

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

YVES BENOIST

Modules simples et lagrangiens des orbites coadjointes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 42
« Conférences de Y. Benoist, D. Kastler, J.-F. Le Gall, P.-A. Meyer, V. Rivasseau, R. Stora,
W. Thirring, I.T. Todorov », , exp. n° 6, p. 63-66

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__42__63_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Modules simples et Lagrangiens des orbites coadjointes

par

Yves BENOIST

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente complexe, \mathfrak{k} une sous-algèbre de Lie et f un caractère de \mathfrak{k} . Nous nous intéressons aux \mathfrak{g} -modules simples qui contiennent un vecteur propre sous \mathfrak{k} de valeur propre f lorsque la sous-algèbre \mathfrak{k} est "suffisamment grosse". Lorsque cette hypothèse est satisfaite, nous relierons ces \mathfrak{g} -modules à certaines variétés lagrangiennes des orbites coadjointes (théorème ci-dessous).

1. — Introduisons quelques notations : soit $U = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Un idéal I de U est dit primitif si il existe un module simple N tel que

$$I = \{u \in U \mid u.N = 0\}$$

de sorte que N est un U/I -module fidèle.

Il existe une bijection construite par DIXMIER [Di] entre l'ensemble $G \backslash \mathfrak{g}^*$ des orbites coadjointes de \mathfrak{g} et l'ensemble $\text{Prim}(U)$ des idéaux primitifs de U .

Soient I un idéal primitif et Ω l'orbite qui lui est ainsi associée : c'est une variété symplectique. Soit $Z = \{\ell \in \Omega / \ell|_{\mathfrak{k}} = f\}$: c'est une sous-variété algébrique et coisotrope de Ω . Soit $\mathfrak{k}^f = \{X - f(X)/X \in \mathfrak{k}\}$: c'est une sous-algèbre de Lie de U .

Soit G le groupe nilpotent d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et K le sous-groupe d'algèbre de Lie \mathfrak{k} . Soit $S = \{N, \mathfrak{g}\text{-modules simples d'annulateur } I \text{ tels que } N^{\mathfrak{k}^f} \neq 0\}$ où $N^{\mathfrak{k}^f} = \{n \in N / \mathfrak{k}^f.n = 0\}$.

Notre but est de décrire cet ensemble S .

Soit M le \mathfrak{g} -module universel pour ce problème :

$$M = U / (I + U.\mathfrak{k}).$$

Décrivons tout d'abord un cas particulier.

2. Cas sphérique. — On suppose qu'il existe un automorphisme σ de \mathfrak{g} tel que $\sigma^2 = Id$ et tel que \mathfrak{k} est l'ensemble des points fixes de σ . On suppose aussi que $f = 0$.

On appelle sphérique un \mathfrak{g} -module N tel que $N^{\mathfrak{k}} \neq 0$. Remarquons que $Z = \Omega \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ et que $M = U/(I + U.\mathfrak{k})$.

PROPOSITION ([Be 1])

1) Si $Z = \emptyset$ alors $M = 0$ et $S = \emptyset$.

2) Si $Z \neq \emptyset$ alors Z est une K -orbite, M est un \mathfrak{g} -module simple et $S = \{M\}$.

COROLLAIRE. — Ceci construit une bijection entre l'ensemble des \mathfrak{g} -modules simples sphériques et l'ensemble des orbites de K dans \mathfrak{k}^{\perp} .

3. Cas général. — Reprenons les notations du 1.

THÉORÈME ([Be 2])

(a) On a l'équivalence :

Z est lagrangienne $\iff S$ est fini $\iff M$ est de longueur finie.

(b) Dans ce cas :

α) Z est une variété lisse.

β) On a une bijection canonique $\omega \rightarrow M_{\omega}$ entre l'ensemble des composantes connexes de Z et l'ensemble S . Notons m_{ω} la dimension de $(M_{\omega})^{\mathfrak{k}^{\perp}}$.

γ) On a un isomorphisme de \mathfrak{g} -modules

$$M \simeq \bigoplus_{\omega} (M_{\omega})^{m_{\omega}} .$$

En particulier m_{ω} est fini et M est un \mathfrak{g} -module semi-simple.

COROLLAIRE

1) On a l'équivalence

$$Z = \emptyset \iff S = \emptyset \iff M = 0 .$$

2) Si Z est une K -orbite, alors $M = (M_Z)^{m_Z}$.

Exemple de multiplicité. — Même lorsque Z est une K -orbite, on peut avoir $m_Z \geq 2$: c'est là une différence essentielle avec le cas sphérique.

La démonstration utilise la théorie des D -modules équivariants à la Beilinson-Bernstein.

4. Applications. — Supposons que $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, G, K$ sont les complexifiés de $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, G_0, K_0$, que f appartient à $i\mathfrak{k}_0^*$ (où $i^2 = -1$) et qu'il existe ℓ dans $i\mathfrak{g}_0^*$ tel que $\Omega = G.\ell$. Soient $\Omega_0 = G_0.\ell$, $Z_0 = Z \cap \Omega_0$, π_0 la représentation unitaire irréductible de G_0 associée à Ω_0 , $\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}$ l'ensemble des vecteurs distributions de cette représentation et $M_0 = (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{\mathfrak{k}'}$.

On sait que, par une dualité de Frobenius, la dimension de M_0 , pour presque tout π_0 , joue un rôle dans la désintégration de la représentation induite $\text{Ind}_{K_0}^{G_0}(X_f)$ où X_f est le caractère de K_0 dont la différentielle est f .

Notre théorème permet d'obtenir les informations suivantes sur cet ensemble M_0 :

COROLLAIRE. — *On a les implications*

- 1) Z est lagrangienne $\implies \dim M_0 < \infty$
- 2) $\dim M_0 < \infty \implies Z_0$ est lagrangienne
- 3) $Z = \emptyset \implies M_0 = 0$
- 4) $M_0 = 0 \implies Z_0 = \emptyset$.

Remarques :

(*) Il existe des exemples où Z_0 est une K_0 -orbite et où $\dim M_0 \geq 2$, comme dans le cas "complexe" ci-dessus. Signalons que l'exemple 6.2 de [Be 2] ne s'adapte pas à cette situation "réelle" tel quel : il est nécessaire de le modifier en travaillant dans une algèbre de Weyl A_3 à 3 variables x, y, z et en prenant pour \mathfrak{k}_0 la sous-algèbre de Lie engendrée par

$$\partial_x + x\partial_y + y\partial_z, \quad \partial_y + x\partial_z, \quad \partial_z - 1/2 \partial_x^3$$

et pour \mathfrak{g}_0 l'algèbre de Lie de dimension 26, engendrée par x, y, z et \mathfrak{k}_0 .

(*) Il existe des exemples où Z_0 est lagrangienne et où M_0 est de dimension infinie.

(*) Mais nous conjecturons que

$$Z_0 = \emptyset \implies M_0 = 0 .$$

[Be 1] *Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente*, Compositio Mathematica, **73** (1990) p. 295–327.

[Be 2] *Modules simples sur une algèbre de Lie nilpotente contenant un vecteur propre pour une sous-algèbre*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., **23** (1990) p. 495–517.

[Di] J. DIXMIER : *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, (1974).