur de nombres réels $v^p = (v_1^p, v_2^p, \ldots, v_p^p)$, l'élément v_j^p s'interprétant comme le nombre de points obtenus pour une $j^{\text{ème}}$ place lorsque le nombre d'options en présence est égal à p. Étant donné un profil π et un sous-ensemble B de A constitué de p options, le score d'une option a est la somme des points obtenus par

a dans le profil π restreint aux p options de B. Nous supposerons, très naturellement, que $v_1^p \geq v_2^p \geq ... \geq v_p^p$ et que $v_1^p > v_p^p$. Nous adopterons en outre (sans perte de généralité) la convention suivante : $v_1^p = 1$ et $v_p^p = 0$. Compte tenu de cette convention, le vecteur score associé à la règle de Borda (évoquée dans l'introduction) est défini par $v_j^p = \frac{p-j}{p-1}$, $\forall j \in \{1,...,p\}$. La définition des règles positionnelles *itératives* nécessite l'introduction d'une liste de vecteurs scores $v^* = (v^2, v^3, ..., v^m)$. Au premier tour du processus itératif, les scores sont calculés sur la base du vecteur v^m et l'option qui obtient le score le plus faible est éliminée. Au tour suivant, les scores sont calculés en utilisant le vecteur v^{m-1}, une nouvelle option est éliminée et ainsi de suite... Nous supposerons qu'à chaque étape, c'est, en cas d'*ex aequo*, l'option dont l'indice est le plus élevé qui est éliminée. Étant donné un profil de préférences π, un ensemble B de p éléments et un vecteur score v^p, nous notons $l(v^p, \pi, B)$ l'option éliminée lorsque p options restent en lice. Les règles positionnelles itératives peuvent alors se définir de la manière suivante :

DÉFINITION 2 : *Soit v^* une liste de vecteurs score. Une règle positionnelle itérative (R.P.I.) notée f_{v^*} est une règle de choix collectif telle que, pour tout profil $\pi \in L^n$, $f_{v^*}(\pi) = a \iff B_1 = \{a\}$, où B_1 est l'ensemble défini par la récurrence : $B_m = A$ et $B_{k-1} = B_k \setminus l(v^k, \pi, B_k)$, $k = m, ..., 2$.*

Les règles proposées par Hare (1859) et Coombs (1954) constituent deux exemples de règles positionnelles itératives. La règle de Hare élimine à chaque étape du processus itératif l'option dont le nombre de premières places dans les préférences individuelles est le plus faible ; on a donc : $v^p = (1, 0, ..., 0)$ $\forall p \in \{2, ..., m\}$[4]. La règle de Coombs élimine quant à elle l'option dont le nombre de dernières places est le plus élevé, ce qui revient à poser : $v^p = (1, 1, ..., 1, 0)$ $\forall p \in \{2, ..., m\}$. Un autre exemple de R.P.I. est dû à Nanson (1882), qui propose d'éliminer à chaque étape l'option dont le score de Borda est le plus faible. Nous définissons maintenant la notion d'option majoritaire (encore appelée *vainqueur de Condorcet*), ainsi que la condition MAJ1 qui lui est associée.

DÉFINITION 3 : *Soit π un profil. L'option a est dite majoritaire si et seulement si : $\forall b \in A \setminus \{a\}$, $|\{i \in N : aP_ib\}| > n/2$. Une règle de choix collectif*

[4] Le vote majoritaire à deux tours, tel qu'on l'utilise en France pour les élections présidentielles, constitue une variante simplifiée de la règle de Hare dans laquelle le deuxième et dernier tour ne retient que les deux options les mieux classées.

vérifie la condition MAJ1 (ou critère de Condorcet) si et seulement si l'option majoritaire, lorsqu'elle existe, constitue le choix collectif.

La condition MAJ2, qui repose sur la notion d'option fortement majoritaire, constitue un affaiblissement de la condition MAJ1.

DÉFINITION 4 : *Soit π un profil. L'option a est dite fortement majoritaire si et seulement si: $| \{i \in N : \forall b \in A \setminus \{a\},\ aP_ib \} | > n/2$. Une règle de choix collectif vérifie la condition MAJ2 si et seulement si l'option fortement majoritaire, lorsqu'elle existe, constitue le choix collectif.*

La condition MAJ2 n'impose donc le choix de l'option majoritaire que dans le cas où celle-ci est classée en première position par plus de la moitié des votants. Les deux propositions qui suivent caractérisent les R.P.I. compatibles avec MAJ1 et MAJ2 (respectivement) lorsqu'aucune restriction n'est imposée aux préférences individuelles (*i.e.* lorsque $D^{ad} = D$).

PROPOSITION 1 (Smith 1973) : *Une R.P.I. f_{v^*} vérifie la condition MAJ1 si et seulement si, pour tout $p \in \{2, ..., m\}$, pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, $v_j^p = \frac{p-j}{p-1}$.*

PROPOSITION 2 (Lepelley et Merlin 1998) : *Une R.P.I. f_{v^*} vérifie la condition MAJ2 si et seulement si, pour tout $p \in \{2, ..., m\}$, $\sum_{j=1}^{p} v_j^p \leq p/2$.*

Ainsi, une et une seule R.P.I. – la règle de Nanson – satisfait à la condition MAJ1. Bien entendu, cette règle satisfait aussi à la condition MAJ2. La proposition 2 nous indique cependant que ce n'est pas la seule; en particulier, la règle de Hare (contrairement à la règle de Coombs) est compatible avec MAJ2. Que deviennent ces résultats lorsque les préférences sont unimodales ? Telle est la question que nous nous proposons d'aborder dans la section suivante. Nous donnons auparavant une définition formelle de la notion d'unimodalité.

DÉFINITION 5 : *Un profil π est unimodal si et seulement s'il existe un ordre $\overline{P}$ sur A tel que, pour tout triplet $a, b, c \in A$, l'on ait: $(a\overline{P}b\overline{P}c$ ou $c\overline{P}b\overline{P}a)$ $\Rightarrow$ $(\forall i \in N, aP_ib \Rightarrow bP_ic)$.*

Ainsi, un profil est unimodal lorsque chaque ordre de préférence individuel est représentable par une fonction unimodale sur A (pour un ordre fixé sur A). Dans le cas particulier où trois options sont en présence (que nous privilégierons dans la Sect. 4), la définition d'un profil unimodal signifie simplement que tous les votants s'accordent à considérer que l'une au moins des options n'est jamais classée en dernière position. Nous notons D^u l'ensemble des profils unimodaux et considérons dans ce qui suit que $D^{ad} = D^u$. Sans perte de généralité, nous supposons en outre que l'ordre « objectif » $\overline{P}$ est le suivant :

$$a_1 \overline{P} a_2 \overline{P} a_3 \ldots \overline{P} a_m.$$

3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX

L'objet de cette section est d'identifier les R.P.I. qui vérifient les conditions MAJ1 et/ou MAJ2 lorsque les préférences sont unimodales. Nous utiliserons le résultat suivant.

LEMME 1 : *Dans un profil unimodal, l'option classée au $j^{\text{ème}}$ rang dans l'ordre sous-jacent $\overline{P}$ ne peut figurer au-delà de la $(m+1-j)^{\text{ème}}$ place dans les classements individuels si $j \leq m/2$; et elle ne peut figurer au-delà de la $j^{\text{ème}}$ place si $j > m/2$.*

Preuve : Observons tout d'abord que si $j = 1$ ou $j = m$, alors le lemme est trivial. Considérons alors le cas où $2 \leq j \leq m-1$ et supposons que l'option a_j soit classée au-delà du rang $m+1-j$, $j \leq m/2$ (ou au-delà du rang j, si $j > m/2$) dans un ordre de préférence individuel. Dans ce cas, il existe nécessairement une option a_h, $h < j$, et une option a_l, $l > j$, qui sont toutes deux classées avant a_j dans cet ordre individuel, ce qui contredit l'unimodalité du profil. □

COROLLAIRE 1 : *Seules les options extrêmes de l'ordre « objectif » (a_1 et a_m) peuvent apparaître en dernière position dans les ordres individuels d'un profil unimodal.*

Remarque 1 : Soit π un profil et B un sous-ensemble de A de cardinal égal à p, $p \leq m$ (B s'interprète comme l'ensemble des options restant en lice à une étape quelconque du processus itératif) ; notons $\pi|_B$ le profil π restreint à B. Il est clair que si π est unimodal, alors $\pi|_B$ l'est également et le lemme 1 (ainsi que son corollaire) continuent de s'appliquer (en remplaçant m par p et en renumérotant les éléments de B de 1 à p).

PROPOSITION 3 : *Toute R.P.I. définie sur D^u vérifie la condition MAJ2.*

Preuve : Compte tenu du corollaire 1 et de la remarque 1, l'unimodalité du profil implique qu'à chaque étape du processus itératif, seules deux options (les options extrêmes dans l'ensemble de celles qui restent en lice) sont susceptibles d'apparaître en dernière position dans les ordres (éventuellement restreints) des individus. Donc, à chaque étape, une option va recueillir au moins $\frac{n+1}{2}$ dernières places et son score ne peut alors être supérieur à $\frac{n-1}{2}$. Or, par définition, l'option fortement majoritaire (lorsqu'elle existe) est classée en tête par plus de la moitié des votants et son score est supérieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$. Elle ne peut donc être éliminée (puisqu'à chaque étape existe une option dont le score est strictement plus faible) et c'est elle qui sortira vainqueur – seule – du processus itératif. □

Lorsque les préférences sont unimodales, *toutes* les R.P.I. choisissent donc l'option fortement majoritaire lorsque celle-ci existe. En est-il de même pour l'option majoritaire, *i.e. toutes* les R.P.I. vérifient-elles la condition MAJ1 en présence de l'unimodalité ? La réponse est négative. Cependant, on peut établir que la règle de Nanson n'est plus la *seule* règle itérative compatible avec MAJ1. Nous donnons ci-dessous une condition suffisante pour qu'une R.P.I. vérifie MAJ1 lorsque les préférences sont unimodales ($\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x).

PROPOSITION 4 : *Soit f_{v^*} une R.P.I. définie sur D^u. Si v^* est tel que, pour tout $p \in \{2, ..., m\}$, $v^p_{p-1} + v^p_{\lceil \frac{p}{2} \rceil} \geq 1$, alors f_{v^*} vérifie la condition MAJ1.*

Preuve : Notons a_c l'option majoritaire et considérons l'ensemble B des p options encore en lice à une étape quelconque du processus itératif. Supposons tout d'abord que l'option majoritaire soit l'une des options extrêmes de l'ordre sous-jacent restreint à B, par exemple a_1 (le raisonnement est similaire pour a_p). La définition même de l'unimodalité implique que le seul ordre de préférence admissible classant a_1 devant a_2 est celui dans lequel a_1 apparaît en première position, a_2 en deuxième position, etc. Puisque a_1 est majoritaire, cela signifie que plus de la moitié des votants vont classer a_1 en première position ; autrement dit, l'option a_1 est fortement majoritaire et, d'après la proposition 3, elle est élue. Supposons maintenant que l'option a_c ne soit pas extrême, *i.e.* $2 \leq c \leq p-1$. Du lemme 1, nous pouvons déduire que l'option médiane (ou l'une des options médianes si p est pair) dans l'ordre sous-jacent restreint à B est classée à un rang inférieur ou égal à $\lceil \frac{p}{2} \rceil$ dans tous les ordres individuels. Il en résulte que l'option a_c doit nécessairement apparaître à un rang inférieur ou égal à $\lceil \frac{p}{2} \rceil$ dans plus de la moitié des ordres individuels (sinon, a_c ne serait pas majoritaire). D'autre part, puisque a_c n'est pas l'une des options extrêmes, elle ne peut être classée en dernière position (d'après le Cor. 1). Par conséquent, le score de l'option a_c est au minimum égal à

$$\frac{n+1}{2}\, v^p_{\lceil \frac{p}{2} \rceil} + \frac{n-1}{2}\, v^p_{p-1} = \frac{n-1}{2}\left(v^p_{\lceil \frac{p}{2} \rceil} + v^p_{p-1}\right) + v^p_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}.$$

Si $v^p_{\lceil \frac{p}{2} \rceil} + v^p_{p-1} \geq 1$, le score de a_c est alors supérieur à $\frac{n-1}{2}$. Or l'une des options extrêmes (a_1 ou a_p) obtient un score nécessairement inférieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$ (*cf.* preuve de la Prop. 3). L'option a_c ne peut donc être éliminée si $v^p_{\lceil \frac{p}{2} \rceil} + v^p_{p-1} \geq 1$ et elle sera finalement choisie. □

La proposition 4 permet notamment d'affirmer que la règle de Coombs vérifie MAJ1 lorsque les préférences sont unimodales. Le résultat suivant fournit une condition nécessaire pour qu'une R.P.I. satisfasse à la condition MAJ1.

PROPOSITION 5 : *Soit f_{v^*} une R.P.I. définie sur D^u. Si f_{v^*} vérifie la condition MAJ1, alors*
$v^p_{\frac{p}{2}} + v^p_{\frac{p}{2}+1} \geq \min_{j \in \{1,\ldots,\frac{p}{2}-1\}} \left(v^p_{p-j+1} + v^p_j\right)$ *pour tout p pair,*
et $v^p_{\frac{p+1}{2}} \geq \min_{j \in \{1,\ldots,\frac{p-1}{2}\}} \left(\frac{v^p_{p-j+1} + v^p_j}{2}\right)$ *pour tout p impair.*

Preuve : Supposons qu'il existe p impair[5] tel que $\min_{j \in \{1,\ldots,\frac{p-1}{2}\}} \left(\frac{v^p_{p-j+1} + v^p_j}{2}\right) > v^p_{\frac{p+1}{2}}$. Il nous faut montrer qu'alors, on peut trouver un profil unimodal conduisant à l'élimination de l'option majoritaire. Soit k l'entier vérifiant :

$$\frac{v^p_{p-k+1} + v^p_k}{2} = \min_{j \in \{1,\ldots,\frac{p-1}{2}\}} \left(\frac{v^p_{p-j+1} + v^p_j}{2}\right)$$

et considérons le profil donné par le tableau ci-après, où y est un entier vérifiant les conditions :

$$y > \frac{1 - v^p_{p-k+1}}{v^p_k + v^p_{p-k+1} - 2v^p_{\frac{p+1}{2}}}, \tag{1}$$

$$y > \frac{v^p_{p-k+1} - v^p_{p-j+1}}{(v^p_{p-j+1} + v^p_j) - (v^p_{p-k+1} + v^p_k)}\ \forall j < k. \tag{2}$$

[5] La preuve est très similaire pour p pair. Nous l'avons donc omise.

Rang	y	y	1
1	a_1	a_p	$a_{\frac{p+1}{2}}$
2	a_2	a_{p-1}	$a_{\frac{p-1}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{p-1}{2}$	$a_{\frac{p-1}{2}}$	$a_{\frac{p+3}{2}}$	a_2
$\frac{p+1}{2}$	$a_{\frac{p+1}{2}}$	$a_{\frac{p+1}{2}}$	a_1
$\frac{p+3}{2}$	$a_{\frac{p+3}{2}}$	$a_{\frac{p-1}{2}}$	$a_{\frac{p+3}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p-1$	a_{p-1}	a_2	a_{p-1}
p	a_p	a_1	a_p
$p+1$	a_{p+1}	a_{p+1}	a_{p+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_m	a_m	a_m

Ce profil est unimodal et donne l'option $a_{\frac{p+1}{2}}$ comme vainqueur de Condorcet. Lors de la première étape du processus itératif, l'option a_m, classée en dernière position par l'ensemble des votants, obtient un score nul. Elle est donc nécessairement éliminée (compte tenu de la convention adoptée en cas d'*ex aequo*). De la même façon, aux étapes suivantes, les options $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_{p+1}$ sont successivement éliminées. L'ensemble des options qui restent en présence est alors $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ et le vecteur v^p s'applique. Notons $S(a)$ le score de l'option a, $a \in B$. Il est facile de vérifier que l'on a :

$$S(a_j) \geq S(a_{p-j+1}) \;\; \forall j \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right\}.$$

L'option qui obtient le score le plus faible a donc un indice supérieur à $\frac{p-1}{2}$. On a d'autre part :

$$S(a_j) = y\left(v_j^p + v_{p-j+1}^p\right) + v_j^p \;\; \forall j \in \left\{\frac{p+3}{2}, \ldots, p\right\}.$$

Puisque $v_{p-k+1}^p + v_k^p = \min_{j \in \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}} (v_{p-j+1}^p + v_j^p)$, c'est – compte tenu de l'inégalité (2) – l'option a_{p-k+1} qui obtient le score le plus faible dans l'ensemble $B - \{a_{\frac{p+1}{2}}\}$. Par ailleurs, l'option $a_{\frac{p+1}{2}}$ obtient un score $S(a_{\frac{p+1}{2}}) = 2yv^p_{\frac{p+1}{2}} + 1$. On peut alors déduire de notre hypothèse initiale (selon laquelle $v^p_{p-k+1} + v^p_k > 2v^p_{\frac{p+1}{2}}$) et de l'inégalité (1) que le score de l'option $a_{\frac{p+1}{2}}$ est inférieur (strictement) à celui de l'option a_{p-k+1}. L'option majoritaire est donc éliminée. □

On peut vérifier que cette condition nécessaire coïncide avec la condition suffisante de la proposition 4 lorsque le nombre d'options est égal à trois ou à quatre. On obtient par conséquent, pour ces cas particuliers, une caractérisation complète des R.P.I. vérifiant MAJ1 en présence de l'unimodalité :

COROLLAIRE 2 : *Soit f_{v^*} une R.P.I. définie sur D^u. Supposons que le nombre d'options ne soit pas supérieur à quatre. Alors f_{v^*} vérifie la condition MAJ1 si et seulement si ($v^4_2 + v^4_3 \geq 1$ et $v^3_2 \geq 1/2$).*

4. EFFICACITÉ MAJORITAIRE

Nous l'avons vu, l'unimodalité des préférences ne permet pas de garantir que toutes les R.P.I. choisiront l'option majoritaire lorsque celle-ci existe. Considérons une R.P.I. ne vérifiant pas la condition MAJ1 : quelle est alors la probabilité qu'elle conduise au choix d'une option différente de l'option majoritaire ? Nous apportons dans cette section des réponses à cette interrogation en considérant le cas particulier où le nombre d'options soumises au choix est limité à trois. Nous allons en effet calculer, pour ce cas particulier, *l'efficacité majoritaire* des R.P.I., c'est-à-dire la probabilité que ces règles choisissent l'option majoritaire (qui, rappelons-le, existe toujours lorsque n est impair et les préférences unimodales)[6]. Avec trois options a_1, a_2, a_3 et sous l'hypothèse d'unimodalité, les ordres de préférence possibles d'un votant sont au nombre de quatre et numérotés comme suit :

$$1.\ a_1\ a_2\ a_3 \quad 2.\ a_2\ a_1\ a_3 \quad 3.\ a_2\ a_3\ a_1 \quad 4.\ a_3\ a_2\ a_1,$$

$a_1\ a_2\ a_3$ signifiant a_1 préféré à a_2 préféré à a_3.

[6] On parle encore d'*efficacité de Condorcet* pour désigner cette probabilité. La notion d'efficacité majoritaire a été introduite par Fishburn (1974). Le lecteur intéressé trouvera dans Gehrlein (1997) un tour d'horizon très complet des calculs d'efficacité.

D'autre part, lorsque le nombre d'options est égal à trois, une R.P.I. est entièrement caractérisée par le nombre de points λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, qu'elle attribue pour une deuxième place à la première étape du processus itératif (pour $\lambda = 0$, on obtient la règle de Hare – qui se confond ici avec le vote majoritaire à deux tours –; pour $\lambda = 1/2$, on a la règle de Nanson et pour $\lambda = 1$ la règle de Coombs). Le corollaire 2 permet en outre d'établir qu'une R.P.I. viole MAJ1 si et seulement si $\lambda < 1/2$. Notons $EM^u(\lambda, n)$ l'efficacité majoritaire de la R.P.I. λ lorsque les préférences sont unimodales et le nombre de votants égal à n. Nous avons $EM^u(\lambda, n) = 1$ pour tout $\lambda \geq 1/2$. Afin d'obtenir des valeurs de l'efficacité majoritaire pour $\lambda < 1/2$, nous allons supposer que toutes les *situations de vote* unimodales sont équiprobables, une situation de vote étant définie comme un vecteur (n_1, n_2, n_3, n_4) avec $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ et n_i désignant le nombre de votants ayant l'ordre de préférence numéro i. Soit S le nombre total de situations unimodales. Le cardinal de cet ensemble est donné par:

$$\mid S \mid = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \sum_{n_3=0}^{n-n_1-n_2} 1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}. \tag{3}$$

Le premier résultat que nous présentons permet d'obtenir l'efficacité majoritaire pour tout $\lambda < 1/2$ lorsque le nombre de votants tend vers l'infini. Dans la preuve de ce résultat, nous poserons $p_i = n_i/n$.

PROPOSITION 6 : *Pour tout* $\lambda \in [0, 1/2]$, *on a:*

$$EM^u(\lambda, \infty) = \frac{8\lambda^4 - 28\lambda^3 + 210\lambda^2 - 319\lambda + 137}{72(\lambda - 1)^2(2 - \lambda)}.$$

Preuve : Étant donné une règle positionnelle itérative λ, nous notons P_x, $x \in \{1, 2, 3\}$, la probabilité que cette règle choisisse une option différente de l'option majoritaire lorsque celle-ci est l'option a_x. Puisque l'existence d'une option majoritaire est garantie lorsque les préférences sont unimodales (et que le nombre de votants tend vers l'infini), on a :

$$EM^u(\lambda, \infty) = 1 - P_1 - P_2 - P_3,$$

soit encore, compte tenu de la symétrie des options a_1 et a_3 dans le modèle probabiliste utilisé:

$$EM^u(\lambda, \infty) = 1 - 2\ P_1 - P_2. \tag{4}$$

Concernant la probabilité P_1, on peut observer qu'une condition nécessaire pour que a_1 soit majoritaire est $p_1 > 1/2$; autrement dit, si l'option a_1 est majoritaire, alors elle est fortement majoritaire. Or d'après la proposition 3, une option fortement majoritaire ne peut être battue. Par conséquent:

$$P_1 = 0. \tag{5}$$

Considérons maintenant la probabilité P_2. L'option a_2 est majoritaire si $p_1 < 1/2$ et $p_4 < 1/2$; et elle sera battue si (et seulement si) elle est éliminée au premier tour, ce qui implique $p_1 + \lambda p_2 > p_2 + p_3 + \lambda(p_1 + p_4)$ et $p_4 + \lambda p_3 > p_2 + p_3 + \lambda(p_1 + p_4)$. La probabilité P_2 est obtenue en évaluant l'intégrale triple $\int\int\int 6dp_1dp_2dp_3$ sur le domaine défini par les quatre inéquations ci-dessus et l'égalité $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$. Cette intégrale multiple a été évaluée (dans un contexte un peu différent) par Lepelley (1995, pp. 294-295), qui obtient:

$$P_2 = \frac{8\lambda^4 + 44\lambda^3 - 78\lambda^2 + 41\lambda - 7}{72(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)}. \tag{6}$$

L'expression de $EM^u(\lambda, \infty)$ se déduit alors des relations (4, 5) et (6). □

Le tableau 1 présente les valeurs de l'efficacité majoritaire pour différents λ. Il apparaît que cette efficacité n'est jamais inférieure à 95 % et qu'elle est minimale pour $\lambda = 0$, *i.e.* pour le vote majoritaire à deux tours.

TABLEAU 1

Efficacité majoritaire des règles positionnelles itératives dans des élections à trois options lorsque les préférences sont unimodales.

Règle λ	$EM^u(\lambda, \infty)$
0	0,95139
0,1	0,96719
0,2	0,98125
0,3	0,99221
0,4	0,99857
0,5	1

Dans la mesure où cette règle est d'un usage très courant (y compris dans des comités réunissant un petit nombre de votants), il nous a paru intéressant de calculer son efficacité majoritaire pour différentes valeurs de n.

Proposition 7 : *Supposons n multiple impair de trois et $n-1$ multiple de quatre. Alors :*

$$EM^u(0,n) = \frac{137n^2 + 348n + 225}{144(n+2)(n+1)}\,.$$

Preuve : Comme dans la preuve de la proposition 6, nous allons déduire l'efficacité du vote majoritaire à deux tours de la probabilité que cette règle ne choisisse pas l'option majoritaire (qui existe toujours pour n impair). Nous l'avons vu, seule l'option a_2 est susceptible d'être battue lorsqu'elle est majoritaire. Or l'option a_2 est majoritaire si $n_{23} + n_1 > n/2$ et $n_{23} + n_4 > n/2$, en posant $n_{23} = n_2 + n_3$. D'autre part, elle est éliminée dans un vote majoritaire à deux tours si $n_{23} < n_1$ et $n_{23} < n_4$. En tenant compte du fait que la somme des n_i est égale à n, il est facile d'établir que les inéquations ci-dessus sont équivalentes à (en supposant n impair et multiple de trois):

$$1 \le n_{23} \le (n-3)/3, \quad 0 \le n_2 \le n_{23},$$

$$MAX(n_{23}+1,\, (n+1)/2 - n_{23}) \le n_1 \le MIN((n-1)/2,\, n - 2n_{23} - 1),$$

et $n_4 = n - n_{23} - n_1$. Soit Z l'ensemble des situations $s = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ vérifiant ces inéquations. Afin d'évaluer le cardinal de Z, il nous faut éliminer les arguments MAX et MIN qui apparaissent dans les limites de n_1. Pour ce faire, nous partitionnons Z en deux sous-ensembles Z_1 et Z_2 définis comme suit ($n-1$ est supposé multiple de quatre):

$$s \in Z_1 \iff \begin{cases} 1 \le n_{23} \le (n-1)/4 \\ 0 \le n_2 \le n_{23} \\ (n+1)/2 - n_{23} \le n_1 \le (n-1)/2 \end{cases}$$

$$s \in Z_2 \iff \begin{cases} (n+3)/4 \le n_{23} \le (n-3)/3 \\ 0 \le n_2 \le n_{23} \\ n_{23} + 1 \le n_1 \le n - 2n_{23} - 1. \end{cases}$$

On a alors:

$$\mid Z_1 \mid = \sum_{n_{23}=1}^{\frac{n-1}{4}} \sum_{n_2=0}^{n_{23}} \sum_{n_1=\frac{n+1}{2}-n_{23}}^{\frac{n-1}{2}} 1 = \frac{n^3 + 9n^2 + 11n - 21}{192},$$

et

$$| Z_2 |= \sum_{n_{23}=\frac{n+3}{4}}^{\frac{n-3}{3}} \sum_{n_2=0}^{n_{23}} \sum_{n_1=n_{23}+1}^{n-2n_{23}-1} 1 = \frac{5n^3 - 51n^2 - 9n + 567}{1728}.$$

D'où :

$$| Z |=| Z_1 | + | Z_2 |= \frac{7n^3 + 15n^2 + 45n + 189}{864}. \tag{7}$$

Puisque, par définition de l'efficacité majoritaire

$$EM^u(0,n) = \frac{| S | - | Z |}{| S |},$$

l'expression désirée résulte des relations (3) et (7). □

Les chiffres présentés dans le tableau 2 montrent que l'efficacité du vote majoritaire à deux tours augmente avec le nombre d'électeurs. Il reste que, pour un petit nombre de votants, l'élection d'une option différente de l'option majoritaire survient dans près de 9 % des situations possibles.

TABLEAU 2

Efficacité du vote majoritaire à deux tours en fonction du nombre n de votants (trois options, préférences unimodales).

n	$EM^u(0,n)$
9	0,91250
21	0,93256
33	0,93897
45	0,94213
57	0,94400
69	0,94525
81	0,94613
93	0,94679
105	0,94731
.	.
501	0,95052
.	.
∞	0,95139

5. CONCLUSION

L'hypothèse d'unimodalité améliore manifestement les « performances majoritaires » des règles positionnelles itératives et permet, dans une certaine mesure, de réduire le conflit Borda-Condorcet. En particulier, une option fortement majoritaire sera toujours élue sous cette hypothèse. La réconciliation reste cependant partielle puisque de nombreuses R.P.I. demeurent susceptibles de violer le principe majoritaire en présence de l'unimodalité. C'est le cas notamment de la règle de Hare, dont le vote majoritaire à deux tours est l'un des avatars. Cette règle, largement utilisée dans la pratique des choix collectifs, est, paradoxalement, celle qui maximise la probabilité de choisir une option différente de l'option majoritaire lorsque trois options sont en présence.

RÉFÉRENCES

D. Black, On the Rationale of Group Decision-Making. *J. Political Economy* **56** (1948) 23–34.

C. Coombs, *Theory of Data.* Wiley, New York (1954).

P.C. Fishburn, Aspects of One-Stage Voting Rules. *Management Sci.* **21** (1974) 422–427.

W.V. Gehrlein, Condorcet's Paradox and the Condorcet Efficiency of Voting Rules. *Math. Japon.* **45** (1997) 173–179.

T. Hare, *Treatise on the Election of Representatives, Parliamentary and Municipal.* Longmans Green, London (1859).

D. Lepelley, Condorcet Efficiency of Positional Voting Rules with Single-peaked Preferences. *Econom. Design* **1** (1995) 289–299.

D. Lepelley, Constant Scoring Rules, Condorcet Criteria and Single-peaked Preferences. *Econ. Theory* **7** (1996) 491–500.

D. Lepelley et V. Merlin, Choix Social Positionnel et Principe Majoritaire. *Ann. Économ. Statist.* **51** (1998) 29–48.

H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making.* Cambridge University Press (1988).

E.J. Nanson, Methods of Election, *Trans. Proc. of Roy. Soc. Victoria* **18** (1882) 197–240.

J.H. Smith, Aggregation of Preferences with Variable Electorate. *Econometrica* **41** (1973) 1027–1041.