RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

PATRICE MARCOTTE

Un algorithme général de calcul de l'état d'équilibre d'un oligopole

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 22, nº 3 (1988), p. 225-241

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1988__22_3_225_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 22, n° 3, 1988, p. 225 à 241)

UN ALGORITHME GÉNÉRAL DE CALCUL DE L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE D'UN OLIGOPOLE (*)

par Patrice MARCOTTE [1]

Résumé. — *Sous certaines hypothèses de concavité et de différentiabilité concernant les fonctions de production et de demande, le problème de la recherche de l'état d'équilibre d'un oligopole a été résolu. Dans cet article nous relaxons l'hypothèse de différentiabilité et montrons que, même sous des hypothèses de concavité stricte, l'équilibre n'est pas nécessairement unique. Nous décrivons également une situation faisant intervenir une loi de demande dérivée où la non différentiabilité intervient naturellement. Enfin des tests numériques indiquent que, dans le cas différentiable, l'algorithme proposé est plus efficace que certaines méthodes de calcul proposées récemment.*

Mots clés : Équilibre, Oligopole, Programmation mathématique.

Abstract. — *Under certain concacity and differentiability assumptions about supply and demand functions, there exist efficient algorithms for finding the equilibrium state of an oligopoly. In this paper we relax differentiability and show that the resulting equilibrium is not necessarily unique, even under strict concavity assumptions. Then we describe a situation where nondifferentiability occurs naturally. Finally numerical experimentation indicates that, in the differentiable case, the proposed algorithm is at least as efficient as algorithms to be found in the recent literature.*

Keywords : Equilibrium, Oligopoly, Mathematical programming.

1. INTRODUCTION

Les algorithmes de recherche d'un point d'équilibre de Cournot-Nash peuvent être classés en deux catégories. Une première classe d'algorithmes utilise l'approche de point fixe de Scarf [9] alors que la seconde est basée sur

(*) Reçu en mai 1987.
Recherche subventionnée par le C.R.S.N.G. (subvention A 5789) et le programme de recherche universitaire du Ministère de la Défense (F 4066).

[1] Collège Militaire Royal de Saint-Jean, Saint-Jean-sur-Richelieu, Québec, Canada, et G.E.R.A.D., École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Québec, Canada.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/88/03 225 17/$ 3.70

des méthodes d'optimisation plus classiques et est mieux adaptée à la résolution de problèmes de grande taille. En particulier, Cohen et Chaplais [1], Harker [3] et Marcotte [5, 6] proposent des algorithmes basés sur la formulation du problème en inéquation variationnelle. Malheureusement les conditions de convergence de ces algorithmes sont difficiles à établir. Murphy, Sherali et Soyster [7] quant à eux résolvent une suite de problèmes de maximisation concaves dont la suite des solutions converge vers un équilibre du problème originel; leur algorithme, qui ne peut traiter que des problèmes continûment différentiables, ne peut être interprété dans le cadre d'une méthode variationnelle « classique ». Leurs hypothèses consistent en : la différentiabilité des fonctions considérées, la concavité de la fonction de revenu globale, ainsi que la convexité des fonctions de production des firmes considérées. Sous l'hypothèse supplémentaire de concavité de la fonction de demande inverse, Szidarovsky et Yakowitz [10, 11] suggèrent une méthode plus simple basée sur la recherche dichotomique de la valeur de la production globale à l'équilibre. Dans Novshek [8] on retrouve plusieurs résultats d'existence d'un équilibre dans le cas non différentiable. Son analyse, très détaillée, exclut cependant les fonctions de demande à élasticité constante et positive, couramment utilisées dans la pratique.

Dans cet article nous nous proposons de généraliser la méthode de Szidarovsky et Yakowitz au cas où la fonction de demande n'est ni concave ni différentiable. Cependant nous conserverons l'hypothèse fondamentale de concavité de la fonction de revenu globale.

L'analyse sera centrée autour de la somme $G(Q)$ des fonctions de réaction inverses (backward reaction function) des différentes firmes à l'annonce d'une quantité totale Q mise sur le marché. Après avoir borné inférieurement et supérieurement la production totale à l'équilibre Q^* (proposition 1) nous montrons que la fonction $G(Q)$ est bien définie (proposition 2) et que l'unique (corollaire de la proposition 5) production Q satisfaisant l'inclusion $Q \in G(Q)$ (proposition 3) constitue effectivement la production d'équilibre. La proposition 4 donne une caractérisation de la multi-application $G(Q)$. L'algorithme de résolution est basé sur la proposition 5 qui stipule, résultat intéressant en soi du point de vue économique, que la fonction ou multi-application $G(Q)/Q$ est monotone décroissante si Q est supérieure à la production monopolistique d'une firme quelconque de l'oligopole. L'algorithme est illustré à partir d'un exemple numérique tiré de l'article de Murphy, Sherali et Soyster [7]. Finalement nous décrivons un contexte où la non différentiabilité de la fonction de demande intervient de façon « naturelle ».

2. DÉFINITION DU PROBLÈME

Dans cette section ainsi que dans la suite de l'article nous adoptons la notation introduite par Murphy, Sherali et Soyster [7]. On définit:

Fonction de demande inverse: $p(Q)$, définie pour tout niveau de production $Q \geqq 0$, est le prix que les consommateurs sont disposés à payer pour une unité du bien lorsque la production globale est égale à Q.

Niveau de production de la firme i: q_i, $i=1, \ldots, N$.

Production globale: $Q=\sum_{i=1}^{N} q_i$.

Fonction de revenu globale: $Qp(Q)$.

Fonction de coût pour la firme i: $f_i(q_i)$, $i=1, \ldots, N$, *définie pour* $q_i \geqq 0$.

Vecteur de production: $q=(q_1, \ldots, q_N)$.

DÉFINITION : Un vecteur de production q^* de composantes positives ou nulles constitue un équilibre de Cournot-Nash si, pour chaque firme i, q_i^* est solution du problème de maximisation:

$$\max_{q_i \geqq 0} q_i p\left(q_i+\sum_{j \neq i} q_j^*\right)-f_i(q_i). \tag{1}$$

Dans la suite de l'article les hypothèses suivantes tiendront toujours:

HYPOTHÈSE H 1: Pour tout indice i la fonction f_i est continue et strictement convexe sur le demi-axe réel non négatif.

HYPOTHÈSE H 2: La fonction de demande (inverse), définie pour $Q \geqq 0$, est décroissante.

HYPOTHÈSE H 3: La fonction de revenu globale $Qp(Q)$ est concave par rapport à la variable Q (condition satisfaite si p est concave décroissante).

HYPOTHÈSE H 4: La production globale à l'équilibre Q^* est strictement positive.

Suivant la structure d'un problème particulier, certaines des hypothèses précédentes pourraient être modifiées ou affaiblies. Par exemple la stricte convexité des fonctions f_i est utilisée pour montrer l'unicité de la production à l'équilibre Q^*. On aurait tout aussi bien pu, à cette fin, exiger la stricte concavité de la fonction de revenu $Qp(Q)$. En l'absence d'hypothèses de convexité (ou concavité) stricte, il est encore possible de démontrer la validité de notre algorithme; cependant cette généralisation, relativement simple, ne ferait qu'alourdir indûment les notations, définitions et preuves.

Quant à l'hypothèse H 4, elle n'est nullement restrictive. En effet on peut vérifier que $Q^* = 0$ correspond à une solution d'équilibre en vérifiant que les inégalités $f_i(0) \geqq p(0)$ sont satisfaites pour toutes les firmes.

3. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soit $q_i^{\min}$ la production monopolistique correspondant à la firme i, définie par:

$$q_i^{\min} = \arg\max_{q_i \geqq 0} \{ q_i p(q_i) - f_i(q_i) \}. \tag{2}$$

On définit également le vecteur $q^{\max} = (q_1^{\max}, \ldots, q_N^{\max})$ représentant le vecteur de production d'une économie de N firmes produisant au coût marginal, c'est-à-dire:

$$q^{\max} = \arg \max_{q \geqq 0,\, Q} \int_0^Q p(t)\, dt - \sum_{i=1}^N f_i(q_i) \qquad \text{sujet à } Q = \sum_{i=1}^N q_i. \tag{3}$$

Sous les hypothèses H 1-H 5, les programmes mathématiques (2) et (3) sont strictement convexes; par conséquent les quantités $q_i^{\min}$ et $q_i^{\max}$ sont bien définies. On pose:

$$Q^{\min} = \max q_i^{\min}$$

$$Q^{\max} = \sum_{i=1}^N q_i^{\max}$$

et on fait l'hypothèse supplémentaire:

Hypothèse H 5: $Q^{\max} < \infty$.

Notre premier résultat montre que Q^* est borné inférieurement (respectivement supérieurement) par $Q^{\min}$ (respectivement $Q^{\max}$).

Proposition 1 : *Sous les hypothèses H 1-H 5 on a*: $0 < Q^{\min} \leqq Q^* \leqq Q^{\max} < \infty$.

Preuve: (i) $Q^{\min} > 0$.

L'hypothèse H 4 permet d'affirmer qu'au moins une firme fait des profits dans le marché oligopolistique. Cette même firme peut évidemment opérer de façon profitable dans une situation de monopole. Par conséquent on a que $Q^{\min}$ est strictement positif.

(ii) $Q^* \geqq Q^{\min}$

Désignons par φ^+ et φ^- les dérivées directionnelles (à droite et à gauche) d'une fonction d'une variable φ. Les conditions d'optimalité du problème (1) sont, pour chaque firme i [1] :

$$p(q_i^{\min}) + q_i^{\min} p^-(q_i^{\min}) - f_i^-(q_i^{\min}) \geqq 0 \tag{4 a}$$

$$p(q_i^{\min}) + q_i^{\min} p^+(q_i^{\min}) - f_i^+(q_i^{\min}) \leqq 0. \tag{4 b}$$

De la même façon on obtient, à partir du problème d'optimisation (1) :

$$p(Q^*) + q_i^* p^+(Q^*) - f_i^+(q_i^*) \leqq 0. \tag{5}$$

Supposons que l'on ait $Q^* < q_i^{\min}$ pour une firme i. Alors :

$$\begin{aligned} & p(q_i^{\min}) + q_i^{\min} p^-(q_i^{\min}) - f_i^-(q_i^{\min}) \\ & \qquad < p(Q^*) + Q^* p^+(Q^*) - f_i^+(q_i^*) \quad \text{par H 1, H 3} \\ & \qquad \leqq p(Q^*) + q_i^* p^+(Q^*) - f_i^+(q_i^*) \quad \text{par H 2} \\ & \qquad \leqq 0 \quad \text{par (5)} \end{aligned}$$

en contradiction avec (4 a). Nous obtenons donc:

$$Q^* \geqq \max_i q_i^{\min} = Q^{\min}.$$

(iii) $Q^* \leqq Q^{\max}$,

Supposons que $Q^* > Q^{\max}$ et soit i un indice tel que $q_i^* > q_i^{\max}$. Des conditions d'optimalité du problème (3) on peut déduire :

$$p(Q^{\max}) - f_i^+(q_i^{\max}) \leqq 0.$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 & \leqq p(Q^*) + q_i^* p^-(Q^*) - f_i^-(q_i^*) \\ & < p(Q^*) - f_i^+(q_i^{\max}) \quad \text{puisque } p^-(Q^*) \text{ est négatif ou nul,} \\ & \qquad\qquad f_i^- \text{ est strictement croissante et } q_i^{\max} < q_i^* \\ & \leqq p(Q^{\max}) - f_i^+(q_i^{\max}) \\ & \leqq 0 \text{ une contradiction.} \end{aligned}$$

[1] L'existence des dérivées directionnelles est une conséquence des hypothèses de convexité et concavité H 1 et H 3.

(iv) Finalement on a que $Q^{\max}<\infty$ en vertu de l'hypothèse H 5. $\square$

Définissons maintenant une multi-application de R dans R dont l'unique point fixe sera la production d'équilibre Q^*. Une fois déterminée Q^* les productions q_i^* pourront être obtenues aisément.

Soit Q un élément du segment $[Q^{\min}, Q^{\max}]$. On définit, pour chaque firme i et chaque nombre y_i, l'ensemble de production:

$$q_i(y_i)=\arg\max_{q_i\geqq 0}\{q_i p(q_i+y_i)-f_i(q_i)\} \tag{6}$$

et les ensembles:

$$\begin{gathered} S_i(Q)=\{q_i(y_i)\,|\,y_i+q_i(y_i)=Q \text{ pour un } y_i(Q)\geqq 0\} \\ S(Q)=S_1(Q)\times\ldots\times S_N(Q)\subset R^N \end{gathered} \tag{7}$$

Désignons par $q_i(Q)$ un élément quelconque de $S_i(Q)$ ("backward reaction function" chez Novshek [8]). On définit la multi-application $Q\rightarrow G(Q)$ par :

$$G(Q)=\left\{\tilde{Q}=\sum_{i=1}^{N}\tilde{q}_i \text{ où } \tilde{q}_i\in S_i(Q)\right\}\subset R^N. \tag{8}$$

PROPOSITION 2 : *Si* $Q\geqq Q^{\min}$ *alors* $q_i(Q)\leqq Q$.

Preuve: Définissons, pour chaque indice i, la multi-application Q_i:

$$x\rightarrow Q_i(x)=\arg\max_{0\leqq q_i\leqq Q^{\max}} q_i p(q_i+Q-x)-f_i(q_i)$$

pour x dans le segment $[0, Q^{\max}]$.

On peut définir p sur tout l'axe réel en posant $p(x)=0$ si $x=0$. Bien que cette extension crée une discontinuité de la fonction p à l'origine, la fonction de revenu globale $Qp(Q)$ est néanmoins continue à l'origine. Par conséquent $Q_i(x)$ est bien définie.

(i) L'application Q_i est semi-continue supérieurement.

Considérons deux suites $\{x_n\}$ et $\{q_i^n\}$, où $q_i^n\in Q_i(x^n)$, convergeant vers $\bar{x}$ et $\bar{q}_i$ respectivement. On a:

$$q_i^n p(q_i^n+Q-x^n)-f_i(q_i^n)\geqq q_i p(q_i+Q-x^n)-f_i(q_i)$$

pour tout n et tout q_i positif ou nul. En passant à la limite il vient:

$$\bar{q}_i p(\bar{q}_i+Q-\bar{x})-f_i(\bar{q}_i)\geqq q_i p(q_i+Q-\bar{x})-f_i(q_i)$$

pour tout q_i positif ou nul. On en déduit que $\bar{q}_i$ appartient à $Q_i(\bar{x})$ et donc que $Q_i(x)$ est semi-continue supérieurement.

Maintenant, puisque les hypothèses du théorème de point fixe de Kakutani sont satisfaites (voir Friedman [2] par exemple) on en déduit l'existence d'un point fixe pour l'application Q_i. Un point fixe de Q_i étant un élément de $S_i(Q)$ on en conclut que les ensembles $S_i(Q)$ et $S(Q)$ ne seront pas vides, si on peut montrer que $y_i(Q) \geqq 0$.

(ii) $y_i(Q) \geqq 0$, c'est-à-dire $q_i(Q) \leqq Q$.

Supposons $Q \geqq Q^{\min}$ mais $q_i(Q) > Q$. Alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leqq p(Q) + q_i(Q)\, p^-(Q) - f_i^-(q_i(Q)) \\ &< p(Q) + Q\, p^+(Q) - f_i^+(Q) \\ &\leqq p(q_i^{\min}) + q_i^{\min}\, p^+(q_i^{\min}) - f_i^+(q_i^{\min}) \quad \text{par H 1 et H 3} \\ &\leqq 0 \quad \text{par (4 } b\text{) (contradiction)} \end{aligned}$$

Donc : $q_i(Q) \leqq Q$ et : $y_i(Q) = Q - q_i(Q)$ est positif ou nul. □

Notons que le résultat précédent n'est pas nécessairement valide si $Q < \dot{Q}^{\min}$.

PROPOSITION 3 : *La production globale Q^* est une production d'équilibre si et seulement si Q^* est un point fixe de la multi-application semi-continue supérieurement G définie en* (8).

Preuve : Par définition d'un vecteur d'équilibre q_i^*, chaque q_i^* est solution de (6) avec $y_i = \sum_{j \neq i} q_j^*$. On obtient ainsi que Q^* appartient à $G(Q^*)$. Réciproquement, soit Q^* dans $G(Q^*)$; alors il existe un vecteur q^* tel que $Q^* = \sum_{i=1}^{N} q_i^*$. Le vecteur q^* constitue le vecteur d'équilibre cherché.

Pour démontrer la semi-continuité supérieure de G, considérons deux suites $\{Q^n\}$ et $\{q_i^n\}$, où q_i^n appartient à $S_i(Q^n)$ [ces ensembles ne sont pas vides : voir point (ii) de la preuve de la proposition 2], convergeant vers $\bar{Q}$ et $\bar{q}_i$ respectivement. On veut montrer que $\bar{q}_i$ appartient à l'ensemble $S_i(\bar{Q})$.

Par définition de l'ensemble $S_i(Q)$ on a l'inégalité :

$$q_i^n\, p(Q^n) - f_i(q_i) \geqq q_i\, p(q_i + Q^n - q_i^n) - f_i(q_i) \quad \text{pour tout } q_i \geqq 0.$$

En passant à la limite il vient :

$$\bar{q}_i\, p(\bar{Q}) - f_i(\bar{q}_i) \geqq q_i\, p(q_i + \bar{Q} - \bar{q}) - f_i(\bar{q}_i) \quad \text{pour tout } q_i \geqq 0$$

et par conséquent $\bar{q}_i$ appartient à $S_i(\bar{Q})$ □

PROPOSITION 4 : *Les ensembles $S_i(Q)$ sont des intervalles fermés et bornés.*

Preuve: (i) Pour prouver que les ensembles $S_i(Q)$ sont des intervalles, il suffit de montrer qu'ils constituent des sous-ensembles convexes de R. Afin d'alléger la présentation nous allons temporairement laisser de côté les indices i [ainsi $S(Q)$ désigne $S_i(Q)$ dans la preuve].

Soient q_a et q_b deux éléments de $S(Q)$ tels que $q_a \leqq q_b$. Par définition de $S(Q)$, q_a et q_b sont solutions de (6) avec $y_a = Q - q_a$ et $y_b = Q - q_b$. Par conséquent:

$$q_a p(Q) - f(q_a) \geqq qp(q + Q - q_a) - f(q) \quad \text{pour tout } q \geqq 0 \tag{9 a}$$

$$q_b p(Q) - f(q_b) \geqq qp(q + Q - q_b) - f(q) \quad \text{pour tout } q \geqq 0. \tag{9 b}$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$, $\bar{q} = \lambda q_a + (1 - \lambda) q_b$ et q un nombre plus grand que $\bar{q}$. Posons:

$$\begin{aligned}\alpha &= qp(Q + q - \bar{q}) - f(q) - \bar{q}p(Q) + f(\bar{q}) \\ &= (q - \bar{q})p(Q + q - \bar{q}) + \bar{q}[p(Q + q - \bar{q}) - p(Q)] - [f(q) - f(\bar{q})] \\ &\leqq (q - \bar{q})p(Q + q - \bar{q}) + q_a[p(Q + q - \bar{q}) - p(Q)] - [f(q) - f(\bar{q})]\end{aligned}$$

puisque $q_a \leqq \bar{q}$ et $p(Q + q - \bar{q}) \leqq p(Q)$. Or la convexité de f implique:

$$f(q) - f(\bar{q}) \geqq f(q_a + q - \bar{q}) - f(q_a)$$

Donc:

$$\begin{aligned}\alpha &\leqq (q - \bar{q})p(Q + q - \bar{q}) + q_a[p(Q + q - \bar{q}) - p(Q)] - f(q_a + q - \bar{q}) + f(q_a) \\ &= (q_a + q - \bar{q}(p(Q + q - \bar{q}) - f(q_a + q - \bar{q}) - q_a p(Q) + f(q_a \\ &\leqslant 0 \quad \text{par } (9\ a)\end{aligned}$$

On en conclut :

$$qp(Q + q - \bar{q}) - f(q) \leqslant \bar{q}p(Q) - f(\bar{q}) \quad \text{pour tout } q \geqq \bar{q} \tag{10}$$

De la même façon on démontre, cette fois en utilisant (9 *b*), que l'on a:

$$qp(Q + q - \bar{q}) - f(q) \leqq \bar{q}p(Q) - f(\bar{q}) \quad \text{pour tout } q \leqq \bar{q}, \tag{11}$$

Des inégalités (10) et (11) on peut conclure que $\bar{q}$ appartient à l'ensemble $S(Q)$, et donc que cet ensemble est convexe. Il est bon de mentionner que ce résultat ne dépend aucunement de la concavité de la fonction de revenu $Qp(Q)$.

(ii) L'ensemble $S(Q)$ est fermé.

Soit $\{q^n \mid q^n \in S(Q)\}$ une suite convergeant vers $\bar{q}$. Nous voulons montrer que $\bar{q}$ est dans $S(Q)$. On peut écrire:

$$q^n p(Q) - f(q^n) \geqq qp(Q + q - q^n) - f(q), \qquad \forall n, \quad \forall q \geqq 0,$$

En passant à la limite il vient:

$$\bar{q}p(Q) - f(\bar{q}) \geqq qp(Q + q - \bar{q}) \quad \text{pour tout } q \geqq 0,$$

On en déduit que $\bar{q}$ est dans $S(Q)$ et que $S(Q)$ est fermé.

(iii) Enfin on note que $S(Q)$ est trivialement borné puisque $S(Q) \subseteq [0, Q^{\max}]$, ce qui complète la preuve. □

Posons $S_i(Q) = [G_i^{\min}(Q), G_i^{\max}(Q)]$. La proposition suivante montre que la fonction $G_i(Q)/Q$ qui, à un nombre positif Q fait correspondre l'intervalle

$$[G_i^{\min}(Q)/Q, G_i^{\max}(Q)/Q]$$

est strictement décroissante, sur un intervalle qui contient la production d'équilibre Q^*, dans un sens qui sera précisé dans l'énoncé suivant:

PROPOSITION 5 : *Soit* $\bar{Q} > Q \geqq Q^{\min}$. *Alors on a*: $G_i^{\max}(\bar{Q})/\bar{Q} < G_i^{\min}(Q)/Q$.

Preuve: Par définition de $q_i(Q)$ et $y_i(Q)$ [voir définition (7) et ligne suivante] nous avons:

$$p(Q) + q_i(Q)p^-(Q) - f_i^-(q_i(Q)) \geqq 0 \tag{12a}$$

$$p(Q) + q_i(Q)p^+(Q) - f_i^+(q_i(Q)) \leqq 0. \tag{12b}$$

Posons: $\alpha = q_i(Q)/Q$ et réécrivons (12 *b*), après avoir temporairement laissé de côté l'indice *i*, comme:

$$p(Q) + \alpha Q p^+(Q) - f^+(\alpha Q) \leqq 0 \tag{13}$$

ou:

$$\alpha \geqq (f^+(\alpha Q) - p(Q))/Q p^+(Q)$$

On a:

$$1/\alpha \leqq -Q p^+(Q)/(p(Q) - f^+(\alpha Q))\cdot$$

$$1/\alpha - 1 \leqq (-Qp^+(Q) - p(Q) + f^+(\alpha Q))/(p(Q) - f^+(\alpha Q))$$

$$1/\alpha + ([Q p(Q)]^+ - f^+(\alpha Q))/(p(Q) - f^+(\alpha Q)) \leqq 1, \tag{14a}$$

De la même façon on obtient:

$$1/\alpha + ([Q p(Q)]^- - f^-(\alpha Q))/(p(Q) - f^-(\alpha Q)) \geqq 1 \tag{14b}$$

Maintenant soit $\bar{Q} > Q \geqq Q^{\min}$ et supposons que $\bar{\alpha} = q_i(\bar{Q})/\bar{Q}$ est supérieur ou égal à α. Par la proposition 2, il s'ensuit que $q_i(Q) \leqq Q$, $q_i(\bar{Q}) \leqq \bar{Q}$ et α, $\bar{\alpha}$ sont inférieurs ou égaux à 1. Ceci, combiné avec (13), mène à:

$$p(Q) + Qp^+(Q) - f^+(\alpha Q) \leqq 0, \tag{15}$$

On a également:

$$[\bar{Q}\, p(\bar{Q})]^- - f^-(\bar{\alpha}\bar{Q}) < p(Q) + Q\, p^+(Q) - f^+(\alpha Q) \leqq 0$$

puisque $\bar{Q} > Q$ et $q_i(\bar{Q}) = \bar{\alpha}\bar{Q} \geqq \alpha Q = q_i(Q)$. Or:

$$p(\bar{Q}) + \bar{\alpha}\bar{Q}\, p^-(\bar{Q}) - f^-(\bar{\alpha}\bar{Q}) \geqq 0$$

par définition de $q_i(\bar{Q}) = \bar{\alpha}\bar{Q}$. On utilise alors $(14b)$ pour obtenir la majoration:

$$\begin{aligned} 1 &\leqq 1/\alpha + ([\bar{Q}\, p(\bar{Q})]^- - f^-(\bar{\alpha}\bar{Q}))/(p(\bar{Q}) - f^-(\bar{\alpha}\bar{Q})) \\ &< 1/\alpha + ([Q\, p(Q)]^+ - f^+(\alpha Q))/(p(Q) - f^+(\alpha Q)) \end{aligned}$$

puisque le numérateur (négatif) du dernier terme augmente et que son dénominateur (positif) augmente. A l'aide de l'inégalité $(14a)$ on obtient $1 < 1/\alpha \leqq 1$, une contradiction.

Donc $q_i(Q)/Q$ est bien une fonction « décroissante » de la variable Q. □

COROLLAIRE : *La production globale à l'équilibre Q^* est unique.* □

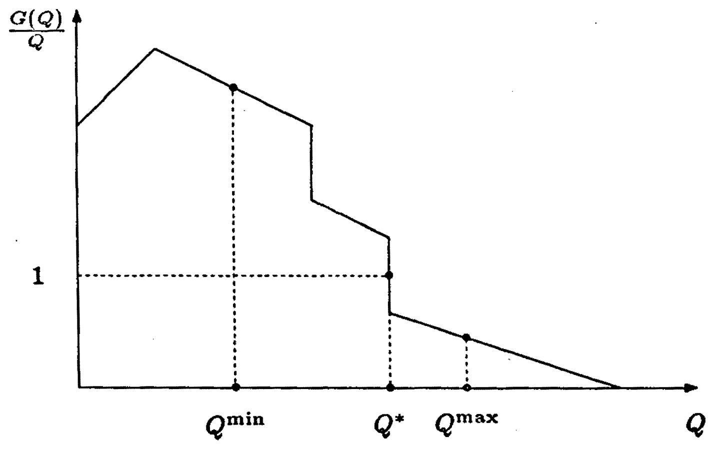

Figure 1. – La fonction de production globale.

La figure 1 fournit une forme « générique » pour la fonction $G(Q)$.

PROPOSITION 6 : Si les fonctions p et f_i sont différentiables en Q^* alors le point d'équilibre q^* est unique.

Preuve: Sous les hypothèses de différentiabilité, q^* doit satisfaire le système:

$$p(Q^*)+q_i^* p'(Q^*)-f_i'(q_i^*)\leqq 0$$
$$q_i^*[p(Q^*)+q_i^* p'(Q^*)-f_i'(q_i^*)]=0$$
$$i=1, \ldots, N$$

Puisque les dérivées f_i' sont strictement croissantes, l'équation:

$$p(Q^*)+q_i p'(Q^*)-f_i'(q_i)=0 \tag{15}$$

admet une solution unique pour Q^* fixé. Si la solution de (15) n'existe pas ou est négative alors on pose $q_i^*=0$. □

Dans Marcotte [5] on trouve un contre-exemple montrant que si les hypothèses de la proposition précédente ne sont pas satisfaites alors l'ensemble des solutions d'équilibre ne se réduit pas nécessairement à un seul point.

4. UN ALGORITHME DE RECHERCHE DICHOTOMIQUE

La proposition 5 a montré que l'on pouvait exprimer l'application G comme

$$G(Q)=[G^{\min}(Q), G^{\max}(Q)]$$

où $G^{\min}(Q)=\sum_{i=1}^{N} G_i^{\min}(Q)$ et $G^{\max}(Q)=\sum_{i=1}^{N} G_i^{\min}(Q)$. La production globale à l'équilibre Q^* satisfait l'inclusion $1\in G(Q^*)/Q^*$ et peut être obtenue en effectuant une recherche dichotomique pour localiser le zéro unique de $[G(Q)/Q-1]$ ou de $[Q-G(Q)]$. Les solutions d'équilibre correspondent alors à l'intersection du pavé $S(Q^*)$ avec l'hyperplan $H=\{q \mid \sum_{i=1}^{N} q_i=Q^*\}$. L'existence de Q^* est garantie par la proposition 2. L'unicité de Q^* découle du corollaire.

On peut utiliser $Q^{\min}$ et $Q^{\max}$ comme bornes inférieure et supérieure initiales.

On a alors les inégalités:

$$G(Q^{\min})/Q^{\min}\geqq 1\geqq G(Q^{\max})/Q^{\max}.$$

Dans une implantation sur ordinateur de l'algorithme, il est avantageux de déterminer les quantités $G_i^{\min}(Q)$ et $G_i^{\max}(Q)$ comme solutions extrémales du système d'inégalités (12 *a*)-(12 *b*); ces solutions peuvent être obtenues par recherche dichotomique. Dans le cas particulier où les fonctions impliquées sont différentiables, la production $q_i(Q)$ est déterminée en résolvant l'équation non linéaire:

$$p(Q)+q_i p'(Q)-f_i'(q_i)=0. \tag{16}$$

Une racine de (16) peut être localisée à l'aide d'une recherche binaire ou, si les dérivées d'ordre supérieur sont disponibles, par la méthode de Newton, par exemple.

Szidarovsky et Yakowitz [10] démontrent la validité de l'algorithme dans le cas particulier où la fonction p est concave et différentiable en établissant le fait que la fonction $Q-G(Q)$ est une fonction continue et croissante de Q. Nos résultats constituent une extension au cas non différentiable. En outre, notre approche est applicable dans le cas de fonctions de demande à élasticité constante convexes, les plus utilisées dans les applications. Enfin l'algorithme proposé peut être implanté sous des hypothèses moins strictes que celles adoptées jusqu'ici. En effet l'algorithme est basé sur la validité de la proposition 4 et il est fort possible que celle-ci soit satisfaite sans que, par exemple, l'hypothèse H 3 ne soit vérifiée. Cependant l'unicité de Q^* est alors remise en cause.

5. UN EXEMPLE NUMÉRIQUE

Dans cette section nous comparons, sur un même exemple, notre algorithme avec celui proposé par Murphy, Sherali et Soyster [7], décrit sommairement dans l'appendice II. Les fonctions de coût utilisées sont de la forme:

$$f_i(q_i)=c_i q_i+(\beta_i/(\beta_i+1))\, 5^{-1/\beta_i} q_i^{(\beta_i+1)/\beta_i}, \qquad i=1,\ldots,5,$$

Les coefficients c_i et β_i sont donnés ci-dessous.

$$c_1=10\, c_2=8\, c_3=6\, c_4=4\, c_5=2$$

$$\beta_1=1.2, \qquad \beta_2=1.1, \qquad \beta_3=1.0, \qquad \beta_4=.9, \qquad \beta_5=.8.$$

La fonction de demande inverse est donnée par:

$$p(Q)=(5\,000/Q)^{1/1.1}$$

L'algorithme tel qu'implanté détermine un zéro de la multi-application « croissante » $Q-G(Q)$. Au cours des deux itérations initiales, une recherche dichotomique simple, basée sur les équations (15), a été utilisée. A partir de la troisième itération la méthode de la fausse position (regula falsi) a été adoptée et se comporte de façon remarquable, ce qui semble indiquer que la fonction $Q-G(Q)$ est presque linéaire sur le segment $[Q^{\min}, Q^{\max}]$.

En utilisant la même solution initiale que Murphy, Sherali et Soyster, ainsi que des bornes inférieure et supérieure identiques, l'algorithme obtient une solution de qualité comparable en quatre itérations (versus six itérations). Après six itérations, les valeurs des variables q_i possèdent six chiffres significatifs corrects. Les calculs ont été effectués sur une calculatrice programmable (36 pas de programmation) Radio Shack EC 4004 et les résultats sont

TABLEAU I

Résultats numériques

Itér.	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
$Q^{\min}$	40.0	137.7	180.5	186.5	204.29	204.2953
$Q^{\max}$	235.4	235.4	235.4	210.9	204.32	204.3200
Q	137.7	186.5	210.9	204.32	204.29	204.2954
q_1	52.6	41.6	35.2	36.92	36.933	36.93252
q_2	54.5	45.6	40.4	41.81	41.818	41.81815
q_3	54.2	46.7	42.6	43.70	43.707	43.70658
q_4	51.4	45.1	41.8	42.65	42.659	42.65924
q_5	46.3	41.1	38.5	39.18	39.179	39.17895
$Q-G(Q)$	121.3	−33.6	12.4	.06	−.002	−.00004

présentés au tableau I. La valeur exacte de Q^* est située dans l'intervalle [204.2954, 204.2955].

La solution proposée par Murphy, Sherali et Soyster est, après six itérations de leur algorithme :

$$Q=204.306, \qquad q_1=36.912, \qquad q_2=41.842,$$
$$q_3=43.705, \qquad q_4=42.665, \qquad q_5=39.182.$$

Plus récemment, Harker [3] a résolu le même problème à l'aide d'un algorithme de diagonalisation applicable dans le contexte plus large des inéquations variationnelles. Cependant la validité de la méthode n'est garantie que si (i) la fonction de coût associée à l'inéquation variationnelle est fortement monotone ([2]) (ii) un paramètre de sous-relaxation adéquat est utilisé,

([2]) Sous nos hypothèses et celles de Harker, la fonction de coût n'est pas nécessairement monotone. Voir à ce propos le contre-exemple présenté par Marcotte [5].

qui dépend des valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction de coût, évaluées à la solution d'équilibre. Une solution de qualité comparable à la nôtre est obtenue en vingt itérations, chaque itération consistant en la résolution d'un problème de maximisation concave.

Remarque sur la complexité de calcul

Dans le cas différentiable, notre algorithme doit résoudre, à chaque itération, N problèmes d'optimisation de la forme:

$$\max_{q_i \geqq 0} q_i p(Q) + \frac{1}{2} q_i^2 p'(Q) - f_i(q_i)$$

ce qui équivaut au problème d'optimisation multidimensionnelle séparable

$$\max_{q \geqq 0} p(Q) \sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{2} p'(Q) \sum_{i=1}^{N} q_i^2 - \sum_{i=1}^{N} f_i(q_i). \tag{17}$$

En contrepartie, l'algorithme de Murphy, Sherali et Soyster [7] résoud, à chaque itération, le problème non séparable

$$\max_{q \geqq 0} p(Q) \sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{2} p'(Q) \sum_{i=1}^{N} q_i^2 - \sum_{i=1}^{N} f_i(q_i)$$

$$\text{sujet à } \sum_{i=1}^{N} q_i = Q$$

qui n'est autre que le problème (17) avec une contrainte additionnelle. Le coût de mise en œuvre de notre algorithme est donc légèrement inférieur.

Dans le cas non différentiable, une modification triviale de la recherche dichotomique permet, si les dérivées directionnelles sont aisément calculables, d'obtenir les intervalles $S_i(Q)$. Si les dérivées directionnelles ne sont pas fournies par une formule explicite, on doit alors se résigner à les estimer numériquement. Notons enfin que si les fonctions de coût de production sont deux fois continûment différentiables (la fonction de demande n'est pas supposée continûment différentiable) alors, si on remplace celles-ci par leur approximation quadratique à l'itéré courant, le système d'inégalités (12 *a*)-(12 *b*) se résoud simplement en résolvant deux équations linéaires. On peut montrer que l'algorithme modifié conserve, localement, un taux de convergence linéaire.

6. CONCLUSION

Nous avons présenté un nouvel algorithme de recherche de l'état d'équilibre d'un oligopole, qui généralise un algorithme précédemment proposé suivant deux directions : la fonction de demande n'est pas nécessairement concave, et les fonctions de production et de demande peuvent être non différentiables. Dans le cas particulier où les fonctions sont continûment différentiables, l'algorithme semble être plus efficace que les algorithmes proposés antérieurement et faisant usage des mêmes hypothèses.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Cohen et F. Chaplais, *Algorithmes numériques pour les équilibres de Nash*, R.A.I.R.O. Commande des systèmes technologiques complexes, vol. 20, n° 3, 1986, p. 273-293.
2. J. W. Friedman, *Oligopoly and the Theory of Games*, North-Holland, 1977.
3. P. T. Harker, *A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium*, Mathematical Programming, vol. 30, 1984, p. 105-111.
4. A. Haurie et M. Breton, *Market Equilibrium in a Multistage Commodity Network*, Actes du 4th I.F.A.C./I.F.O.R.S. Conference on the Modelling of Control of National Economics, juin 1983, Pergamon Press.
5. P. Marcotte, *Quelques notes et résultats nouveaux sur le problème d'équilibre d'un oligopole*, R.A.I.R.O., vol. 18, n° 2, 1984, p. 147-171.
6. P. Marcotte, *Algorithms for the Network Oligopoly Problem*, Journal of the Operational Research Society, vol. 38, n° 11, 1987, p. 1051-1065.
7. F. H. Murphy, H. D. Sherali et A. L. Soyster, *A Mathematical Programming Approach for Determining Oligopolistic Market Equilibrium*, Mathematical Programming, vol. 24, 1982, p. 92-106.
8. W. Novshek, *On the Existence of Cournot Equilibrium*, Review of Economics Studies, vol. 52, 1985, p. 85-98.
9. H. Scarf, *The Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, New Haven, CT, 1973.
10. F. Szidarovsky et S. Yakowitz, *A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium*, International Economic Review, vol. 18, 1977, p. 787-789.
11. F. Szidarovsky et S. Yakowitz, *Contributions to Cournot Oligopoly Theory*, Journal of Economic Theory, vol. 28, n° 1, 1982, p. 51-70.

APPENDICE 1

Afin de démontrer l'intérêt de considérer des fonctions de demande non différentiables, nous considérons une situation où la loi de demande dérivée, construite à partir de fonctions de demande différentiables, est non différentiable. La formulation est due à Haurie et Breton [4].

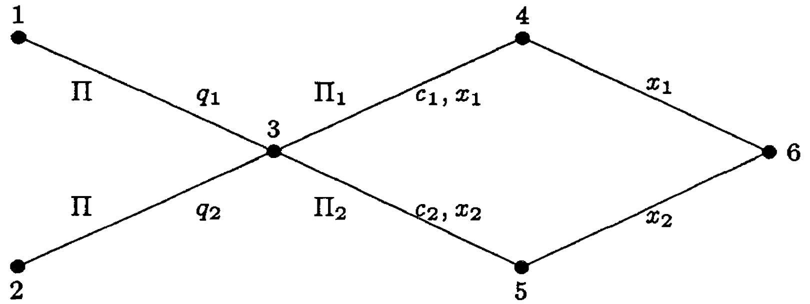

Figure 2. — Un exemple de demande dérivée.

Considérons le réseau ci-dessus (*fig.* 2).

Les nœuds 1 et 2 représentent, par exemple, les extracteurs d'un produit brut. Les nœuds 3, 4 et 5 représentent des transformateurs et le nœud 6 le marché de demande finale.

A chaque niveau, les films obéissent au principe de Cournot (ou plus précisément de Bertrand), tout en intégrant dans leur processus de maximisation les fonctions de réaction des firmes situées à leur droite (comportement à la Stackelberg). Il est possible que l'on observe une discrimination dans les prix.

Posons:

Π: prix de vente à la firme (au nœud)3.

Π_1: prix de vente de la firme 3 à la firme 4.

Π_2: prix de vente de la firme 3 à la firme 5.

c_1, c_2 $(c_1 < c_2)$: coûts de transport unitaires

q_1, q_2, x_1, x_2: flots sur les arcs du réseau.

$p(Q) = \alpha - Q$: fonction de demande inverse.

Pour les duopolistes 4 et 5, les problèmes de maximisation du profit sont, respectivement:

$$\max_{x_1 \geqq 0} x_1 (\alpha - x_1 - x_2) - x_1 (\Pi_1 + c_1)$$

$$\max_{x_1 \geqq 0} x_2 (\alpha - x_1 - x_2) - x_1 (\Pi_2 + c_2).$$

Soient $x_1 (\Pi_1, \Pi_2)$ et $x_2 (\Pi_1, \Pi_2)$ les solutions d'équilibre du système précédent. Le problème de maximisation du monopoliste 3 s'écrit alors:

$$\max_{\Pi_1, \Pi_2} (\Pi_1 - \Pi) x_1 (\Pi_1, \Pi_2) + (\Pi_2 - \Pi) x_2 (\Pi_1, \Pi_2)$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir, en fonction de la production globale $Q = q_1 + q_2$ la fonction de demande dérivée confrontant les duopolistes $1 e + 2$:

$$\Pi(Q) = \begin{array}{ll} \alpha - c_1 - 4Q & \text{si} \quad 0 \leqq Q \leqq (c_2 - c_1)/2 \\ \alpha - (c_1 + c_2)/2 - 3Q & \text{si} \quad (c_2 - c_1)/2 \leqq Q \leqq (2\alpha - c_1 - c_2)/6 \\ 0 \quad \text{sinon.} & \end{array}$$

Cette fonction est convexe (pour Q positif ou nul) et non différentiable au point $Q = (c_2 - c_1)/2$.

APPENDICE II

Considérons le programme mathématique concave:

$$\max_{q \geqq 0} p(Q) \sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{2} p'(Q) \sum_{i=1}^{N} q_i^2 - \sum_{i=1}^{N} f_i(q_i)$$

$$\text{sujet à } \sum_{i=1}^{N} q_i = Q$$

et soit $\lambda(Q)$ le multiplicateur de Lagrange (variable duale) optimal associé à la contrainte. On a le résultat:

THEOREM (Murphy, Sherali, Soyster).

Sous les hypothèses H 1-H 5 et si les fonctions de production et de demande sont continûment différentiables alors:

1. $\lambda(Q)$ est une fonction continue et strictement croissante de Q.
2. $\lambda(Q) = 0$ si et seulement si $Q = Q^*$. □

L'algorithme basé sur le résultat précédent détermine Q^* à l'aide d'une recherche dichotomique.