Recherche Coopérative sur Programme n° 25

G. Loupias

Les C^*-algèbres en physique théorique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 4
« Conférences de R. Stora et textes sur les C*-Algèbres de S. Doplicher, A. Guichardet, D. Kastler et G. Loupias », , exp. n° 6, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__4__A6_0>

VI

LES C^*-ALGEBRES EN PHYSIQUE THEORIQUE

par

G. LOUPIAS

Faculté des Sciences d'Aix-Marseille

Version étendue de la Conférence donnée au
Colloque National du C.N.R.S., 19-22 avril, Marseille

67/P.195

LES C^*-ALGEBRES EN PHYSIQUE THEORIQUE

G. LOUPIAS

Faculté des Sciences de Marseille

Sous ce titre général, nous nous offrons de présenter un certain nombre d'idées émises dès 1963 par R. Haag et D. Kastler [1] et qui commencent à se répandre parmi les physiciens théoriciens. Si, à cette époque, les articles mentionnés ci-dessus se contentaient de présenter un programme motivé, les arguments alors avancés ont à l'heure actuelle largement prouvé leur intérêt et se sont révélés particulièrement féconds dans une série de travaux dont la dernière partie de cet exposé consistera à résumer les principaux résultats.

I - Mécanique quantique générale.

Peut-être convient-il d'abord de démystifier l'usage des C^*-algèbres en mécanique quantique ou en théorie des champs. Disons dès l'abord que la théorie envisagée est la théorie habituelle, mais considérée d'un point de vue, parfois qualifié d'algébrique ou d'abstrait, qui peut déconcerter à première vue les physiciens habitués à la formulation traditionnelle (ou concrète) de la mécanique quantique. Et pourtant, comment se présente habituellement la situation ?

Que ce soit en mécanique quantique usuelle, en théorie des champs relativiste ou en mécanique statistique quantique, on est en présence de la même situation, caractérisée par la donnée :

1°) d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ en terme duquel se définissent les "états" ;

2°) d'une famille $\mathcal{A}$ d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ que l'on peut choisir bornés (*) , jouissant des propriétés suivantes :

(*) En Mécanique quantique, on envisagera par exemple les fonctions bornées des variables canoniques p et q : e^{ipx} e^{iqy} .

a) si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}$ si α et β sont deux scalaires ;

b) $A.B \in \mathcal{A}$;

c) $A^* \in \mathcal{A}$, où l'$*$ désigne le passage à l'adjoint ;

d) si une suite de Cauchy $A_n \in \mathcal{A}$ converge vers A, alors $A \in \mathcal{A}$, la convergence étant définie par rapport à la topologie de la norme d'opérateur :

$$\|A\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H}, |\psi| \leq 1} |A\psi|$$

On peut alors légitiment poser la question suivante : la donnée des structures 1) et 2) est-elle indispensable à la description d'un certain système physique ou bien la structure algébrique 2) contient-elle déjà par elle-même toute l'information physique désirable ? A considérer la génèse de la mécanique quantique, la façon dont elle a été abordée par Heisenberg correspond plutôt à la seconde alternative puisqu'il se bornait à déterminer la théorie par des relations de commutation et des équations d'évolution purement algébriques dont découlent les propriétés des opérateurs. Dans ce second cas, les observables ne seraient plus des objets concrets (des opérateurs) mais simplement les éléments (abstraits) d'une structure mathématique connue sous le nom de <u>C^*-algèbre</u> et dont nous allons maintenant rappeler la définition [2] .

On appellera C^*-algèbre tout ensemble $\mathcal{A}$ sur lequel sont définies les structures suivantes :

i) $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel sur le corps C des complexes, i.e. nous savons effectuer des combinaisons linéaires :

$$A, B \in \mathcal{A} ; \alpha, \beta \in C \rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{A} .$$

ii) $\mathcal{A}$ est une algèbre, i.e. nous avons un produit bilinéaire associatif :

$$A,\ B \in \mathcal{A} \to A.B \in \mathcal{A}$$

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

$$(A+B).C = A.C + B.C$$

iii) $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre, i.e. il existe une correspondance :

$$A \in \mathcal{A} \to A^* \in \mathcal{A}$$

avec les propriétés :

$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ (antilinéaire) $\qquad A,B \in \mathcal{A}\ ;\ \alpha \in C$

$A^{**} = A$ (involutive)

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

iv) $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre normée, i.e. il existe une application

$$A \in \mathcal{A} \to \|A\| \text{ (norme de } A)$$

de $\mathcal{A}$ dans les nombres réels positifs ou nuls telle que

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ $\qquad A,B \in \mathcal{A}\ ;\ \alpha \in C$

$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\|A^*\| = \|A\|$

$\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$

v) $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre de Banach : la norme ci-dessus définit sur $\mathcal{A}$ une distance

$$\{A\ ,\ B\} \rightarrow \|A - B\| \qquad\qquad A,\ B \in \mathcal{A}$$

par rapport à laquelle $\mathcal{A}$ est complet (i.e. les suites de Cauchy convergent dans $\mathcal{A}$).

vi) Parmi toutes les $*$-algèbres de Banach, les C^*-algèbres $\mathcal{A}$ sont enfin caractérisées par la propriété

$$\|A^* A\| = \|A\|^2$$

Il est aisé de se convaincre que toute algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, fermée en norme, est une C^*-algèbre. Bornons-nous ici à prouver les propriétés les moins évidentes.

$$\|A^*\|^2 = \sup_{\psi\in\mathcal{H},\,|\psi|\leq 1} |A^*\psi|^2 = \sup_{\psi\in\mathcal{H},\,|\psi|\leq 1} (A^*\psi|A^*\psi) \leq \sup_{\psi\in\mathcal{H},\,|\psi|\leq 1} |\psi|.|AA^*\psi|$$

$$\leq \sup_{\psi\in\mathcal{H},\,|\psi|\leq 1} \|A\|.|A^*\psi| \leq \|A\|.\|A^*\|$$

Soit $\|A^*\|\leq\|A\|$, d'où l'on déduit que $\|A\|=\|A^*\|$ en remplaçant A par A^*;

$$\|A\|^2 = \sup_{\psi\in\mathcal{H},\,|\psi|\leq 1} |A\psi|^2 \leq \sup_{\psi\in\mathcal{H},\,|\psi|\leq 1} |A^*A\psi| = \|A^*A\|$$

d'où l'on déduit que $\|A^*A\|=\|A\|^2$ car inversement

$$\|A^*A\|\leq\|A^*\|.\|A\|=\|A\|^2$$

Inversement, un des théorèmes fondamentaux de la théorie des C^*-algèbres nous révèle que toute C^*-algèbre est réalisable en tant qu'algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert. Par conséquent, la considération d'une C^*-algèbre conduit à une situation du type de celle envisagée au début. Mais l'intérêt du point de vue algébrique réside dans le fait qu'en général $\mathcal{A}$ pourra être réalisée concrètement en tant qu'algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert de plusieurs manières non isomorphes et qu'on gagne ainsi la possibilité d'un choix entre ses diverses représentations.

On appelle ainsi toute application π de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que :

$$\begin{aligned} \pi(A+B) &= \pi(A) + \pi(B) \qquad\qquad A,B \in \mathcal{A},\ \alpha \in C \\ \pi(\alpha A) &= \alpha\,\pi(A) \\ \pi(A \cdot B) &= \pi(A) \cdot \pi(B) \\ \pi(A^*) &= \pi(A)^*. \end{aligned}$$

On démontre alors que $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$. La représentation sera dite fidèle si $\pi(A) = 0$ équivaut à $A = 0$, i.e. si π est biunivoque. Le théorème cité plus haut assure l'existence de (au moins) une représentation fidèle. Si la représentation n'est pas fidèle on appellera Ker $\mathcal{A}$ (Noyau de $\mathcal{A}$) le sous-espace de $\mathcal{A}$ des éléments $\mathcal{A}$ tels que $\pi(A) = 0$. Enfin deux représentations π_1 et π_2 sur $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement seront dites unitairement équivalentes s'il existe un opérateur unitaire U appliquant $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ et tel que

$$\pi_2(A)\, U = U\, \pi_1(A) \qquad , \qquad A \in \mathcal{A}.$$

En possession de ces notions, nous pouvons caractériser le point de vue traditionnel par la donnée :

a) d'une C^*-algèbre $\mathcal{A}$;

b) d'une représentation fidèle π (ou plutôt d'une classe de représentations unitairement équivalentes) de $\mathcal{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Les opérateurs $\pi(A)$ self-adjoints représentent les observables tandis que les états sont décrits par les matrices densité Φ, c'est-à-dire les opérateurs à trace positifs (i.e. opérateurs dont les éléments de matrice diagonaux sont positifs et ont une somme finie). Chaque matrice densité définit selon

$$\varphi(A) = \mathrm{Tr}\ \Phi \cdot \pi(A) \qquad , \quad A \in \mathcal{A}$$

une forme linéaire sur $\mathcal{A}$, positive (*) en ce sens que

$$\varphi(A^* A) \geq 0 \qquad , \quad A \in \mathcal{A}$$

Etant donnée une C^*-algèbre $\mathcal{A}$, on appelle en effet <u>forme positive sur $\mathcal{A}$</u> toute forme linéaire complexe

$$A \to \varphi(A)$$

sur $\mathcal{A}$ telle que

$$\varphi(A^* A) \geq 0$$

On montre que toute forme positive est bornée, c'est-à-dire telle que

$$|\varphi(A)| \leq \|\varphi\| \cdot \|A\|$$

avec $\|\varphi\| = \varphi(1)$ si $\mathcal{A}$ contient une unité. On appellera <u>états</u> les formes positives normées, c'est-à-dire telles que $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$. Toute combinaison convexe de formes positives étant une forme positive, ces dernières forment un cône convexe $\mathcal{S}$ (le cône positif dans l'espace dual des formes linéaires bornées sur $\mathcal{A}$). Les matrices densité considérées plus haut forment également un cône convexe positif $\mathcal{T}_\pi^+$ dans le dual de $\mathcal{A}$ mais qui ne coïncide en général pas avec le cône $\mathcal{S}$.

Nous voyons maintenant se creuser la différence entre les deux points de vue. Puisque, dans une théorie algébrique, on conviendra de ne considérer aucune représentation comme privilégiée, la situation y sera uniquement caractérisée par la donnée d'une C^*-algèbre (abstraite) $\mathcal{A}$

(*) En effet tout opérateur positif est de la forme $\Phi = T^*T$ où T est un opérateur borné, donc $\varphi(A^*A) = \mathrm{Tr}\ T^*T\pi(A)^*\pi(A) = \mathrm{Tr}(T\pi(A)^*)^* T\pi(A)^* \geq 0$

dont les éléments $A \in \mathcal{A}$ tels que $A^*=A$ correspondront aux observables. Seront alors interprétés comme les états physiques tous les états de $\mathcal{A}$ définis comme plus haut. Avec ce point de vue nous avons en général davantage d'états qu'en se limitant à ceux fournis par les matrices densité d'une représentation particulière π de $\mathcal{A}$, appelés par les mathématiciens états normaux de la représentation π.

Il est donc temps de faire un choix, motivé par des considérations physiques. L'exemple suivant nous y aidera. Supposons que nous voulions décrire l'état d'un gaz à température et densité données en mécanique statistique (c'est-à-dire en théorie des champs non relativiste). Si l'on opte pour le point de vue traditionnel, on considèrera que le gaz est contenu dans une boîte de dimensions finies et on le décrira à l'aide d'une matrice densité sur l'espace de Fock correspondant. En effet, cette représentation est caractérisée entr'autre par l'existence d'un opérateur nombre de particules dont les valeurs propres sont essentiellement finies, et est donc en mesure de définir un amas localisé de particules (dans une boîte). Ensuite, comme un tel état doit être de manière évidente invariant de translation, on fera tendre vers l'infini les dimensions de la boîte. Mais l'état obtenu à la limite n'est plus une matrice densité dans l'espace de Fock et n'est strictement descriptible comme matrice densité qu'à condition de passer à une représentation essentiellement différente (unitairement inéquivalente à la représentation de Fock). L'attitude traditionnelle consiste à s'interdire de "sortir de l'espace de Fock" (*) .

En théorie algébrique, on préfèrera décrire d'emblée l'état limite en tant qu'état rigoureusement invariant de translation dans la représentation qui lui convient le mieux mathématiquement mais à laquelle on n'attache pas de signification physique particulière. Ces deux attitudes diffèrent senseiblement du point de vue mathématique (l'attitude algébrique

(*) Le phénomène peut être observé à l'aide de calculs explicites dans le cas de bosons ou de fermions libres [3].

étant à cet égard beaucoup plus flexible) (*) mais sont certainement équivalentes d'un point de vue physique : à condition de prendre les dimensions de la boîte initiale assez grandes, les résultats de mesures effectuées dans une région finie de l'espace pourront être décrits avec une précision arbitraire par l'un ou l'autre de ces états.

Plus généralement, nous sommes conduits à nous poser la question suivante : quand pourrons-nous considérer que deux représentations π_1 et π_2 d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ sont <u>physiquement équivalentes</u> ? L'exemple précédent nous invite à répondre : lorsque tout ensemble fini de mesures décrit à l'aide d'une matrice densité sur $\mathcal{H}_{\pi_1}$ pourra l'être à l'aide d'une matrice densité sur $\mathcal{H}_{\pi_2}$ (et réciproquement), et ceci avec n'importe quel degré de précision fixé à l'avance. En d'autres termes, cela signifie que si

$$A_1,\ldots,A_n \in \mathfrak{A}, \quad \Phi_1 \in \mathcal{T}^+_{\pi_1}, \qquad \varepsilon > 0$$

sont donnés, on doit pouvoir trouver $\Phi_2 \in \mathcal{T}^+_{\pi_2}$ telle que

$$|\mathrm{Tr}\ \Phi_1\ \pi_1(A_i) - \mathrm{Tr}\ \Phi_2\ \pi_2(A_i)| = |\varphi_1(A_i) - \varphi_2(A_i)| \leq \varepsilon ,$$

(*) Le choix de la représentation de $\mathfrak{A}$ mathématiquement la mieux adaptée à un problème particulier est analogue d'un point de vue épistémologique au choix d'un système de paramètres particuliers en mécanique analytique classique où il serait dommage de se condamner à priori de n'utiliser que des coordonnées cartésiennes. De même que l'exposé de la mécanique analytique dans un système de coordonnées arbitraires révèle au mieu les traits généraux de la théorie, on s'attend à ce qu'un exposé algébrique de la théorie quantique des champs permette au mieux d'en dégager les traits essentiels.

et réciproquement. En termes mathématiques, cela signifie que $\mathcal{T}^+_{\pi_1}$ et $\mathcal{T}^+_{\pi_2}$ ont dans $\mathcal{S}$ la même fermeture pour la topologie faible (*). (Précisons que $\mathcal{S}$ est fermé dans le dual de $\mathcal{A}$ muni de la topologie faible).

Cette situation a été étudiée par les mathématiciens qui la qualifient d'équivalence faible des représentations π_1 et π_2 [4] . C'est là une notion d'équivalence beaucoup moins stricte que l'équivalence unitaire, et un théorème contenu dans [4] affirme que deux représentations sont faiblement équivalentes si et seulement si elles ont le même noyau.

Par conséquent toutes les représentations fidèles d'une C^*-algèbre sont physiquement équivalentes. Le raisonnement précédent montre que le choix d'une représentation particulière n'a rien d'absolu [1] . En particulier, il est tout-à-fait loisible d'utiliser une représentation différente de la représentation de Fock toutes les fois où la situation nous y incite : nous l'avons vu dans l'exemple ci-dessus ; ce sera par exemple aussi le cas dès que le problème fait entre en jeu des particules de masse nulle [5].

Cette liberté dans le choix de la représentation est, nous l'avons vu, une des caractéristiques du point de vue algébrique. Si la C^*-algèbre abstraite $\mathcal{A}$ a été convenablement choisie (nous reviendrons là-dessus dans la deuxième partie), il existe dans $\mathcal{S}$ un état φ qui correspond à la situation physique envisagée (par exemple, un gaz en équilibre thermodynamique). Cet état nous fournit alors la représentation appropriée grâce à la construction de Gelfand-Segal [6],[7],[2] , procédé qui permet d'associer de manière biunivoque à tout état φ sur $\mathcal{A}$ le couple $\{\pi_\varphi, \Omega\}$ où π_φ est une représentation de $\mathcal{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$ et Ω un vecteur distingué de $\mathcal{H}_\varphi$, et que nous allons décrire brièvement pour terminer cette première partie.

(*) Les voisinages d'un $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ dans la topologie faible sont précisément définis comme les ensembles de $\varphi \in \mathcal{S}$ tels que

$$|\varphi(A_i) - \varphi_0(A_i)| \leq \varepsilon \quad , \text{ où } i = 1,\dots,p \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ sont donnés.}$$

La relation précédente affirme qu'on doit pouvoir trouver un $\varphi_2 \in \mathcal{T}^+_{\pi_2}$ dans un voisinage faible arbitraire de $\varphi_1 \in \mathcal{T}^+_{\pi_1}$.

Etant donnés π_φ et Ω, on a $\varphi(A) = (\Omega|\pi_\varphi(A)\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$. Inversement, étant donné φ, désignons par N l'ensemble des éléments A de $\mathcal{A}$ tels que $\varphi(A^*A) = 0$. C'est un idéal gauche de $\mathcal{A}$ (i.e. N est linéaire et si $A \in N$, $B \in \mathcal{A}$ alors $BA \in N$). L'espace de Hilbert est obtenu en considérant l'espace des classes $\mathcal{A}/N$ (d'éléments $\hat{A}$) de $\mathcal{A}$ modulo N et en le complétant pour le produit scalaire $(\hat{A}|\hat{B}) = \varphi(A^* B)$, le vecteur Ω correspondant alors à la classe de l'élément unité de $\mathcal{A}$ s'il en existe un (on peut toujours se ramener à ce cas-là). La représentation se définit alors par prolongement continu de l'opérateur $\pi_\varphi(B)\hat{A} = \widehat{BA}$.(*).

II - Théorie quantique des champs relativiste.

En ce qui concerne la mécanique quantique d'un système fini, les deux points de vue envisagés ne présentent pas de différence. On sait en effet que dans le cas d'un système à nombre fini de degrés de liberté les relations de commutation canoniques :

$$[p_i, p_j] = 0 \quad ; \quad [q_i, q_j] = 0 \quad ; [p_i, q_j] = i\delta_{ij} \quad , \quad i,j=1,\ldots,n$$

ne possèdent qu'une représentation irréductible à une équivalence unitaire près, et ce théorème de Von Neumann s'étend d'une manière essentielle aux C^*-algèbres des systèmes canoniques [8] .

Par contre, en théorie des champs, ces mêmes relations de commutation possèdent une infinité de représentations non unitairement équivalentes. Ceci indique qu'en théorie des champs la méthode algébrique a l'avantage d'être beaucoup plus intrinsèque que la théorie usuelle : on s'attend à ce que l'entité mathématique fondamentale soit une C^*-algèbre abstraite. On choisit cette dernière en se fondant sur le principe de localisation qui affirme que seules ont un sens physique des observables ou des opérations

(*) Cette construction qui permet de reconstituer l'espace de Hilbert à l'aide d'un état est essentiellement identique au "reconstruction theorem" de Wightmann familier aux physiciens théoriciens.

mesurées ou effectuées dans une région bornée d'espace-temps (observables locales engendrant l'algèbre quasi-locale (*)) [9],[1] . En théorie relativiste on postulera pour l'algèbre quasi-locale $\mathcal{A}$ les propriétés suivantes :

i) À toute région finie 0 (ouvert relativement compact) de l'espace-temps, on associera la C^*-algèbre abstraite $\mathcal{A}(0)$ des opérations locales;

ii) Si 0_1 et 0_2 sont de genre espace l'un par rapport à l'autre, $\mathcal{A}(0_1)$ et $\mathcal{A}(0_2)$ commutent ;

iii) Si $0_1 \subset 0_2$, $\mathcal{A}(0_1) \subset \mathcal{A}(0_2)$. Dans ces cas l'injection est isométrique. Par conséquent $\bigcup\limits_{0} \mathcal{A}(0)$ (**) est une $*$-algèbre normée dont le complété est la C^*-algèbre $\mathcal{A}$ des opérations quasi-locales.

iv) Si G est le groupe d'invariance de la théorie (groupe de Lorentz, groupe des translations spatiales, etc...) il est représenté (***) par des automorphismes de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire des applications biunivoques (automatiquement isométriques)

$$A \in \mathcal{A} \to A^g \in \mathcal{A} \qquad , \quad g \in G$$

telles que

$$A^{g_1} A^{g_2^{-1}} = A^{g_1 g_2^{-1}} , (A.B)^g = A^g B^g , \; (A^*)^g = (A^g)^* \qquad , \; g, g_1, g_2 \in G$$

avec en outre la condition de covariance

(*) On appellera observable quasi-locale toute limite en norme d'une suite d'observables locales.

(**) Les mathématiciens comprendront cette notation au sens de la limite inductive.

(***) Au sens des représentations d'un groupe sur un espace vectoriel.

$$\mathfrak{A}(O)^g = \mathfrak{A}(g\,O)$$

si $g\,O$ est le transformé de O par g. (*)

Avec ce choix de $\mathfrak{A}$ dicté par le principe de localisation, la différence entre le point de vue concret et global d'une part et le point de vue algébrique et local d'autre part devient particulièrement nette et instructive si l'on se penche sur les secteurs de super-sélection.

Considérons une représentation π de notre C^*-algèbre telle qu'il existe un ou plusieurs opérateurs non triviaux qui commutent avec tous les opérateurs de la représentation (dans la forme habituelle c'est le cas par exemple de la charge totale, du nombre baryonique total, etc...) et telle qu'elle se décompose en une somme de représentations irréductibles, agissant sur les secteurs de super-sélection, correspondant chacune à une valeur de la charge, du nombre baryonique, etc... On notera que de tels opérateurs de super-sélection sont des observables globales (donc ne sont pas l'image par π d'un élément de $\mathfrak{A}$): ils sont inobservables physiquement car on ne peut mesurer e.g. la charge totale de l'univers. Deux secteurs différents ne pourront être distingués l'un de l'autre en effectuant uniquement des opérations locales et tous les secteurs déterminent des représentations physiquement équivalentes comme le montre l'exemple suivant.

Supposons que nous voulions étudier une diffusion électron-position : cet état est décrit par une matrice densité dans le secteur de charge 0. Mais nous pourrons tout aussi bien le décrire à l'aide d'une matrice densité dans le secteur de charge 2, par exemple en considérant l'état dans lequel, outre l'électron et le positron, on dispose deux particules de charge +1 confinées dans une région de l'espace suffisamment éloignée. L'état considéré dans le secteur de charge 0 peut donc être arbitrairement approximé dans la topologie faible par un état dans le secteur de charge 2 (ou d'une charge arbitraire). Par conséquent chaque secteur détermine une représentation fidèle de $\mathfrak{A}$ (**) et contient à lui seul toute l'information

---

(*) Pour l'axiome de positivité, voir [10], [11].

(**) Puisqu'il détermine des représentations de même noyau dont la somme directe est fidèle.

physique (*).

En tant qu'image d'une C^*-algèbre, $\pi(\mathcal{A})$ est fermé en norme mais il est important de noter que $\pi(\mathcal{A})$ n'est pas faiblement fermé. Si π_n désigne la sous-représentation de π dans le $n^{\text{ième}}$ secteur, il résulte de la fidélité des π_n que tous les opérateurs $\pi_n(A)$ sont biunivoquement liés l'un à l'autre.
Considérons maintenant la fermeture faible (ou le bicommutant) de $\pi(\mathcal{A})$. Chaque π_n étant irréductible, le commutant de $\pi(\mathcal{A})$ est formé des opérateurs qui, dans chaque secteur, se réduisent à un multiple de l'identité. Donc le bicommutant est constitué par tous les opérateurs qui se réduisent sur chaque secteur à un opérateur borné arbitraire et complètement indépendant de ceux apparaissent dans les autres secteurs. Cette fermeture faible contiendra donc tous les projecteurs sur chaque secteur et toutes les observables globales. Mais elle ne peut donner lieu à une formulation basique de la théorie.

Les considérations précédentes montrent l'intérêt de la méthode algébrique pour la compréhension des secteurs de supersélection. Un autre domaine important où cette méthode apporte une clarification conceptuelle est celui des symétries spontanément brisées. Nous avons vu plus haut que le choix d'une représentation de $\mathcal{A}$ s'accompagne traditionnellement du choix d'une représentation π et du sous-ensemble $\mathcal{T}_\pi^+$ des états normaux de cette représentation (matrices densité). Si notre théorie a un groupe d'invariance G agissant comme automorphismes de $\mathcal{A}$, et donc aussi dualement dans l'espace des états $\mathcal{E}$, il pourra se faire que $\mathcal{T}_\pi^+$ ne soit pas invariant par G. Dans ce cas on a une théorie invariante dont la symétrie est brisée par la représentation. Ce phénomène est clairement décrit pour la première fois par R. Haag dans le cas du modèle B.C.S. pour le groupe de jauge [12].

(*) La représentation habituelle contient un appareil analytique dont la richesse peut être pratique à beaucoup d'égard mais dont le caractère plétorique masque les traits fondamentaux de la théorie.

Signalons que le théorème de Goldstone peut être démontré rigoureusement dans le cadre algébrique [13]. Le théorème de Coleman est également de nature essentiellement algébrique [14].

III - Développements récents en mécanique statistique.

Le temps nous manque pour parler ici des divers travaux de H.J. Borchers [15] et H. Araki [16] . La complexité de leur technique nous empêchera de le faire dans le cadre de cet exposé. Nous nous étendrons surtout sur les applications récentes à la mécanique statistique.

Considérons dans la C^*- algèbre $\mathfrak{A}$ des observables quasi-locales et le groupe d'invariance G de la théorie (par exemple le groupe des translations spatiales) représenté dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{A}$. Un état φ sur $\mathfrak{A}$ sera dit invariant si $\varphi(A^g) = \varphi(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ et $g \in G$. Il est aisé de voir que si l'on procède à la représentation de Gelfand avec un tel état, on obtient également une représentation unitaire U de G en posant

$$U(g)\hat{A} = \widehat{A^g}$$

Elle est telle que

$$U(g)\Omega = \Omega \quad \text{et} \quad U(A^g) = U(g)\ \pi(A)\ U(g)^{-1}$$

Les états d'équilibre thermodynamique en mécanique statistique sont des états de ce type.

Il est en outre naturel de demander, en plus des axiomes précités, que l'algèbre quasi-locale soit <u>asymptotiquement abélienne</u> en ce sens que $[A, B^g]$ "tend vers 0 quand g tend vers l'infini" . Cela signifie en effet que deux opérations effectuées dans deux régions d'espace suffisamment éloignées sont sans corrélations. Sous cette hypothèse assez faible et physiquement naturelle, on peut parvenir aux résultats suivants [17], [18].

Tout état invariant admet une décomposition unique en intégrales d'<u>états invariants ergodiques</u> caractérisés par l'une ou l'autre des propriétés ci-dessous :

a) Ω est le seul vecteur tel que $U(g)\Omega = \Omega$ (unicité du vide) ;

b) la famille des opérateurs $U(g) \cup \pi(\mathfrak{A})$ est irréductible ;

c) $\lim\limits_{V \to \infty} \frac{1}{V} \int_V \chi_V \{\varphi(A^g B) - \varphi(A^g)\, \varphi(B)\} dg = 0$

où V est un élément de volume dans l'espace de fonction caractéristique χ_V. Cette propriété signifie que les corrélations entre les mesures de B et de A^g sont, pour g grand, de nature oscillatoire ;

d) L'état considéré est un élément extrémal du cône convexe des états invariant ;

e) La mesure centrale associée est ergodique.

L'intérêt des états ergodiques provient mathématiquement du théorème de décomposition univoque précité et physiquement de la propriété de "clustering" c) et de la propriété d) d'extrémalité qui montre clairement que les états ergodiques sont les candidats par la description des phases thermodynamiques d'un système (un mélange de phases n'est plus une phase de même qu'une combinaison linéaire convexe d'états ergodiques n'est plus ergodique). L'étude des états ergodiques conduit naturellement à une théorie des symétries cassées. Par exemple, pour les états ergodiques de translation, on obtient une classification de ces derniers en examinant le spectre discret des opérateurs infinitésimaux représentant les translations, dont on démontre que c'est un sous-groupe du groupe additif des impulsions (*). L'état ergodique envisagé sera dit état E_I, E_{II} ou E_{III} selon que ce sous-groupe contient un seul élément, constitue un réseau à maille finie ou un réseau partout dense, ces trois cas étant les seuls possibles. Les états E_{II} sont à leur tour décomposables en L-states, états ergodiques par rapport à un sous-groupe périodique du

---

(*) Généralisation du "sub-group theorem" de la théorie ergodique classique.

groupe des translations (ce dernier est le groupe des périodes d'un cristal, réciproque du sous-groupe discret sus-mentionné, qui est donc le groupe réciproque des cristallographes).

On peut traiter suivant des principes analogues les symétries cassées apparaissant en ferromagnétisme, en supraconductivité, en suprafluidité, etc ... Pour le cas des groupes cristallographiques, voir [18].

Cette théorie est en fait généralisable à des groupes G localement compacts non commutatifs [19] . Elle se trouve alors être une généralisation non abélienne de la théorie ergodique.

Signalons rapidement que la condition connue en mécanique statistique sous le nom de condition de Kubo - Martin - Schwinger est susceptible d'une élégante formulation algébrique révélant les traits généraux d'états d'équilibre à température finie [20].

Les états quasi-libres (correspondant à l'approximation de Hartree - Fock et permettant de construire des modèles de quasi-particules) admettent également une description élégante dans le cadre algébrique. Leur classification conduit naturellement à la transformation de Bogoliubov en tant qu'automorphisme de C^* - algèbres [21].

Ainsi l'approche algébrique conduit les physiciens théoriciens à introduire et étudier des structures mathématiques suffisamment intéressantes par elles-mêmes pour qu'une collaboration efficace ait pu s'instaurer entre physiciens et mathématiciens. Cette situation ne pourra qu'être bénéfique aux recherches entreprises tant en théorie des champs et en mécanique statistique qu'en théorie des algèbres d'opérateurs. Par exemple des considérations d'origine physique ont conduit R. Powers à résoudre un problème posé depuis des années en théorie des opérateurs [22] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. HAAG et D. KASTLER : J. Math. Phys. : 5 , 848 (1964).

D. KASTLER : Proceedings of the Conference on Function Spaces and Physics applications . M.I.T. Cambridge Mass. (1964).

[2] J. DIXMIER : Les C*-algèbres et leurs représentations. Paris : Gauthier-Villars (1964).

D. KASTLER : Cours de 3ème Cycle. Marseille (1965).

R.V. KADISON : Lectures on operators algebras . Cargèse Lectures on Theoretical Physics (1965).

[3] H. ARAKI et E.J. WOODS : J. Math. Phys. 4 , 637 (1963) .

H. ARAKI et W. WYSS : H.P.A. , 37 , 136 (1964).

[4] J.M.G. FELL : Trans. Am. Math. Soc. 94 , 365 (1960).

[5] H.J. BORCHERS, R. HAAG et B. SCHROER : Nuovo Cimento 29 , 148 (1963).

[6] I.M. GELFAND et M.A. NAIMARK : Isvertija Ser. Mat. 12 , 445 (1948).

I.E. SEGAL : Bull. Am. Math. Soc. 53 , 73 (1947).

[7] M.A. NAIMARK : Normed Rings - Noordhoff, Gröningen (1959).

[8] J. von NEUMANN : Math. Ann. 107, 570 (1931).

D. KASTLER : Comm. Math. Phys. 1, 14 (1965).

G. LOUPIAS et S. MIRACLE-SOLE : Comm. Math. Phys. 2 , 31 (1966).

G. LOUPIAS et S. MIRACLE-SOLE : Ann. I.H.P. 6A , 39 (1967).

[9] R. HAAG : Colloque International sur les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs. Lille 1959. Pub. CNRS Paris.

[10] S. DOPLICHER : Comm. Math. Phys. : 1, 1 (1965).

[11] H. ARAKI : Progress of Theor. Phys. 32 , 844 (1964).

[12] R. HAAG : Nuovo Cimento 25 , 287 (1962).

[13] J. GOLDSTONE : Nuovo Cimento 19 , 154 (1961).

J. GOLDSTONE, A. SALAM et S. WEINBERG : Phys. Rev. 127 , 965 (1962).

D. KASTLER, D.W. ROBINSON et A. SWIECA : Commun. Math. Phys. 2, 108 (1966).

R. HAAG : Proc. of Boulder - Proc. of the Hawaï Summer School (1965).

J.A. SWIECA : Commun. Math. Phys. 4 , 1 (1967)

H. EZAWA et J.A. SWIECA : Commun. Math. Phys. 5 , 330 (1967).

R.S. STREATER : Proc. Roy. Soc. (London) 287A , 510 (1965). et
Proc. of the M.I.T. Conference on the Mathematical
Theory of Elementary Particles (1966).

H. REEH : One Parameter Symmetry Transformations - Princeton, preprint.

K. SYMANZIK : Commun. Math. Phys. 6 , 228 (1967).

D. KASTLER : International Theoretical Physics Conference on Particles
and Fields. Rochester (1967).

[14] S. COLEMAN : J. Math. Phys. 7 , 787 (1966).

J.A. SWIECA : Phys. Rev. Letters 17 , 974 (1966).

E. FABRI et L.E. PICASSO : Phys. Rev. Letters 16 , 408 (1966).

D.W. ROBINSON : Istambul Nato Summer School Volume (1966).

B. SCHROER et P. STICHEL : Comm. Math. Phys. 3 , 258 (1966)

J. NUYTS, K. HEPP et H. EPSTEIN in Princeton Seminar (1966).

J.A. SWIECA : Conserved currents, renormalization and zero-mass states.
Sao Paulo preprint.

[15] H.J. BORCHERS : Comm. Math. Phys. 1 , 49 (1965)
Comm. Math. Phys. 1 , 57 (1965)
Comm. Math. Phys. 1 , 281 (1965)

[16] H. ARAKI : J. Math. Phys. 11 , 1343 (1963)

H. ARAKI et E.J. WOODS : Complete boolean algebras of type I factors.
Maryland preprint.

H. ARAKI : Local Quantum Field Theory (Ouvrage à paraître).

[17] S. DOPLICHER, D. KASTLER et D.W. ROBINSON : Commun. Math. Phys. 3 ,
1 (1966).

D. RUELLE : Commun. Math. Phys. 3 , 133 (1966).

D. KASTLER et D.W. ROBINSON : Commun. Math. Phys. : 3 , 151 (1966)

D.W. ROBINSON et D. RUELLE : Ann. I.H.P. 6A , 299 (1967).

O. LANFORD et D. RUELLE : J. Math. Phys. 8 , 1460 (1967).

S. DOPLICHER, R.V. KADISON, D. KASTLER et D.W. ROBINSON, Commun. Math.
Phys. 6 , 101 (1967).

[18] R. HAAG, D. KASTLER et L. MICHEL : Central decomposition of invariant
states. Preprint.

[19] S. DOPLICHER et D. KASTLER : Commun. Math. Phys. (à paraître).

[20] R. HAAG, N. HUGENHOLTZ et M. WINNINK : Commun. Math. Phys. 5 , 215
(1967).

N. HUGENHOLTZ : Commun. Math. Phys. 6, 189, (1967).

E. STORMER : Commun. Math. Phys. 6 , 194, (1967).

D. KASTLER et J. POOL : A remark on the work of Haag, Hugenholtz, and Winnink (Preprint).

[21] D.W. ROBINSON : Commun. Math. Phys. 1 , 159 (1965).

E. BALSLEV et A. VERBEURE : States on Clifford Algebras. I.H.E.S. Preprint.

J. MANUCEAU et A. VERBEURE Preprint (Marseille).

[22] R. POWERS : Ann. of Math. 86 , 138, (1967).