

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

ALDO ANDREOTTI

FRANÇOIS NORGUET

La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 1
« Travaux de A. Andreotti et F. Norguet sur les espaces analytiques Q-pseudoconvexes »,
, exp. n° 3, p. 1-68

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__1__A3_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CONVEXITÉ HOLOMORPHE DANS L'ESPACE ANALYTIQUE
DES CYCLES D'UNE VARIÉTÉ ALGÈBRE

par Aldo ANDREOTTI et François NORGUET

Introduction

X étant un sous-espace algébrique (compact) de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, la méthode classique de construction de la "variété de Chow" permet de doter d'une structure d'espace algébrique projectif l'ensemble $C_d^+(X)$ de ses d -cycles analytiques positifs (combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs de sous-ensembles analytiques de dimension d en chaque point) ; pour tout ouvert Y de X , l'ensemble $C_d^+(Y)$ des éléments de $C_d^+(X)$ contenus dans Y est un ouvert de $C_d^+(X)$; sa structure analytique, mais non (Corollaire du théorème 3) celle de son normalisé faible - que nous désignerons encore par $C_d^+(Y)$ - peut dépendre de la réalisation de Y comme sous-espace de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Normaliser faiblement un espace analytique, c'est enrichir son faisceau structural en considérant encore comme "holomorphe" dans un ouvert U toute fonction continue dans U et holomorphe aux points réguliers de U ; l'espace obtenu est encore analytique (théorème 1).

Pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , continue dans Y , la fonction à valeurs complexes F_φ définie dans $C_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_c \varphi \quad \text{pour tout } c \in C_d^+(Y)$$

est continue (théorème 4). Si φ est réelle et deux fois différentiable et si le courant $\frac{i}{\pi} d'd''\varphi$ est positif, alors F_φ est plurisousharmonique.

Si φ est indéfiniment différentiable et vérifie $d^n \varphi = 0$, alors F_φ (qui ne dépend que de la classe de d^n -cohomologie de φ) est holomorphe (théorème 5). Désignant par Ω^d (resp. \mathcal{O}) le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré d dans Y (resp. de fonctions holomorphes dans $C_d^+(Y)$), on a ainsi, vu le théorème de Dolbeault, une application linéaire

$$\rho^{(0)} : H^d(Y, \Omega^d) \longrightarrow H^0(C_d^+(Y), \mathcal{O})$$

dont l'image est contenue dans l'ensemble des éléments de $H^0(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ qui vérifient

$$f(c_1 + c_2) = f(c_1) + f(c_2)$$

pour tous $c_1 \in C_d^+(Y)$, $c_2 \in C_d^+(Y)$. Soit $A_d(Y)$ l'algèbre engendrée dans $H^0(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ par l'image de $\rho^{(0)}$ et par les constantes.

Si Y (supposé à frontière non vide et sans points singuliers) est strictement d -pseudoconvexe (au sens de [3], N° 5), alors $C_d^+(Y)$ est $A_d(Y)$ -convexe : c'est ce qu'exprime la Proposition 7 de [3]. Comme $C_d^+(Y)$ est faiblement normal, $H^0(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ est (vu le théorème 2) la fermeture intégrale faible de $A_d(Y)$, c'est-à-dire : $H^0(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ est constitué par les fonctions f , continues dans Y , telles que, pour tout compact K de Y , il existe une équation de la forme

$$w^p + a_1(x) \cdot w^{p-1} + \dots + a_p(x) = 0$$

satisfaite pour $x \in K$ et $w = f(x)$, où les a_i sont des fonctions sur K , limites uniformes de restrictions à K d'éléments de $A_d(Y)$. Si, de plus, $H^{d+1}(Y, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} dans Y (en particulier si Y est d -complet), alors $A_d(Y)$ sépare les points de $C_d^+(Y)$: c'est ce qu'exprime le théorème 5 de [3].

Un théorème de Runge (théorème 7) permet d'étudier aussi le cas de variétés sans bord (théorème 8).

Enfin l'étude d'exemples simples conduit à la définition d'une application naturelle

$$\rho^{(1)} : H^{d+1}(X, \Omega^d) \longrightarrow H^1(C_d^+(X), \mathcal{O})$$

"dérivée" de $\rho^{(0)}$.

§ 1 . Sur la normalisation faible d'un espace analytique .

1 . Construction de la normalisation faible .

Théorème 1 . Pour tout espace analytique X , il existe un espace analytique \hat{X} et une application holomorphe bijective

$$\hat{\pi} : \hat{X} \longrightarrow X$$

ayant la propriété suivante :

pour tout espace analytique Y et toute application

$$\sigma : Y \longrightarrow X$$

holomorphe, ouverte et injective, il existe une application holomorphe

$$\tau : \hat{\pi}^{-1}(\sigma(Y)) \longrightarrow Y$$

vérifiant

$$\sigma \circ \tau = \hat{\pi} \Big|_{\hat{\pi}^{-1}(\sigma(Y))} .$$

Preuve . Soit X^* le normalisé de X et soit π^* l'application naturelle de X^* sur X . Soit R la relation d'équivalence sur X^* définie par

$$x \sim y \iff \pi^*(x) = \pi^*(y) ;$$

c'est une relation d'équivalence propre. Soit \hat{X} l'espace annelé quotient ([7], § 2) de X^* par R , et soit p l'application naturelle de X^* sur \hat{X} ; il existe une application et une seule $\hat{\pi}$ de \hat{X} sur X , vérifiant $\hat{\pi} \circ p = \pi^*$; $\hat{\pi}$ est un homéomorphisme.

D'après un théorème de H. Cartan ("Main Theorem" de [7], § 3 , et la remarque p. 8, de [7]) , l'espace annelé \hat{X} est un espace analytique. De la définition de la structure d'espace annelé de \hat{X} , il résulte que $\hat{\pi}$ est holomorphe.

Soit σ une application holomorphe, ouverte et injective d'un espace analytique Y dans X ; il n'est pas restrictif de supposer

σ surjective ; c'est alors un homéomorphisme. L'application

$\tau = \sigma^{-1} \circ \hat{\pi}$ est donc aussi un homéomorphisme.

L'application σ^{-1} est holomorphe hors du sous-espace $S(X)$ des points singuliers de X et de l'image $\sigma(S(Y))$ du sous-espace $S(Y)$ des points singuliers de Y ; donc $\sigma^{-1} \circ \pi^*$ est holomorphe hors du sous-espace $(\pi^*)^{-1}(S(X) \cup \sigma(S(Y)))$, qui est au moins de codimension 1 en chacun de ses points. Comme X^* est normal, $\sigma^{-1} \circ \pi^*$ est holomorphe en vertu du théorème de Riemann ([11]p.287) ; donc $\tau \circ p$ est holomorphe ; alors τ est holomorphe en vertu de la définition de la structure d'espace annelé de \hat{X} .

Remarque 1 . Si l'espace analytique \hat{X}' et l'application holomorphe $\hat{\pi}' : \hat{X}' \rightarrow X$ vérifient aussi les conditions du théorème 1, il existe un isomorphisme analytique $\rho : \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$ vérifiant $\hat{\pi} = \hat{\pi}' \circ \rho$; donc $(\hat{X}, \hat{\pi})$ est déterminé à un isomorphisme analytique près. Il existe une structure d'espace analytique et une seule sur l'ensemble X , telle que $\hat{\pi}$ soit un isomorphisme d'espaces analytiques désormais on désignera par \hat{X} l'ensemble X muni de cette structure, et par $\hat{\pi}$ l'application identité de \hat{X} sur X ; le couple $(\hat{X}, \hat{\pi})$ sera appelé normalisation faible de X ; on dira que X est faiblement normal si $\hat{\pi}$ est un isomorphisme analytique.

Remarque 2 . Rappelons qu'un sous-ensemble analytique E de X est dit maigre si, pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert U de x et un sous-ensemble analytique A dans U , de codimension ≥ 1 en tout point de U , tels que $E \cap U \subset A$. Si f est une fonction à valeurs complexes continue dans X et holomorphe en dehors d'un sous-ensemble maigre de X , $f \circ \hat{\pi}$ est une fonction holomorphe dans \hat{X} . En effet, $f \circ \pi^*$ est holomorphe dans le normalisé X^* de X , donc $f \circ \hat{\pi}$ est holomorphe dans \hat{X} en vertu de la définition du faisceau structural de \hat{X} .

2 . Fermeture intégrale faible .

Soit X un espace analytique ; soit \mathcal{O} l'anneau des germes de fonctions holomorphes dans X , et soit $\Gamma(X, \mathcal{O})$ l'anneau des fonctions holomorphes sur X . Soit $C(X)$ l'anneau des fonctions continues à valeurs complexes sur X . Muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X , $C(X)$ est un espace de Fréchet $\Gamma(X, \mathcal{O})$ est un sous-espace fermé de $C(X)$ ([11] , Satz 28).

Si A est un sous-anneau de $\Gamma(X, \mathcal{O})$ et K un compact de X , nous désignerons par A_K l'anneau des restrictions des éléments de A à K , et par \bar{A}_K le complété de A_K pour la convergence uniforme sur K .

Nous dirons qu'un élément f de $C(X)$ est topologiquement intègre sur A si , pour tout compact K de X , il existe une équation de la forme

$$w^p + a_1(x) w^{p-1} + \dots + a_p(x) = 0$$

satisfaite pour $x \in K$ et $w = f(x)$, et où les a_i sont des éléments de \bar{A}_K (c'est-à-dire des fonctions sur K , limites uniformes de restrictions à K d'éléments de A).

Les éléments de $C(X)$, topologiquement intègres sur A , constituent un sous-anneau \hat{A} de $C(X)$, qu'on appellera fermeture intégrale faible de A ; si $\hat{A} = A$, nous dirons que A est faiblement intégralement fermé.

Proposition 1 . Soit \hat{A} la fermeture intégrale faible d'un sous-anneau A de $\Gamma(X, \mathcal{O})$, et soit $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow X$ la normalisation faible de X . Le relèvement $\hat{\pi}^* \hat{A}$ de \hat{A} à \hat{X} est un anneau de fonctions holomorphes sur \hat{X} .

Preuve . Soit $f \in \hat{A}$. D'après la remarque 2 de 1 , il suffit de démontrer que f est holomorphe aux points non singuliers de X .

Soit x_0 un tel point ; l'anneau local \mathcal{O}_{x_0} est factoriel et

le germe de f en x_0 est intègre sur \mathcal{O}_{x_0} . Il existe donc une équation

$$(*) \quad w^p + a_1(x) w^{p-1} + \dots + a_p(x) = 0$$

irréductible sur \mathcal{O}_{x_0} , à coefficients holomorphes sur un voisinage U de x_0 et satisfaite par $f(x)$ pour tout $x \in U$. Le discriminant $\Delta(x)$ de cette équation n'est pas nul dans \mathcal{O}_{x_0} car l'équation est irréductible sur \mathcal{O}_{x_0} . Si U est suffisamment petit, $\Delta(x) = 0$ définit dans U un sous-ensemble analytique E de codimension 1 en chaque point. Au voisinage de tout point $x \in U - E$, les racines de (*) sont des fonctions holomorphes. Donc f est holomorphe dans $U - E$ et continue dans U ; d'après le théorème de Riemann, f est holomorphe dans U .

Corollaire . Si X est faiblement normal, son anneau de fonctions holomorphes est faiblement intégralement fermé .

3 . Analogie d'un théorème de Weierstrass .

On démontre, pour des anneaux de fonctions holomorphes, un théorème analogue à celui de Weierstrass - Stone .

Lemme 1 . Soit \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein X . Soit Y un ouvert de Stein, relativement compact, dans X . Il existe une famille finie d'éléments de $H^0(X, \mathcal{F})$ dont les images dans $H^0(Y, \mathcal{F})$ engendrent $H^0(Y, \mathcal{F})$ comme module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans Y .

Preuve . Soit \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X . D'après le théorème A de H. Cartan généralisé aux espaces de Stein [5], il existe une famille finie $(s_i)_{i \in I}$ d'éléments de $H^0(X, \mathcal{F})$ dont les images dans \mathcal{F}_x , pour tout $x \in Y$, engendrent le \mathcal{O}_x -module \mathcal{F}_x . D'après le théorème 5 de [6] (dont la démonstration reste valable pour les espaces de Stein), les images des s_i engendrent $H^0(Y, \mathcal{F})$ comme $H^0(Y, \mathcal{O})$ -module .

Lemme 2 . Soit σ une application holomorphe propre d'un espace analytique complexe X dans un espace de Stein Y ; soit U un ouvert de Stein, relativement compact, dans Y . Pour toute fonction holomorphe dans $\sigma^{-1}(U)$, il existe une famille $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ de fonctions holomorphes dans U telle que l'on ait

$$h^p + \sum_{1 \leq i \leq p} a_i h^{p-i} = 0$$

dans $\sigma^{-1}(U)$, en posant $a_i = b_i \circ \sigma'$ pour $1 \leq i \leq p$, σ' désignant la restriction de σ à $\sigma^{-1}(U)$.

Preuve . Soit \mathcal{F} l'image directe par σ du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X ; d'après un résultat de H.Grauert [9], \mathcal{F} est un faisceau analytique cohérent sur Y . Vu le lemme 1 , il existe une famille finie $(s_i)_{i \in I}$ d'éléments de $H^0(U, \mathcal{F})$ qui engendrent $H^0(U, \mathcal{F})$ comme module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans U .

Soit h une fonction holomorphe dans $\sigma^{-1}(U)$; pour tout $i \in I$, s_i et $h s_i$ sont des fonctions holomorphes sur $\sigma^{-1}(U)$, donc $h s_i$ est un élément de $H^0(U, \mathcal{F})$. Il existe une famille $(b_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in I}}$ de fonctions holomorphes dans U , vérifiant, pour tout $i \in I$,

$$h s_i = \sum_{j \in I} b_{i,j} s_j .$$

En posant $a_{i,j} = b_{i,j} \circ \sigma$, on a donc (dans U)

$$h s_i = \sum_{j \in I} a_{i,j} s_j ;$$

on en déduit

$$\det (a_{i,j} - \delta_{i,j} h) = 0$$

qui est la relation annoncée.

Remarque .

Le nombre p est majoré par le cardinal de I , qui ne dépend pas de h .

Définition . Soit A un anneau de fonctions holomorphes sur un espace analytique complexe X . Pour tout compact K de X , on appelle A - enveloppe de K l'ensemble

$$\hat{K}_A = \left\{ x ; x \in X , |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ pour tout } f \in A \right\} .$$

On dit que X est A -convexe si, pour tout compact K de X , l'ensemble \hat{K}_A est compact .

Si A est l'anneau de toutes les fonctions holomorphes dans X , on pose $\hat{K}_X = \hat{K}_A$.

On dit que A donne des coordonnées locales en un point x de X s'il existe un nombre entier $n > 0$ et une application holomorphe $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$, $f_i \in A$, d'un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{C}^n , qui soit un isomorphisme analytique de U sur un sous-ensemble analytique $f(U)$ d'un ouvert de \mathbb{C}^n .

Lemme 3 . Soit X un espace analytique complexe. Soit A un anneau de fonctions holomorphes sur X , vérifiant les conditions :

- i) A contient $\mathbb{C}^{(1)}$;
- ii) X est A -convexe .

Pour tout compact K de X , il existe un voisinage ouvert U de K et une application $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X dans \mathbb{C}^n , vérifiant les conditions

- iii) $f_i \in A$ pour $1 \leq i \leq n$;

- iv) $\hat{K}_A \cap P = \left\{ x ; x \in U , |f_i(x)| < 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n \right\} \subset U$ et

l'application de P dans $Q = \left\{ z ; z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n , |z_i| < 1 \right.$
pour $1 \leq i \leq n$ }

déduite de f est propre .

Si, de plus, A sépare les points de X , on peut choisir cette application f de telle sorte que soit en plus vérifiée la propriété
 (1) Il suffit, pour la validité du lemme, que A soit une \mathbb{C} -algèbre.

v) l'application g, déduite de f, de U dans Y = Cⁿ - f(bU), est injective et propre.

Si, de plus encore, A donne des coordonnées locales en tout point de X, alors on peut choisir f de telle sorte que g soit un isomorphisme analytique de l'espace analytique U sur le sous-espace analytique g(U) de Y.

Preuve. Soit K un compact de X. L'ensemble \widehat{K}_A étant compact, soit U un voisinage ouvert relativement compact de \widehat{K}_A .

Pour tout $x \in \bar{U} - U$, il existe une fonction $h \in A$ telle que

$$|h(x)| > 2 \quad \text{et} \quad \sup_{y \in K} |h(y)| < 1 ;$$

alors

$$V_{x,h} = \{x ; x \in \bar{U} , |h(x)| > 2 \}$$

est un voisinage de x dans \bar{U} et $V_{x,h} \cap \widehat{K}_A = \emptyset$.

Comme $\bar{U} - U$ est compact, il existe une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ de points de $\bar{U} - U$ et une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ d'éléments de A vérifiant

$$|f_i(x_i)| > 2 , \quad \sup_{y \in K} |f_i(y)| < 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k ,$$

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_{x_i, f_i} \supset \bar{U} - U ;$$

et

$$\left(\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_{x_i, f_i} \right) \cap \widehat{K}_A = \emptyset$$

et l'application $f = (f_i)_{1 \leq i \leq k}$ de X dans C^k vérifie les conditions iii et iv du lemme (pour $n = k$).

Supposons que A sépare les points de X. Comme \bar{U} est compact, un lemme de H. Cartan ([7] p.7) montre l'existence d'une famille finie $(f_i)_{k < i \leq n}$ d'éléments de A qui sépare les points de \bar{U} ; on peut choisir ces fonctions en sorte que $\sup_{y \in \bar{P}} |f_i(y)| < 1$ pour $k < j \leq n$;

ainsi on aura encore

$$P = \{x ; x \in U , |f_i(x)| < 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \} .$$

L'application $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X dans \mathbb{C}^n vérifie les conditions iii, iv et v demandées.

Si A donne des coordonnées locales en tout point de X , on peut choisir la famille $(f_i)_{k < i \leq n}$ de telle sorte qu'elle donne des coordonnées locales en tout point de \overline{P} . Alors l'application g vérifie la condition supplémentaire annoncée.

Théorème 2 . Soit X un espace analytique faiblement normal. Soit A un anneau de fonctions holomorphes dans X , vérifiant les conditions :

- i) A contient \mathbb{C} ;
- ii) X est A -convexe .

Alors la fermeture intégrale faible de A est l'anneau de toutes les fonctions holomorphes dans X .

Si, de plus, A sépare les points de X et donne des coordonnées locales en tout point de X , alors A est dense dans l'ensemble des fonctions holomorphes dans X , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact .

Preuve . Vu le Corollaire de la Proposition 1, il suffit de montrer que toute fonction holomorphe sur X appartient à \hat{A} . Soit donc h une fonction holomorphe sur X , et soit K un compact de X . Soient U un voisinage ouvert de K et $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une application de X dans \mathbb{C}^n vérifiant les conditions iii et iv du lemme 3, dont nous conservons les notations. Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que la condition iv du lemme 3 soit encore vérifiée pour

$$P' = \{x ; x \in U, |f_i(x)| < 1 + \varepsilon \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$$

au lieu de P et

$$Q' = \{z ; z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n, |z_i| < 1 + \varepsilon \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$$

au lieu de Q .

Soit σ l'application de P dans Q déduite de f . D'après le lemme 2 (en prenant $Y = Q'$), il existe une famille $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ de fonctions holomorphes dans Q telle que l'on ait

$$(h|_P)^p + \sum_{1 \leq i \leq p} a_i \cdot (h|_P)^{p-i} = 0$$

dans P , en posant $a_i = b_i \circ \sigma$ pour $1 \leq i \leq p$. Dans le cas particulier où A sépare les points de X et donne des coordonnées locales en tout point de X , on peut prendre $p = 1$.

Comme toute fonction b holomorphe dans Q se développe en série de Taylor dans Q , $b \circ \sigma$ est limite uniforme sur K de fonctions de A ; on a donc $a_i \in \overline{A}_K$ pour $1 \leq i \leq p$, et $h \in \widehat{A}$.

Remarque 1. Sous les hypothèses du théorème 2, l'espace X est holomorphiquement convexe; si les fonctions de A séparent les points de X , ou si A donne des coordonnées locales en tout point de X , alors X est un espace de Stein.

Remarque 2. Soit $X = \mathbb{C}$ et soit A l'algèbre des fonctions entières sur \mathbb{C} dont la dérivée s'annule en 0 . Les hypothèses i et ii du théorème 2 sont vérifiées, l'algèbre A est fermée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{C} , et A ne contient pas toutes les fonctions entières. Donc, pour construire à partir de A l'anneau des fonctions holomorphes dans X , le passage à la fermeture intégrale faible est nécessaire.

Remarque 3. Le cas particulier du théorème 2, obtenu lorsque A sépare les points de X et donne des coordonnées locales en tout point de X , était déjà connu. Il est énoncé par H. Cartan ([8]p.24), énoncé et démontré par Y.Katznelson ([14] Theorem 8.1.7) dans le cas des variétés. Il a pour conséquence que toute fonction holomorphe dans \mathbb{C}^n est limite uniforme sur tout compact de sommes finies d'exponentielles de fonctions linéaires.

§ 2 . L'espace (analytique) des cycles positifs
d'une variété algébrique

4 . Définition de cet espace .

a) L'anneau des coordonnées de la grassmannienne .

Soit \mathbb{P}_n l'espace projectif de dimension n sur \mathbb{C} . Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ des coordonnées homogènes sur \mathbb{P}_n et soit F le fibré holomorphe en droites associé au diviseur d'équation $x_0 = 0$. L'anneau $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ des polynômes en x_0, \dots, x_n s'identifie à l'anneau gradué

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}_n, F) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}_n, F^k) ,$$

F^k désignant la puissance tensorielle k -ème de F .

Soit V une sous-variété algébrique irréductible de \mathbb{P}_n ; considérons l'anneau gradué

$$\mathcal{A}(V, F|_V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(V, (F|_V)^k)$$

où $F|_V$ désigne la restriction du fibré F à V ; l'image de l'homomorphisme de restriction

$$r_V : \mathcal{A}(\mathbb{P}_n, F) \longrightarrow \mathcal{A}(V, F|_V)$$

est appelée anneau des coordonnées de V .

Proposition 2 . Si V est normale en chaque point (par exemple si V est non singulière), $\mathcal{A}(V, F|_V)$ est la fermeture intégrale de l'anneau des coordonnées de V .

Ce théorème est dû à O. Zariski [24]; on le démontre en prouvant successivement :

i) la fermeture intégrale de l'anneau des coordonnées est un anneau gradué ;

ii) à cause de la normalité de V , tout élément homogène de la fermeture intégrale est dans $\mathcal{A}(V, F|_V)$;

iii) pour k suffisamment grand,

$$r_V(\Gamma(\mathbb{P}_n, F^k)) = \Gamma(V, (F|_V)^k).$$

Ce dernier point résulte aussi d'un théorème de J.P. Serre ([21] théorème 2 p. 259).

Soit maintenant \mathbb{P}_n^{d+1} le produit de $d+1$ exemplaires de \mathbb{P}_n , indexés par les nombres entiers $0, 1, \dots, d$; pour tout nombre entier h vérifiant $0 \leq h \leq d$, soit F_h le fibré sur \mathbb{P}_n^{d+1} , obtenu en relevant F par la projection de \mathbb{P}_n^{d+1} sur son facteur d'indice h . L'anneau gradué

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}_n^{d+1}, \bigotimes_{0 \leq h \leq d} F_h) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigotimes_{0 \leq h \leq d} \Gamma(\mathbb{P}_n, F_h^k)$$

s'identifie à l'anneau $\mathbb{C}[\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ des polynômes par rapport aux indéterminées $(\overset{h}{x}_i)_{\substack{0 \leq h \leq d \\ 0 \leq i \leq n}}$, dont chaque composante homogène est homogène et de degré indépendant de h par rapport à chaque famille $(\overset{h}{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'indéterminées ; c'est ce dernier degré que nous appellerons degré de la composante homogène considérée.

Supposons $d \leq n$; la relation

$$\bigwedge_{0 \leq h \leq d} \left(\sum_{0 \leq i \leq n} \overset{h}{x}_i du_i \right) = \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_d \leq n} p_{i_0 \dots i_d}(\overset{0}{x}) du_{i_0} \wedge \dots \wedge du_{i_d}$$

définit des éléments $p_{i_0 \dots i_d}$ de $\mathbb{C}[\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$, homogènes de degré

$d+1$; soit Ω l'ensemble des points $x = (\overset{h}{x})_{0 \leq h \leq d}$ de \mathbb{P}_n^{d+1} tels

que les nombres $p_{i_0 \dots i_d}(x)$ ne soient pas simultanément nuls ; soit p l'application de Ω dans $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{d+1}-1}$ définie par les fonctions $p_{i_0 \dots i_d}$; $p(\Omega)$ est la grassmannienne, que l'on désignera par $\mathbb{P}_{n,d}$, des sous-espaces linéaires de dimension d de \mathbb{P}_n .

Soit $\mathbb{C}[\dots, P_{i_0 \dots i_d}, \dots]$ l'anneau des polynomes en les indéterminées $(P_{i_0 \dots i_d})_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_d \leq n}$; la substitution de $p_{i_0 \dots i_d}(x)$ à $P_{i_0 \dots i_d}$ définit une application

$$\sigma : \mathbb{C}[\dots, P_{i_0 \dots i_d}, \dots] \longrightarrow \mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$$

dont le noyau est constitué par l'idéal des polynomes s'annulant sur $\mathbb{P}_{n,d}$; l'anneau des coordonnées de la grassmannienne est donc isomorphe à l'image de σ .

Le groupe linéaire $GL(d+1, \mathbb{C})$ opère sur $\mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ par les substitutions

$$\overset{h}{x} \longrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_{hk} \overset{k}{x}, \quad A = (\alpha_{hk})_{\substack{0 \leq h \leq d \\ 0 \leq k \leq d}} \in GL(d+1, \mathbb{C}) ;$$

un élément f homogène de $\mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ est dit invariant par les opérations de $GL(d+1, \mathbb{C})$ si l'on a

$$f(Ax) = (\det A)^m f(x)$$

pour tout $A \in GL(d+1, \mathbb{C})$ et pour tout $x = (\overset{h}{x})_{0 \leq h \leq d}$, m désignant le degré total de f par rapport à l'ensemble de tous les x_i .

Proposition 3 . L'anneau des coordonnées de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,d}$ est isomorphe à l'anneau des invariants de $\mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ sous l'action du groupe $GL(d+1, \mathbb{C})$. Cet anneau est factoriel. ([4] p. 110-113) .

Des propositions 2 et 3 il résulte que l'anneau des coordonnées de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,d}$ est isomorphe à l'anneau

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}_{n,d}, \hat{F}|_{\mathbb{P}_{n,d}}), \quad \hat{F} \text{ désignant le fibré sur } \mathbb{P}_{(d+1)^{-1}}^{(n+1)}$$

associé au diviseur défini par un hyperplan.

b. La notion classique de variété des cycles.

Soit V un sous-ensemble algébrique irréductible de dimension d de \mathbb{P}_n . Soient $(u)_{0 \leq h \leq d}^h$ les coordonnées de $d+1$ hyperplans, linéairement indépendants, de \mathbb{P}_n . La condition pour que leur intersection rencontre V s'exprime en annulant un polynôme irréductible

$$F_V \in \mathbb{C}[u^0, \dots, u^d] \quad (\text{cf. [13], vol 2, p. 32-35}).$$

Pour tout $A = (\alpha_{hk})_{\substack{0 \leq h \leq d \\ 0 \leq k \leq d}} \in GL(d+1, \mathbb{C})$, la substitution

$$u \longrightarrow \sum_{0 \leq k \leq d} \alpha_{hk} u^k$$

remplace les hyperplans considérés par $d+1$ hyperplans linéairement indépendants et contenant l'intersection des premiers. La condition $F_V(u) = 0$ entraîne donc $F_V(Au) = 0$. Comme $F_V(u)$ est irréductible, $F_V(Au)$ est divisible par $F_V(u)$ et on a

$$F_V(Au) = \rho(A) \cdot F_V(u)$$

où $\rho(A)$ est un polynôme en les α_{hk} ; comme ρ est un caractère de $GL(d+1, \mathbb{C})$, $\rho(A)$ est une puissance de $\det(A)$; F_V est donc invariant sous l'action du groupe $GL(d+1, \mathbb{C})$, et détermine, à un facteur constant non nul près, un élément de l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}_{n, n-d-1}$.

Le polynôme F_V est appelé forme de Cayley associée à V .

Plus généralement, si $V = \sum_{i \in I} n_i V_i$ est un cycle positif (cf. [3], § 4) de dimension d de \mathbb{P}_n , on lui associe la forme de Cayley

$$F_V = \prod_{i \in I} F_{V_i}^{n_i} \quad (V_i \text{ étant pour tout } i \in I \text{ un sous-ensemble algébrique irréductible de } \mathbb{P}_n).$$

Proposition 4 . Pour qu'un élément F de $\mathbb{C}[u^0, \dots, u^d]$ soit forme de Cayley d'un cycle positif de dimension d de \mathbb{P}_n , il faut et il suffit que :

- i) F soit invariant sous l'action de $GL(d+1, \mathbb{C})$,
 - ii) sur une extension algébrique convenable de $\mathbb{C}[u^1, \dots, u^d]$,
F se décompose en un produit de facteurs linéaires par rapport à \underline{u} :
- $$F(u^0, \dots, u^d) = A(u^1, \dots, u^d) \cdot \prod_{1 \leq \alpha \leq g} \left(\sum_{0 \leq i \leq n} x_{i\alpha} u_i^0 \right) .$$

En effet, la première condition exprime que F est l'image d'un élément de l'anneau des coordonnées de la grassmannienne, de telle sorte que la condition $F = 0$ détermine un complexe de \mathbb{P}_{n-d-1} dans \mathbb{P}_n . La seconde condition exprime que ce complexe est singulier, c'est-à-dire que l'ensemble des \mathbb{P}_{n-d-1} appartenant au complexe, et contenus dans le \mathbb{P}_{n-d} intersection des hyperplans u^1, \dots, u^d , se décompose en l'ensemble des \mathbb{P}_{n-d-1} contenus dans \mathbb{P}_{n-d} et passant chacun par l'un des points (qui sont tous dans \mathbb{P}_{n-d}). Si donc S_0, \dots, S_d sont des matrices anti-symétriques (${}^t S_i = -S_i$), les hyperplans S_0, \dots, S_d passent par le point, et l'on a

$$F(S_0, \dots, S_d) = 0$$

quelles que soient les matrices S_i . La Proposition 4 résulte alors d'un argument connu ([13] p. 52).

Corollaire . Soit A_d^g l'espace vectoriel des éléments homogènes de degré g du sous-anneau des $GL(d+1, \mathbb{C})$ -invariants de $\mathbb{C}[x^0, \dots, x^d]$. Soit X un sous-ensemble algébrique de \mathbb{P}_n . L'ensemble des éléments de A_d^g , qui sont formes de Cayley des cycles positifs de dimension d de X, est un cône algébrique de sommet 0.

En effet, désignons par \dots, \dots des points génériques de X et posons

$$\prod_{1 \leq \alpha \leq g} \left(\sum_{0 \leq i \leq n} x_{i\alpha} u_i^0 \right) = \sum_D \sigma_D \cdot \omega_D(u) ,$$

les $\omega_{\mathcal{D}}(\overset{\circ}{u})$ étant les différents monômes de degré g en les variables $\overset{\circ}{u}_i$; les $\sigma_{\mathcal{D}}(\overset{\circ}{u})$ sont les coordonnées du point générique d'un sous-espace algébrique W d'un espace projectif \mathbb{P}_N ; soient $H_{\lambda}(\sigma_{\mathcal{D}}) = 0$ des équations de W . Ecrivons un élément F de A_d^g comme polynôme en $\overset{\circ}{u}$:

$$F(\overset{\circ}{u}, \dots, \overset{\circ}{u}) = \sum_{\mathcal{D}} \varphi_{\mathcal{D}}(\overset{\circ}{u}, \dots, \overset{\circ}{u}) \cdot \omega_{\mathcal{D}}(\overset{\circ}{u}) ;$$

pour que F soit forme de Cayley d'un cycle de X , il faut et il suffit que l'on ait les relations $H_{\lambda}(\varphi_{\mathcal{D}}(\overset{\circ}{u}, \dots, \overset{\circ}{u})) = 0$ quels que soient $\overset{\circ}{u}, \dots, \overset{\circ}{u}$; ceci s'exprime par un système d'équations algébriques homogènes en les coefficients de F .

Soit $P(A_d^g)$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel A_d^g considéré ci-dessus. Soit X un sous-ensemble algébrique de \mathbb{P}_n , et soit $W_d^g(X)$ le sous-ensemble algébrique de $P(A_d^g)$, constitué par les images des formes de Cayley des cycles positifs de dimension d de X . On appelle variété des cycles de dimension d de X l'espace, localement algébrique

$$\mathcal{C}_d^+(X) = \bigcup_{g \in \mathbb{N}^*} W_d^g(X) .$$

On désignera par $C_d^+(X)$ l'ensemble des cycles positifs (cf. [3], § 4) de dimension d de X , et par $\sigma_{X,d}$ l'application de $\mathcal{C}_d^+(X)$ dans $C_d^+(X)$ qui, à un élément de $\mathcal{C}_d^+(X)$ défini par une forme de Cayley F , associe le cycle positif de X auquel F est associée ; l'application $\sigma_{X,d}$ est bijective. Comme dans [3], on désigne par $|A|$ le support d'un cycle positif A .

Dans $W_d^g(X) \times X$, soit $Z_d^g(X)$ la correspondance qui associe à tout élément c de $W_d^g(X)$ le sous-ensemble $|\sigma_{X,d}(c)|$ de X .

Remarque 1 . Cette correspondance est algébrique ; si on désigne par $x = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ des coordonnées homogènes sur $X \subset \mathbb{P}_n$ et par α les coefficients des formes de Cayley de A_d^g (c'est-à-dire des coordonnées homogènes sur $W_d^g(X) \subset P(A_d^g)$, $Z_d^g(X)$ est définie par l'annulation d'un système $g_{\mathcal{D}}(\alpha, x)$ de polynômes homogènes en les x et les α .

En effet, soit c un élément de $W_d^g(X)$, image d'une forme de Cayley F ; soient S_0, \dots, S_d des matrices antisymétriques, et soit $x \in \mathbb{P}_n$. En exprimant que $F(S_0 x, \dots, S_d x)$ est nul quelles que soient les matrices S_i , on obtient un système d'équations $g_{D,F}(x) = 0$ dont les solutions sont les points de $|\sigma_{X,d}(c)|$. Les coefficients des polynômes $g_{D,F}$ sont (c variant dans $W_d^g(X)$) des polynômes par rapport aux coefficients de F . La relation entre c et les points x de $|\sigma_{X,d}(c)|$ s'exprime donc en écrivant un système d'équations $g_{D,F}(x) = 0$ polynomiales par rapport à x et par rapport aux coefficients de F .

De cette remarque on déduit immédiatement :

Lemme 4. Soit $c_0 \in \mathcal{C}_d^+(X)$, et soit U un voisinage de $|\sigma_{X,d}(c_0)|$ dans X ; il existe un voisinage V de c_0 dans $\mathcal{C}_d^+(X)$, tel que la condition $c \in V$ entraîne $|\sigma_{X,d}(c)| \subset U$.

Soit à présent Y un ouvert de X ; il résulte du lemme 4 que

$$\mathcal{C}_d^+(Y) = \sigma_{X,d}^{-1}(\mathcal{C}_d^+(Y)) = \{c ; c \in \mathcal{C}_d^+(X), |\sigma_{X,d}(c)| \subset Y\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{C}_d^+(X)$; $\mathcal{C}_d^+(Y)$ est appelé variété des cycles de dimension d de Y ; on désigne par $\sigma_{Y,d}$ la restriction de $\sigma_{X,d}$ à $\mathcal{C}_d^+(Y)$, et on pose $W_d^g(Y) = \mathcal{C}_d^+(Y) \cap W_d^g(X)$.

Comme précédemment ([3], N° 9), désignons par $S_d(Y)$ la famille des sous-ensembles analytiques compacts de Y , de dimension d en chacun de leurs points ; $S_d(Y)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}_d^+(Y)$; posons $\mathcal{J}_d(Y) = \sigma_{Y,d}(S_d(Y))$.

Remarque 2. $\mathcal{J}_d(Y)$ est une partie ouverte de $\mathcal{C}_d^+(Y)$.

Il suffit de l'établir pour $Y = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et, dans ce cas, de vérifier que $W_d^g(Y) \cap \mathcal{J}_d(Y)$ est ouvert dans $W_d^g(Y)$ pour tout $g > 0$; pour cela, il faut montrer que, dans $W_d^g(Y)$, les formes de Cayley,

suffisamment voisines d'une forme de Cayley sans facteur irréductible multiple, sont aussi de ce type. Cela résulte de la Remarque suivante .

Remarque 3 . Soit $P(x)$ un polynome homogène en $x = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de degré $g > 0$. Il existe un nombre fini de polynomes p_α , $1 \leq \alpha \leq h$, en les coefficients de P , dont l'annulation simultanée exprime que P a un facteur multiple.

En effet, considérons le polynome $P(\lambda x + \mu y)$ comme polynome homogène en λ et μ . Son discriminant $\Delta(x,y)$ est un polynome en x et y dont les coefficients p_α , $1 \leq \alpha \leq h$, sont des polynomes en les coefficients de P . Si $P(x)$ a un facteur multiple, les p_α sont nuls. Réciproquement, si les p_α sont nuls, on a $P(\lambda x + \mu y) = (H(\lambda, \mu, x, y))^l K(\lambda, \mu, x, y)$ où H et K sont des polynomes premiers entre eux, H est de degré > 0 en λ et μ , et $l \geq 2$. Or H doit contenir les variables x ou y car s'il en était indépendant, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$ on montrerait que H divise λ^g et μ^g ; donc H serait une constante. Supposons donc que H contienne les x . En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on voit que P a un facteur multiple.

Soit encore $Z_d^g(Y) = (W_d^g(Y) \times Y) \cap Z_d^g(X)$; c'est la correspondance qui, à tout $c \in W_d^g(Y)$, associe le sous-ensemble algébrique compact $|\sigma_{Y,d}(c)|$ de Y . Il en résulte que la projection de $Z_d^g(Y)$ sur $W_d^g(Y)$ est propre. Nous utiliserons ultérieurement les remarques suivantes.

Remarque 4 . Soit A un sous-ensemble analytique compact, en chaque point de dimension > 0 , de $W_d^g(Y)$; alors $\bigcup_{c \in A} |\sigma_{Y,d}(c)|$ est un sous-ensemble analytique compact, en chaque point de dimension $\geq d+1$, de Y .

En effet, d'après ce qui précède, l'image réciproque de A dans $Z_d^g(Y)$ est un sous-ensemble analytique compact, de dimension $\geq d+1$ en chaque point; la projection de cet ensemble dans Y vérifie la même propriété.

Remarque 5 . Pour tout compact K de Y , le sous-ensemble
 $\{c ; c \in W_d^g(Y) , |\sigma_{Y,d}(c)| \subset K\}$ de $W_d^g(Y)$ est compact .

En effet, soit E ce sous-ensemble, et soit c_0 un point de $W_d^g(X)$ adhérent à E ; soit $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de E tendant vers c_0 ; tout point de $|\sigma_{X,d}(c_0)|$ étant limite (vu la Remarque 1) de points des $|\sigma_{X,d}(c_\nu)|$, on a $|\sigma_{X,d}(c_0)| \subset K$.

Dans [3], n° 9 , nous avons identifié $C_d^+(Y)$ à une partie de l'espace vectoriel topologique des courants à support compact dans Y ; la topologie forte (resp. faible) de cet espace de courants induit sur $C_d^+(Y)$ une topologie que nous appellerons encore forte (resp. faible) ; une partie de $C_d^+(Y)$ est dite bornée si elle est bornée dans l'espace des courants ; la proposition 9 de [3] caractérise les parties bornées de $C_d^+(Y)$.

Proposition 5 . Pour qu'une partie K de $\mathcal{L}_d^+(Y)$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que $\sigma_{Y,d}(K)$ soit borné dans $C_d^+(Y)$.

En effet, une partie K de $\mathcal{L}_d^+(Y)$ est relativement compacte si et seulement s'il existe un nombre entier h tel que $K \cap W_d^g(Y)$ soit relativement compact dans $W_d^g(Y)$ pour $g \leq h$ et $K \cap W_d^g(Y) = \emptyset$ pour $g > h$. Ces deux conditions peuvent être remplacées par

$\bigcup_{c \in K} |\sigma_{Y,d}(c)|$ relativement compact dans Y et $K \cap W_d^g(Y) = \emptyset$ pour $g > h$. Ces deux nouvelles conditions sont équivalents à celles de la Proposition 9 de [3] , car, en calculant les volumes à l'aide de la métrique de Fubini de \mathbb{P}_n , on a $\text{vol } \sigma_{Y,d}(c) = g$ pour tout $c \in W_d^g(Y)$.

On munit chaque $W_d^g(X)$ de la structure d'espace analytique complexe induite par celle de l'espace projectif complexe $P(A_d^g)$; $\mathcal{L}_d^+(X)$ et $\mathcal{L}_d^+(Y)$ sont ainsi munis de structures d'espace analytiques complexes. Eventuellement ces structures peuvent dépendre, non

seulement des structures d'espaces algébriques de X et de Y , mais encore de la réalisation de X et de Y comme sous-espaces de \mathbb{P}_n . L'étude de cette dépendance est l'objet du § c ci-dessous.

c) Caractère fonctoriel de \mathcal{C}_d^+ et normalisation faible de la variété de Chow.

α) Soit Y (resp. Y') un ouvert d'un sous-ensemble algébrique X (resp. X') de \mathbb{P}_n (resp. $\mathbb{P}_{n'}$), et soit \mathcal{Z} une application holomorphe algébrique de Y dans Y' .

On désignera par $C_d^+(Y)_{\mathcal{Z}}$ l'ensemble des éléments V de $C_d^+(Y)$ où \mathcal{Z} est bien définie, c'est-à-dire l'ensemble des éléments V de $C_d^+(Y)$ dont toute composante irréductible V_i a pour image $\mathcal{Z}(V_i)$ un sous-ensemble analytique complexe (compact) de dimension d de Y' .

On désignera par $C_d^+(\mathcal{Z})$ l'application additive de $C_d^+(Y)_{\mathcal{Z}}$ dans $C_d^+(Y')$ qui, à tout cycle irréductible $V \in C_d^+(Y)_{\mathcal{Z}}$, fait correspondre le cycle $m \mathcal{Z}(V)$ de $C_d^+(Y')$, m désignant le degré de la restriction de \mathcal{Z} à V .

On désignera par $\mathcal{C}_d^+(\mathcal{Z})$ l'application de $\mathcal{C}_d^+(Y)_{\mathcal{Z}} = \sigma_{Y,d}^{-1}(C_d^+(Y)_{\mathcal{Z}})$ dans $\mathcal{C}_d^+(Y')$ qui vérifie

$$\sigma_{Y',d} \circ \mathcal{C}_d^+(\mathcal{Z}) = C_d^+(\mathcal{Z}) \circ (\sigma_{Y,d} |_{\mathcal{C}_d^+(Y)_{\mathcal{Z}}}) .$$

Ensemblement, $\mathcal{C}_d^+(\mathcal{Z})$ est la même chose que l'application $C_d^+(\mathcal{Z})$.

L'étude générale de l'application $\mathcal{C}_d^+(\mathcal{Z})$ sera préparée par les remarques et les lemmes ci-dessous.

β) Soit N un nombre entier > 0 , et soit $t(n,N) = (n+1)^N - 1$. Le polynôme en les variables $u_i^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq N$, $0 \leq i \leq n$,

$$\prod_{1 \leq \alpha \leq N} \sum_{0 \leq i \leq n} x_i u_i^{(\alpha)}$$

a pour coefficients les monomes $z_{i_1 \dots i_N} = \prod_{1 \leq \alpha \leq N} x_{i_\alpha}$. Soit λ_n^N l'application de \mathbb{P}_n dans $\mathbb{P}_{t(n,N)}$, définie par les relations

$$\lambda_n^N(x) = z \quad \text{où} \quad z = (z_{i_1 \dots i_N})_{0 \leq i \leq n}$$

Remarque 1. L'application λ_n^N est un isomorphisme (algébrique de \mathbb{P}_n sur $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$

En effet si $U_i = \{x ; x \in \mathbb{P}_n, x_i \neq 0\}$ et

$$W_i = \{z ; z \in \lambda_n^N(\mathbb{P}_n), z_{i \dots i} \neq 0\}, \quad \mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et}$$

$\mathcal{W} = (W_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des recouvrements de \mathbb{P}_n et $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$ respectivement par des ouverts de Zariski. Entre U_i et W_i la correspondance λ_n^N est donnée par les relations

$$\frac{x_\alpha}{x_i} = \frac{z_{\alpha i \dots i}}{z_{i i \dots i}}$$

donc elle est biholomorphe algébrique.

On désignera par μ_n^N l'application de $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$ sur \mathbb{P}_n telle que $\lambda_n^N \circ \mu_n^N$ soit l'identité de $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$.

Soit E_n^N l'espace vectoriel des polynomes homogènes de degré N en les $n+1$ indéterminées $x_i, 0 \leq i \leq n$; soit P_n^N l'espace projectif associé, et soit $\prod_n^{N,k}$ l'application de P_n^N dans P_n^{kN} , définie en associant à tout polynome de E_n^N sa puissance k -ème.

Remarque 2. L'application $\prod_n^{N,k}$ est un isomorphisme (algébrique) de P_n^N sur $\prod_n^{N,k}(P_n^N)$.

C'est une conséquence de la Remarque 1. Il suffit de noter que :

i) tout élément ω de E_n^N s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \sum_{\substack{0 \leq i_\alpha \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq N}} a_{i_1 \dots i_N} \prod_{1 \leq \alpha \leq N} x_{i_\alpha},$$

ou les coefficients $a_{i_1 \dots i_N}$ sont symétriques par rapport aux indices i_1, \dots, i_N ;

ii) si φ_n^N est l'application (injective) de P_n^N dans $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ définie en associant à ω le point de coordonnées homogènes $a_{i_1 \dots i_N}$ (symétriques par rapport aux indices), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_n^N & \xrightarrow{\varphi_n^N} & \mathbb{P}_{t(n,N)} \\ \downarrow \pi_n^{N,k} & & \downarrow \lambda_{t(n,N)}^k \\ P_n^{kN} & \xrightarrow{\varphi_n^{kN}} & \mathbb{P}_{t(n,kN)} \end{array}$$

est commutatif.

On désignera par $\Theta_n^{N,k}$ l'application de $\pi_n^{N,k}(P_n^N)$ sur P_n^{kN} telle que $\pi_n^{N,k} \circ \Theta_n^{N,k}$ soit l'identité de $\pi_n^{N,k}(P_n^N)$.

De la remarque 1, il résulte que l'application $\mathcal{C}_d^+(\mu_n^N)$ est bijective.

Lemme 5. L'application $\mathcal{C}_d^+(\mu_n^N)$ est holomorphe algébrique.

Pour établir ce résultat, associons à tout hyperplan $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ de \mathbb{P}_n l'hyperplan $\tilde{\lambda}_n^N(u)$ de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ de coordonnées

$$(\tilde{\lambda}_n^N(u))_{i_1 \dots i_N} = \prod_{1 \leq \alpha \leq N} u_{i_\alpha} ; \text{ quel que soit l'hyperplan } u ,$$

nous avons la relation

$$\left(\sum_{0 \leq i \leq n} u_i x_i \right)^N = \sum_{\substack{0 \leq i_\alpha \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq N}} (\tilde{\lambda}_n^N(u))_{i_1 \dots i_N} : (\lambda_n^N(x))_{i_1 \dots i_N} ;$$

donc $\tilde{\lambda}_n^N(u)$ contient le point $\lambda_n^N(x)$ si et seulement si u contient x .

Soit alors $F_V(\overset{0}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ une forme de Cayley associée à un cycle $V \in C_d^+(\lambda_n^N(\mathbb{P}_n))$. Si V est irréductible, le polynôme homogène $F_V(\tilde{\lambda}_n^N(\overset{0}{u}), \dots, \tilde{\lambda}_n^N(\overset{d}{u}))$ s'annule exactement lorsque l'intersection des hyperplans u^i , $0 \leq i \leq d$, rencontre le cycle irréductible $\mu_n^N(V)$ il existe donc une forme de Cayley $F_{\mu_n^N(V)}(\overset{0}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ associée au cycle $\mu_n^N(V)$, telle que l'on ait l'identité

$$(*) \quad F_V(\tilde{\lambda}_n^N(\overset{0}{u}), \dots, \tilde{\lambda}_n^N(\overset{d}{u})) = (F_{\mu_n^N(V)}(\overset{0}{u}, \dots, \overset{d}{u}))^M ;$$

L'examen des degrés des cycles montre que l'on a $M = N^d$. Si V est quelconque, l'application du résultat précédent à chaque composante irréductible de V montre encore l'existence d'une forme de Cayley $F_{\mu_n^N(V)}(\overset{0}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ associée au cycle $\mu_n^N(V)$, telle que l'on ait l'identité (*). Cette identité montre que les coefficients du polynôme $(F_{\mu_n^N(V)})^M$ s'expriment par des polynômes en fonction des coefficients de F_V ; la conclusion résulte alors de la Remarque 2.

(γ) Considérons maintenant une projection de \mathbb{P}_n dans \mathbb{P}_m , ayant pour centre une sous-variété linéaire S de \mathbb{P}_n , et soit f l'application de $\mathbb{P}_n - S$ dans \mathbb{P}_m qu'elle définit. Choisissons des coordonnées homogènes $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de \mathbb{P}_n et des coordonnées homogènes $(y_j)_{0 \leq j \leq m}$ de \mathbb{P}_m telles que f soit définie par les relations

$$(f(x))_j = \begin{cases} x_j & \text{pour } 0 \leq j \leq h \\ 0 & \text{pour } h < j \leq m \end{cases} ;$$

S est alors défini par les équations

$$x_j = 0 \quad 0 \leq j \leq h .$$

Pour tout hyperplan $v = (v_j)_{0 \leq j \leq m}$ de \mathbb{P}_m , posons

$$(\tilde{f}(v))_i = \begin{cases} v_i & \text{pour } 0 \leq i \leq h \\ 0 & \text{pour } h < i \leq n \end{cases} .$$

Lemme 6 . Soit $F_V(u^0, \dots, u^d)$ une forme de Cayley associée à un cycle $V \in C_d^+(\mathbb{P}_n - S)_f$; alors $F_V(\tilde{f}(v)^0, \dots, \tilde{f}(v)^d)$ est une forme de Cayley associée au cycle $(C_d^+(f))(V) \in C_d^+(\mathbb{P}_m)$.

En effet, si V est irréductible, le polynome homogène $F_V(\tilde{f}(v)^0, \dots, \tilde{f}(v)^d)$ s'annule exactement lorsque l'intersection des plans \tilde{v} , $0 \leq i \leq d$, rencontre l'ensemble analytique irréductible $f(V)$ il existe donc une forme de Cayley $F_{f(V)}(v^0, \dots, v^d)$, associée au cycle $f(V)$, telle que l'on ait une identité

$$F_V(\tilde{f}(v)^0, \dots, \tilde{f}(v)^d) = (F_{f(V)}(v^0, \dots, v^d))^k ;$$

l'examen des degrés des cycles montre que k est le degré de la restriction de f à V ; $F_V(\tilde{f}(v)^0, \dots, \tilde{f}(v)^d)$ est donc une forme de Cayley associée à l'image de V par l'application $C_d^+(f)$. Si V n'est pas irréductible, il suffit d'appliquer le raisonnement ci-dessus à chaque composante irréductible de V .

δ) Considérons à présent un ouvert Y d'un sous-ensemble algébrique X de \mathbb{P}_n , et soit \mathcal{C} une application holomorphe algébrique de Y dans \mathbb{P}_n ; nous désignerons par $x' = (x'_j)_{0 \leq j \leq n}$ des coordonnées homogènes de \mathbb{P}_n ,

Lemme 7 . Il existe deux nombres entiers positifs l et N , une application linéaire injective g de \mathbb{P}_n dans $\mathbb{P}_{(n'+1)l-1}$, et une projection de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ dans $\mathbb{P}_{(n'+1)l-1}$, de centre S , définissant une application f de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - S$ dans $\mathbb{P}_{(n'+1)l-1}$, de telle sorte que l'on ait

$$g \circ \mathcal{C} = f \circ (\lambda_n^N |_Y) .$$

Preuve . Soit a un point de Y , et soit x_r (resp. x'_s) une coordonnée qui ne s'annule pas au point a (resp. $\mathcal{Z}(a)$) ; les fonctions

$\mathcal{C}^* \frac{x'_j}{x'_s}$, $0 \leq j \leq n'$, sont holomorphes algébriques sur Y au voisinage du point a ; il existe donc des fractions rationnelles R_j , $0 \leq j \leq n'$, telles que \mathcal{C} soit défini par les équations

$$\frac{x'_j}{x'_s} = R_j \left(\frac{x_0}{x_r}, \dots, \frac{x_n}{x_r} \right) \quad , \quad x \in Y$$

dans un voisinage de Zariski de a . On en déduit qu'il existe des polynomes homogènes η_j , $0 \leq j \leq n'$, de même degré et ne s'annulant pas simultanément au point a , tels que l'application \mathcal{C} soit définie, dans un voisinage de Zariski de a , par les relations

$$x'_j = \eta_j(x_0, \dots, x_n) \quad , \quad 0 \leq j \leq n' .$$

Comme tout sous-ensemble d'une variété algébrique est précompact pour la topologie de Zariski, il existe un recouvrement fini de Y par des ouverts de Zariski $U^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq \ell$, et des polynomes homogènes $\eta_j^{(\alpha)}$, $0 \leq j \leq n'$, $1 \leq \alpha \leq \ell$, tous du même degré N , tels que, pour tout α :

i) les polynomes $\eta_j^{(\alpha)}$, $0 \leq j \leq n'$, ne s'annulent pas simultanément dans $U^{(\alpha)}$

ii) l'application \mathcal{C} est définie, dans $U^{(\alpha)}$, par les relations

$$x'_j = \eta_j(x_0, \dots, x_n) \quad , \quad 0 \leq j \leq n' .$$

En particulier, pour tout point a de Y , il existe un polynome $\eta_j^{(\alpha)}$ qui ne s'annule pas au point a .

Soient $f_j^{(\alpha)}$ des fonctions linéaires homogènes des coordonnées de $\mathbb{P}_t(n, N)$ telles que l'on ait

$$\eta_j^{(\alpha)}(x) = f_j^{(\alpha)}(\lambda_n^N(x)) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{P}_n ;$$

soit S l'ensemble des points de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ pour lesquels s'annulent tous les $f_j^{(\alpha)}$; on a $\lambda_n^N(Y) \cap S = \emptyset$.

Soit f l'application de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - S$ dans $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$ définie par les fonctions linéaires $f_j^{(\alpha)}$; si $(z_j^{(\alpha)})_{0 \leq j \leq n', 1 \leq \alpha \leq \ell}$ désignent des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$, f est définie par les relations $z_j^{(\alpha)} = f_j^{(\alpha)}(y)$, y désignant l'ensemble des coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - S$.

Soit enfin g l'application de $\mathbb{P}_{n'}$ dans $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$ définie par les relations $z_j^{(\alpha)} = x_i'$. La situation est représentée par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}_n & \supset & Y & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}_{n'} \\
 \downarrow \lambda_n^N & & \downarrow \lambda_n^N|_Y & & \downarrow g \\
 \mathbb{P}_{t(n,N)} & \supset & \mathbb{P}_{t(n,N)} - S & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}
 \end{array} ,$$

dont la commutativité se vérifie aisément.

η) Considérons l'application τ envisagée au début de α) ; supposons que, pour tout sous-ensemble analytique complexe compact irréductible A de dimension d de Y , $\tau(A)$ soit un sous-ensemble analytique complexe (compact) de dimension d de Y' . Alors $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ est une application de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ dans $\mathcal{C}_d^+(Y')$; les lemmes précédents ne nous permettent pas de démontrer que $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ est holomorphe, car nous ne savons pas si $\mathcal{C}_d^+(\lambda_n^N)$ est holomorphe.

Pour cette raison, nous enrichirons la structure analytique de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ en la normalisant faiblement.

Définition . Soit Y un ouvert d'un sous-ensemble algébrique X de \mathbb{P}_n . Désormais, nous appellerons variété des cycles de dimension d de Y , et nous désignerons encore par $\mathcal{C}_d^+(Y)$, le normalisé faible de l'espace analytique $\mathcal{C}_d^+(Y)$ précédemment défini.

Avec cette définition, qui ne change pas l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_d^+(Y)$, l'application $\mathcal{C}_d^+(\lambda_n^N)$ devient holomorphe, à cause du lemme 5 ; grâce aux lemmes 6 et 7 , et compte-tenu de l'injectivité de l'application g du lemme 7 , on voit que l'application $\mathcal{C}_d^+(\mathcal{Z})$ devient holomorphe elle-aussi. On a donc :

Théorème 3 . Soit Y (resp. Y') un ouvert d'un sous-ensemble algébrique X (resp. X') de \mathbb{P}_n (resp. $\mathbb{P}_{n'}$) ; soit \mathcal{Z} une application holomorphe algébrique de Y dans Y' , telle que l'image $\mathcal{Z}(A)$ de tout sous-ensemble analytique complexe compact de dimension d de Y soit un sous-ensemble analytique complexe (compact) de dimension d de Y' . Alors l'application $\mathcal{C}_d^+(\mathcal{Z})$ de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ dans $\mathcal{C}_d^+(Y')$ est holomorphe.

Corollaire . Soit Y un ouvert d'un sous-ensemble algébrique X de \mathbb{P}_n . L'espace analytique complexe $\mathcal{C}_d^+(Y)$ ne dépend (à une bijection biholomorphe près) que de la structure d'espace algébrique projectif de Y .

Le théorème 3 exprime encore le caractère fonctoriel de cette dépendance.

d). Une remarque sur les ensembles exceptionnels .

Soit X un sous-ensemble algébrique de \mathbb{P}_n et soit A un sous-ensemble algébrique de X . On dira que A est un ensemble exceptionnel s'il existe un voisinage U de A dans X et une application holomorphe propre π de U sur un ouvert V d'un espace algébrique, vérifiant les conditions :

- i) π est un homéomorphisme de $U - A$ sur $V - \pi(A)$;
- ii) $\dim A > \dim \pi(A)$.

Dans ces conditions, on a des inclusions (c'est-à-dire des injections holomorphes ouvertes)

$$\mathcal{C}_d^+(A) \subset \mathcal{C}_d^+(U) \quad , \quad \mathcal{C}_d^+(\pi(A)) \subset \mathcal{C}_d^+(V)$$

et une application holomorphe

$$\pi_d : \mathcal{C}_d^+(U) - \mathcal{C}_d^+(A) \longrightarrow \mathcal{C}_d^+(V) - \mathcal{C}_d^+(\pi(A)) .$$

Si d est la dimension de $\pi(A)$, alors $\mathcal{C}_d^+(\pi(A))$ est constitué de points isolés dans $\mathcal{C}_d^+(V)$, donc $\mathcal{C}_d^+(\pi(A))$ possède un voisinage holomorphiquement convexe dans $\mathcal{C}_d^+(V)$; il en est de même pour $\mathcal{C}_d^+(A)$ dans $\mathcal{C}_d^+(U)$. Donc

Si A est un ensemble exceptionnel purement dimensionnel de X , il existe un entier $d < \dim A$ tel que $\mathcal{C}_d^+(A)$ possède un voisinage holomorphiquement convexe dans $\mathcal{C}_d^+(X)$.

Si d est le plus petit entier satisfaisant à cette condition, toute modification π d'un voisinage de A vérifiant les conditions i) et ii) applique A sur un ensemble $\pi(A)$ de dimension $\geq d$.

Compte-tenu de la Remarque 2 de b, l'énoncé ci-dessus est encore exact si on remplace $\mathcal{C}_d^+(A)$ (resp. $\mathcal{C}_d^+(X)$) par $\mathcal{I}_d(A)$ (resp. $\mathcal{I}_d(X)$).

Nous n'étudierons pas dans ce travail les problèmes suggérés par la remarque ci-dessus :

- a) la condition indiquée est-elle suffisante ?
- b) pour tout espace algébrique projectif X , existe-t-il une image holomorphe Y , généralement biunivoque, sur laquelle il n'y a pas d'ensembles exceptionnels ?
- c) pour un tel espace, les ensembles exceptionnels sont-ils en nombre fini ?

Auparavant, il conviendrait de généraliser les résultats de ce mémoire aux espaces analytiques complexes non algébriques.

5 . Théorème de continuité .

a) Résultats préliminaires .

Lemme 8 . Soit V un sous-ensemble algébrique purement dimensionnel de dimension s de \mathbb{P}_n . Pour tout nombre entier $k \geq 0$, l'ensemble des $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ tels que l'on ait

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{P}_k \cap V) = k + s - n$$

est partout dense sur la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,k}$. (On convient que $\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{P}_k \cap V) < 0$ signifie $\mathbb{P}_k \cap V = \emptyset$)

Preuve . Considérons la bijection $\sigma : \mathcal{G}_k^+ (\mathbb{P}_n) \longrightarrow \mathcal{C}_k^+ (\mathbb{P}_n)$ définie précédemment ; la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,k}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{G}_k^+ (\mathbb{P}_n)$; la restriction de σ à $\sigma^{-1} (\mathbb{P}_{n,k})$ est un homéomorphisme de $\sigma^{-1} (\mathbb{P}_{n,k})$ sur $\mathbb{P}_{n,k}$; en effet, si $p_{i_0 \dots i_k}$ sont les coordonnées grassmanniennes de \mathbb{P}_k , la forme de Cayley de \mathbb{P}_k est

$$F_{\mathbb{P}_k} (u^0, \dots, u^k) = \sum p_{i_0 \dots i_k} u_{i_0}^0 \dots u_{i_k}^k .$$

Soit Ω l'ensemble des \mathbb{P}_k envisagé .

Supposons $k+s-n < 0$, et $\mathbb{P}_k \cap V = \emptyset$; d'après le lemme 4 et la remarque ci-dessus , on aura $\mathbb{P}'_k \cap V = \emptyset$ si \mathbb{P}'_k est assez voisin de \mathbb{P}_k dans $\mathbb{P}_{n,k}$; donc Ω est ouvert dans $\mathbb{P}_{n,k}$. Soit V' une variété purement dimensionnelle, de dimension $n-k-1$, contenant V ; Ω contient l'ensemble des \mathbb{P}'_k qui ne rencontrent pas V' , c'est-à-dire l'ensemble, partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$, des éléments de $\mathbb{P}_{n,k}$ qui n'annulent pas la forme de Cayley de V' ; donc Ω est partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$.

Supposons maintenant $k+s-n = r \geq 0$, et $\mathbb{P}_k \cap V$ de dimension r ; choisissons un $\mathbb{P}_{n-(r+1)}$ tel que $W = \mathbb{P}_{n-(r+1)} \cap V$ soit purement dimensionnelle de dimension $s - (r+1)$ et que l'on ait $\mathbb{P}_k \cap W = \emptyset$; d'après ce qui précède, on aura $\mathbb{P}'_k \cap W = \emptyset$ si \mathbb{P}'_k

est assez voisin de \mathbb{P}_k dans $\mathbb{P}_{n,k}$; or $\mathbb{P}'_k \cap W = \emptyset$ entraîne $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}'_k \cap V) = r$; donc Ω est ouvert. De plus Ω contient l'ensemble des \mathbb{P}'_k qui ne rencontrent pas W . Cet ensemble est partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$, d'après ce qui précède ; donc Ω est partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$.

Lemme 9 . Soit V un sous-ensemble algébrique purement dimensionnel de dimension d de \mathbb{P}_n . Soit Δ la diagonale de $V \times V$, et soit

$$f : (V \times V - \Delta) \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_n$$

l'application définie par

$$f(x,y, \lambda, \mu) = \lambda x + \mu y .$$

Pour les \mathbb{P}_{n-d-2} d'un ouvert partout dense de $\mathbb{P}_{n,n-d-2}$, l'adhérence de $A = f^{-1}(\mathbb{P}_{n-d-2})$ dans $V \times V \times \mathbb{P}_1$ est de dimension $\leq d-1$.

Preuve . Soient V_i , $1 \leq i \leq k$, les composantes irréductibles de V . Soit x_i (resp. y_j) un point générique de V_i (resp. V_j) et soit W_{ij} la variété de \mathbb{P}_n de point générique $\lambda x_i + \mu y_j$.

La variété W_{ij} est de dimension $\leq 2d + 1$; l'image de f est contenue dans $\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} W_{ij}$. Le lemme 8 montre que : pour les \mathbb{P}_{n-d-2}

d'un ouvert partout dense de $\mathbb{P}_{n,n-d-2}$, l'ensemble A est de dimension $\leq d-1$. Son adhérence dans $V \times V \times \mathbb{P}_1$ est encore de dimension $\leq d-1$.

La projection de \widehat{A} sur le premier facteur V de $V \times V \times \mathbb{P}_1$ est encore un ensemble algébrique de dimension $\leq d-1$.

Grâce au théorème de Baire, on déduit immédiatement des lemmes 8 et 9 et de cette remarque la proposition suivante .

Proposition 6 . Soit $(V_D)_{D \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles algébriques purement dimensionnels de dimension d de \mathbb{P}_n . Les \mathbb{P}_{n-d-2} d'un ensemble partout dense de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,n-d-2}$ possèdent les propriétés suivantes :

- i) $\mathbb{P}_{n-d-2} \cap V_D = \emptyset$ pour tout $D \in \mathbb{N}$;
- ii) pour tout $D \in \mathbb{N}$, la projection de V_D de centre \mathbb{P}_{n-d-2} est biunivoque en dehors d'une sous-variété \sum_D de dimension $\leq d-1$.

b) Précisions sur des convergences d'intégrales et de fonctions .

Dans [16] est définie l'intégration, sur un ensemble analytique complexe, d'une forme différentielle extérieure continue à support compact. Il en résulte que le lemme 9 de [3] et les considérations qui le précèdent dans le n° 7 restent valables si la forme φ est supposée seulement continue (au lieu de indéfiniment différentiable).

Comme dans [2] et [3] , on désigne par $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans une variété analytique complexe V , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V .

Pour tout $z = (z_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$, posons

$$z_j = \sum_{2j-1}^{\infty} z_{2j-1} - i \sum_{2j}^{\infty} z_{2j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n ,$$

avec $\sum_{h}^{\infty} (z) \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq h \leq 2n$.

Pour tout $a \in \mathbb{C}^n$ et toute famille $(r_h)_{1 \leq h \leq 2n}$ de nombres réels > 0 , soit

$$Q(a,r) = \left\{ z ; z \in \mathbb{C}^n , \left| \sum_h^{\infty} (z) - \sum_h^{\infty} (a) \right| \leq r_h \quad \text{pour } 1 \leq h \leq 2n \right\} .$$

Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n ; pour tout pavé $Q(a,r) \subset U$, on désigne par $\mathcal{H}(U, a, r, g)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant les conditions :

- i) $\{ f(z) = 0 \} \cap Q(a,r) \cap \left\{ \left| \sum_{2n-1}^{\infty} (z) - \sum_{2n-1}^{\infty} (a) \right| = r_{2n-1} , \left| \sum_{2n}^{\infty} (z) - \sum_{2n}^{\infty} (a) \right| = r_{2n} \right\} = \emptyset$

ii) pour tout $b = (b_j)_{1 \leq j \leq n-1}$ vérifiant $|\xi_h(b) - \xi_h(a)| \leq r_h$
 pour $1 \leq h \leq 2n-2$, l'équation $f(b_1, \dots, b_{n-1}, z_n) = 0$
 a un nombre fini $\leq g$ de solutions dans

$$\left\{ |\xi_{2n-1}(z) - \xi_{2n-1}(a)| \leq r_{2n-1}, |\xi_{2n}(z) - \xi_{2n}(a)| \leq r_{2n} \right\}.$$

Du théorème de Rouché, il résulte que $\mathcal{H}(U, a, r, g)$ est ouvert dans $\mathcal{H}(U)$.

Lemme 10. Soit $\varphi = \alpha(z) \cdot \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} dz_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} d\bar{z}_i \right)$,
 la fonction α étant continue dans U . L'application de $\mathcal{H}(U, a, r, g)$
 dans \mathbb{C} , qui à f associe

$$\int_{F|Q(a,r)} \varphi$$

(F désignant le diviseur de f et $F|Q(a,r)$ sa restriction à $Q(a,r)$),
 est continue.

Démonstration. Posons $\alpha = i^{(n-1)^2} \beta$. Soit $f \in \mathcal{H}(U, a, r, g)$.

α) Supposons d'abord $\beta = 1$.

Soit $r - \varepsilon = (r_h - \varepsilon)_{1 \leq h \leq 2n}$ où $\varepsilon < \min_{1 \leq h \leq 2n} r_h$.

L'intégrale

$$\frac{1}{2^{n-1}} \int_{F|Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)} \varphi$$

est l'aire de la projection de $F|Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)$ sur l'espace des
 variables z_i , $1 \leq i \leq n-1$; elle est donc ≥ 0 et majorée par le pro-
 duit par g de l'aire de

$$(Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)) \cap \{z_n = a_n\}.$$

Par suite, il existe une constante K telle que l'on ait

$$0 \leq \int_{F|Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)} \varphi \leq K g \varepsilon^{2n-2}.$$

(3) Supposons maintenant $\beta \gg 0$. Soit η un nombre réel > 0 . Soit ε un nombre réel > 0 tel que l'on ait

$$f \in \mathcal{H}(U, a, r - \varepsilon, g) \text{ et } K g \varepsilon^{2n-2} \sup_{z \in Q(a, r)} \beta(z) < \frac{\eta}{3}.$$

Soit ρ une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans $\overline{Q(a, r)}$, égale à 1 sur $Q(a, r - \varepsilon)$ et vérifiant $0 \leq \rho \leq 1$.

Pour toute $f' \in \mathcal{H}(U, a, r - \varepsilon, g) \cap \mathcal{H}(U, a, r, g)$, on a

$$\int_{F'|Q(a, r-\varepsilon)} \varphi \leq \int_{F'|Q(a, r)} \rho \varphi \leq \int_{F'|Q(a, r)} \varphi$$

(où F' désigne le diviseur de f' dans U) et, d'après α ,

$$\left| \int_{F'|Q(a, r)} \varphi - \int_{F'|Q(a, r-\varepsilon)} \varphi \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Donc, pour toute $f' \in \mathcal{H}(U, a, r - \varepsilon, g) \cap \mathcal{H}(U, a, r, g)$, on a

$$\left| \int_{F'|Q(a, r)} \varphi - \int_{F'|Q(a, r)} \rho \varphi \right| < \frac{\eta}{3}$$

et par conséquent

$$\left| \int_{F'|Q(a, r)} \varphi - \int_{F'|Q(a, r)} \varphi \right| < \frac{2\eta}{3} + \left| \int_{F'|Q(a, r)} \rho \varphi - \int_{F'|Q(a, r)} \rho \varphi \right|$$

On a vu que $\mathcal{H}(U, a, r - \varepsilon, g) \cap \mathcal{H}(U, a, r, g)$ est un voisinage de f dans $\mathcal{H}(U)$: d'après le corollaire 2 de [2], il existe un voisinage \mathcal{V} de f dans $\mathcal{H}(U)$ tel que $f' \in \mathcal{V}$ entraîne

$$\left| \int_{F|Q(a,r)} \rho\varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \rho\varphi \right| < \frac{\eta}{3} .$$

La condition $f' \in \mathcal{V} \cap \mathcal{H}(U, a, r - \varepsilon, g) \cap \mathcal{H}(U, a, r, g)$ entraîne donc

$$\left| \int_{F|Q(a,r)} \varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \varphi \right| < \eta .$$

6) On établit le lemme lorsque β est une fonction à valeurs réelles en considérant séparément les parties positive et négative de β , puis dans le cas général en considérant séparément les parties réelle et imaginaire de β .

Remarque . Soit $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$; les pavés $Q(a, r)$ tels que l'on ait $f_\nu \in \mathcal{H}(U, a, r, g)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ constituent une famille de fermés de U stable par intersection. Donc, si E est une différence de réunions finies de tels pavés, et si f_ν tend vers f_0 dans $\mathcal{H}(U)$ quand ν tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_{F_\nu|E} \varphi = \int_{F_0|E} \varphi .$$

Nous supposerons maintenant $U = \overbrace{Q(a, r')}^0$ avec $r' > r$ (c'est-à-dire $r'_h > r_h$ pour $1 \leq h \leq 2n$).

Lemme 11 . Soit $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de polynomes non identiquement nuls de degré g , vérifiant $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} p_\nu = p_0$. Soit $(f_{\nu,i})_{\nu \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k}$ une famille de fonctions holomorphes dans $\overline{Q(a,r')}$ vérifiant les conditions :

i) $f_{\nu,i}$ est un polynome unitaire

$$f_{\nu,i}(z) = z_n^{s_{\nu,i}} + \sum_{1 \leq j \leq s_{\nu,i}} a_j(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^{s_{\nu,i} - j}$$

en z_n , dont les coefficients a_j sont holomorphes dans

$\overline{Q(a,r')}$ et dont toutes les racines sont dans le rectangle

$$\left\{ \left| \frac{z}{2n-1} - \frac{a}{2n-1} \right| < r_{2n-1} , \left| \frac{z}{2n} - \frac{a}{2n} \right| < r_{2n} \right\};$$

ii) pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, les polynomes $f_{\nu,i}$, $1 \leq i \leq k$ sont deux à deux sans facteur commun ;

iii) la fonction $\prod_{1 \leq i \leq k} f_{\nu,i}$ coïncide sur $\overline{Q(a,r')}$ avec $p_\nu|_{\overline{Q(a,r')}}$ à un facteur holomorphe inversible près ;

iv) pour tout indice i , l'ensemble des zéros de $f_{\nu,i}$ tend vers l'ensemble des zéros de $f_{0,i}$ quand $\nu \rightarrow +\infty$.

Alors, pour tout indice i , et tout r'' vérifiant $r < r'' < r'$, $f_{\nu,i}$ converge uniformément vers $f_{0,i}$ dans $\overline{Q(a,r'')}$ quand ν tend vers $+\infty$.

Démonstration . En vertu de la condition i) où $s_{\nu,i} \leq g$, les fonctions $f_{\nu,i}$ sont bornées supérieurement en module dans $\overline{Q(a,r')}$ par un même nombre M ; pour chaque indice i , l'ensemble des fonctions $f_{\nu,i}$, $\nu \in \mathbb{N}$ est donc relativement compact dans $\mathcal{H}_0(\overline{Q(a,r')})$; soit f_i une fonction appartenant à l'adhérence de cet ensemble ; il suffit de démontrer que $f_i = f_{0,i}$.

Pour chaque polynome p_D le polynome unitaire de degré minimum

$$q_D(z) = z_n^{t_D} + \sum_{1 \leq j \leq t_D} b_j(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^{t_D-j}$$

qui lui est associé sur $Q(a, r')$ est déterminé de façon unique ; en effet les fonctions symétriques des racines de q_D s'écrivent au moyen de l'intégrale logarithmique étendue au contour du rectangle.

$$\left\{ \left| \sum_{2n-1}^{\xi} (z) - \sum_{2n-1}^{\xi} (a) \right| \leq r'_{2n-1}, \left| \sum_{2n}^{\xi} (z) - \sum_{2n}^{\xi} (a) \right| \leq r'_{2n} \right\}.$$

On a donc $q_D = \prod_{1 \leq i \leq k} f_{D,i}$ pour tout $D \in \mathbb{N}$, et $\lim_{D \rightarrow +\infty} q_D = q_0$, uniformément sur $Q(a, r'')$.

Considérons un indice i déterminé, et soit f_i une fonction appartenant à l'adhérence de l'ensemble des $f_{D,i}$ $D \in \mathbb{N}$, dans $\mathcal{H}_0(\overline{Q(a, r')})$; pour tout indice $j \neq i$, il existe une fonction f_j appartenant à l'adhérence de l'ensemble des $f_{D,j}$, $D \in \mathbb{N}$, de telle sorte que l'on ait $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_{D_m, j} = f_j$ pour une suite croissante

$(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers et pour tout indice j . On a donc

$$\prod_{1 \leq j \leq k} f_j = \prod_{1 \leq j \leq k} f_{0,j}.$$

D'après la condition iv), les zéros de f_j sont ceux de $f_{0,j}$. Donc, vu la condition ii), on a $f_j = f_{0,j}$ pour tout j . En particulier, on a $f_i = f_{0,i}$; donc $f_{D,i}$ tend vers $f_{0,i}$, uniformément dans $Q(a, r'')$, quand D tend vers $+\infty$.

c) Un lemme d'algèbre extérieure.

Dans l'espace \mathbb{C}^n du point $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$, considérons les formes différentielles extérieures de type (p, p)

$$\Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \left(\bigwedge_{1 \leq \alpha \leq p} dz_{i_\alpha} \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq \beta \leq p} dz_{j_\beta} \right), \quad 1 \leq i_\alpha \leq n, \quad 1 \leq j_\beta \leq n.$$

Soit X_ε l'ensemble des automorphismes linéaires $z \rightarrow (1+T)z$ de \mathbb{C}^n tels que la matrice T ait ses éléments $< \varepsilon$ en valeur absolue.

Lemme 11 . Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, l'espace vectoriel engendré sur le corps \mathbb{C} par les formes différentielles $\Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$, $1 \leq i_\alpha \leq n$, $1 \leq j_\beta \leq n$, est engendré (sur le corps \mathbb{C}) par les formes $\chi^* \Psi_{1 \dots p 1 \dots p}$ où $\chi \in X_\varepsilon$.

La démonstration se déduit, à l'aide d'une récurrence, de la remarque suivante .

Soit U un voisinage du point $(0,0,\dots,0,1)$ de \mathbb{C}^n dans l'hyperplan d'équation $z_n = 1$. Pour tout $t \in U$, soit χ_t l'application de \mathbb{C}^n en lui-même, définie par $\chi_t(z) = z + z_n t$.

Pour $1 \leq i_\alpha \leq n-1$ et $1 \leq j_\beta \leq n-1$, nous avons

$$\begin{aligned} \chi_t^* \Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} &= \Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} + \sum_{1 \leq \lambda \leq p} t_{i_\lambda} \Psi_{i_1 \dots [i_\lambda] \dots i_p j_1 \dots j_p} \\ &+ \sum_{1 \leq \mu \leq p} \bar{t}_{j_\mu} \Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots [j_\mu] \dots j_p} + \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq p \\ 1 \leq \mu \leq p}} t_{i_\lambda} \bar{t}_{j_\mu} \Psi_{i_1 \dots [i_\lambda] \dots i_p j_1 \dots [j_\mu] \dots j_p} \end{aligned}$$

où le symbole $[i_\lambda]$ signifie que l'indice i_λ est remplacé par l'indice n . Cette relation montre que chaque $\Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$, $1 \leq i_\alpha \leq n$, $1 \leq j_\beta \leq n$, est combinaison linéaire, à coefficients complexes, d'un nombre fini d'éléments $\chi_{t^{(h)}}^* \Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$, $1 \leq i_\alpha \leq n-1$, $1 \leq j_\beta \leq n-1$, $t^{(h)} \in U$.

De ce lemme, on déduit immédiatement.

Corollaire 1 . Soit E l'espace vectoriel (sur le corps \mathbb{C}) des formes différentielles extérieures continues, à support compact et de type (p,p) dans \mathbb{C}^n ; soit F une forme \mathbb{C} -linéaire sur E ; F est déterminée par ses valeurs sur les éléments $\chi^* (f \Psi_{1 \dots p 1 \dots p})$ de E , où χ varie dans X_ε et f dans l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans \mathbb{C}^n .

Reformulons ce corollaire sous une forme qui généralise une méthode de démonstration due à K. Kodaira ([15] p. 105 et 106) .

Corollaire 2 . Soit A un espace vectoriel complexe de dimension n ; soit E l'espace vectoriel (sur le corps \mathbb{C}) des formes différentielles extérieures continues, à support compact et de type (p,p) dans A ; soit F une forme \mathbb{C} -linéaire sur E . Soit B_0 une base de A ; pour tout $\varepsilon > 0$, soit B_ε l'ensemble des bases de A qui se déduisent de B_0 par une matrice $1+T$ telle que les éléments de T soient $< \varepsilon$ en valeur absolue . Soit $E_\varepsilon = \{ \varphi ; \varphi \in E , \}$ une base appartenant à B_ε pour laquelle $\varphi = f \varphi_{1\dots p} 1\dots p$, où f est une fonction continue à support compact dans A } .
Pour tout $\varepsilon > 0$, F est déterminée par ses valeurs sur les éléments de E_ε .

En particulier, pour montrer qu'une suite $(F_D)_{D \in \mathbb{N}^*}$ de formes \mathbb{C} -linéaires sur E tend vers une forme \mathbb{C} -linéaire F_0 , il suffit de montrer qu'on a $\lim_{D \rightarrow +\infty} F_D(\varphi) = F_0(\varphi)$ pour tout $\varphi \in E_\varepsilon$.

d) Enoncé et démonstration du théorème .

Théorème 4 . Soit X un sous-ensemble algébrique de \mathbb{P}_n ; soit Y un ouvert de X , ne contenant aucun point singulier de X . Pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , continue sur Y , la fonction à valeurs complexes F_φ définie dans $\mathcal{L}_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \text{ pour tout } c \in \mathcal{L}_d^+(Y)$$

est continue.

Avant de prouver ce théorème, nous ferons quelques remarques.

Remarque 1 . Le théorème 4 exprime la continuité de $\sigma_{Y,d}$ relativement à la topologie faible de $C_d^+(Y)$.

Remarque 2 . L'application qui à φ associe F_φ est continue relativement à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (pour φ et pour F_φ) .

Cela résulte immédiatement de la Proposition 5 , et de la majoration donnée par le lemme 9 de [3].

Démonstration .

α) Réduction au cas affine . Soit $c_0 \in \mathcal{C}_d^+(Y)$. Comme le support de $\sigma_{Y,d}(c_0)$ est compact dans Y , il existe une famille finie $(W_i)_{i \in I}$ d'ouverts de \mathbb{P}_n et, pour tout $i \in I$, des coordonnées $(z_j^{(i)})_{1 \leq j \leq n}$ dans W_i , telles que l'on ait

$$U_i = W_i \cap Y = \{z ; z \in W_i , z_j^{(i)} = 0 \text{ pour } s < j \leq n \}$$

et

$$\text{supp } \sigma_{Y,d}(c_0) \subset \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Pour tout $i \in I$, soit ρ_i une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans W_i , de telle sorte que l'on ait $0 \leq \rho_i \leq 1$ et $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$ sur un voisinage W du support de $\sigma_{Y,d}(c_0)$ dans \mathbb{P}_n .

Pour tout $i \in I$, soit ψ_i une forme différentielle extérieure de type (d,d) , indéfiniment différentiable et à support compact dans W_i , telle que

$$\psi_i|_{U_i} = (\rho_i|_{U_i}) : (\varphi|_{U_i}) .$$

La forme $\psi = \sum_{i \in I} \psi_i$ est donc une forme de type (d,d) dans \mathbb{P}_n vérifiant $\psi|_{W \cap Y} = \varphi|_{W \cap Y}$.

D'après le lemme 4 , il existe un voisinage V de c_0 dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$, tel que $c \in V$ entraîne $|\sigma_{Y,d}(c)| \subset W \cap Y$. Pour tout $c \in V$, on a

$$\int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi = \sum_{i \in I} \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi_i \quad ;$$

il suffit donc d'étudier chacune des intégrales figurant au second membre, lorsque c varie dans V .

(b) Choix des coordonnées et de la projection .

D'après ce qui précède, il suffit d'établir le théorème lorsque $Y = \mathbb{P}_n$ et lorsque φ est une forme différentielle de type (d,d) à support compact dans un ouvert de coordonnées de \mathbb{P}_n .

Soit $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ tendant vers c_0 et appartenant à la composante connexe de c_0 . On peut choisir des coordonnées homogènes $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans \mathbb{P}_n vérifiant les conditions:

- i) φ est à support compact dans $\mathbb{C}^n = \{x ; x \in \mathbb{P}_n , x_0 \neq 0\}$;
- ii) $\mathbb{P}_{n-d-2} = \{x ; x \in \mathbb{P}_n , x_i = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq d+1\}$ vérifie relativement à la suite $(\sigma_{Y,d}(c_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ les conditions i) et ii) de la Proposition 5 ;
- iii) aucune composante irréductible de $\sigma_{Y,d}(c_0)$ n'est contenue dans l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$;
- iv) le point à l'infini de l'axe des x_{d+1} n'appartient pas à la projection de $\sigma_{Y,d}(c_0)$ sur

$$\mathbb{P}_{d+1} = \{x ; x \in \mathbb{P}_n ; x_i = 0 \text{ pour } d+2 \leq i \leq n\} .$$

On peut supposer les conditions iii) et iv) vérifiées par $\sigma_{Y,d}(c_\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, puisqu'elles le sont dès que ν est assez grand.

Considérons dans \mathbb{C}^n les coordonnées

$$y_i = \frac{x_i}{x_0} \text{ pour } 1 \leq i \leq d+1 \text{ et } z_j = \frac{x_{d+1+j}}{x_0} \text{ pour } 1 \leq j \leq n-d-1 ;$$

soient

$$\mathbb{C}^{d+1} = \left\{ x ; x \in \mathbb{C}^n , z_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n-d-1 \right\} ,$$

$$\mathbb{C}^{n-d-1} = \left\{ x ; x \in \mathbb{C}^n , y_i = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq d+1 \right\} ;$$

\mathbb{P}_{n-d-2} est l'hyperplan à l'infini de \mathbb{C}^{n-d-1} .

On doit établir la relation

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} F_{\varphi}(\nu) = F_{\varphi}(c_0)$$

pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , continue et à support compact dans \mathbb{C}^n ; pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $G_{\nu}(\varphi) = F_{\varphi}(c_{\nu})$ définit une forme \mathbb{C} -linéaire sur l'espace \mathbb{C} -vectoriel de ces formes différentielles.

Tout système de coordonnées, situé dans un sous-ensemble partout dense d'un certain voisinage de celui précédemment choisi, vérifie encore les conditions ci-dessus. Vu le Corollaire 2 du lemme 11 et la remarque qui le suit, il suffit donc de considérer les formes différentielles

$$\varphi = \alpha(y,z) \bigwedge_{1 \leq i \leq d} dy_i \wedge d\bar{y}_i$$

où $\alpha(y,z)$ est une fonction continue à support compact dans \mathbb{C}^n .

Υ) Equations des projections des cycles .

Poursuivons la démonstration sous les hypothèses précisées dans β) Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, soit

$$A_{\nu} = \sigma_{Y,d}(c_{\nu}) = \sum_{1 \leq i \leq l_{\nu}} n_{i,\nu} A_{i,\nu}$$

l'expression canonique de $\sigma_{Y,d}(c_{\nu})$ (cf. [3] , n° 9) .

Comme c_D tend vers c_0 dans $\mathcal{C}_d^+(\mathbb{Y})$ quand D tend vers $+\infty$, nous pouvons associer à c_D , pour tout $D \in \mathbb{N}$, une forme de Cayley F_D de telle sorte que les coefficients de F_D tendent vers ceux de F_0 quand D tend vers $+\infty$. Ces formes de Cayley F_D sont toutes de même degré g par rapport à chaque série $\overset{i}{u}$ de variables. Pour tout $D \in \mathbb{N}$, soit

$$F_D = \prod_{1 \leq i \leq l_D} F_{i,D}^{n_{i,D}}$$

où $F_{i,D}$ est forme de Cayley de $A_{i,D}$.

En effectuant dans F_D (resp. $F_{i,D}$) la substitution définie par $\overset{i}{u}_0 = y_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq d$, $\overset{i}{u}_{i+1} = -1$ pour $0 \leq i \leq d$ et $\overset{i}{u}_j = 0$ dans les autres cas, nous obtenons un polynôme p_D (resp. $p_{i,D}$) en les variables $(y_i)_{1 \leq i \leq k+1}$, vérifiant les conditions :

- i) $p_D = \prod_{1 \leq i \leq l_D} p_{i,D}^{n_{i,D}}$ est de degré g pour tout $D \in \mathbb{N}$;
 ii) $\lim_{D \rightarrow +\infty} p_D = p_0$.

Vu la condition ii) de β , les polynômes $p_{i,D}$ sont irréductibles. Vu la condition iii) de β pour A_D , p_D (resp. $p_{i,D}$) est non constant et admet pour diviseur la projection (avec multiplicités) de $A_D \cap \mathbb{C}^n$ (resp. $A_{i,D} \cap \mathbb{C}^n$) sur \mathbb{C}^{d+1} . Vu la condition iv) de β pour A_D , le polynôme $p_D(a_1, \dots, a_d, y_{d+1})$ possède, quel que soit D , g racines (distinctes ou non) pour tout choix des constantes a_i , $1 \leq i \leq d$. De cette condition il résulte encore : tout point $a \in \{p_0(y)=0\}$ possède un système fondamental de voisinages $Q(a,r)$ tels que $p_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{d+1}, a, r, g)$.

δ) Equations locales des projections des cycles .

Soit K un compact de \mathbb{C}^{d+1} contenant la projection du support de φ .

Soit a un point de K vérifiant $p_0'(a) = 0$. Soit $(a, b_i)_{1 \leq i \leq k}$ l'ensemble des points du support de A_0 qui se projettent en a ;

on a $k \leq g$, $b_i \in \mathbb{C}^{n-d-1}$, $1 \leq i \leq k$. Pour tout i , $1 \leq i \leq k$, soit $P_i(\varepsilon)$ le polydisque fermé de \mathbb{C}^{n-d-1} de centre b_i , de rayons égaux à ε . Il est possible de choisir ε et r de telle sorte que :

i) les $P_i(\varepsilon)$ soient deux à deux disjoints ;

ii) $\{p_0(y) = 0\} \cap Q(a,r) \cap$

$$\left\{ \left| \sum_{2d+1}^{2d+1}(y) - \sum_{2d+1}^{2d+1}(a) \right| = r_{2d+1}, \left| \sum_{2d+2}^{2d+2}(y) - \sum_{2d+2}^{2d+2}(a) \right| = r_{2d+2} \right\} = \emptyset ;$$

iii) pour $1 \leq i \leq k$, $|A_0| \cap (Q(a,r) \times b P_i(\varepsilon)) = \emptyset$,

$b P_i(\varepsilon)$ désignant le bord de $P_i(\varepsilon)$.

Remarquons que les voisinages $\bigcup_{1 \leq i \leq k} Q(a,r) \times P_i(\varepsilon)$ de l'en-

semble des points (a, b_i) , $1 \leq i \leq k$, vérifiant ces conditions, constituent un système fondamental de voisinages de cet ensemble.

Choisissons un tel voisinage ; nous pouvons supposer la condition ii) (resp. iii)) ci-dessus vérifiée par p_D au lieu de p_0 (resp. A_D au lieu de A_0) pour tout $D \in \mathbb{N}$, car ceci a lieu dès que D est assez grand. Soient $r' > r$ et $\varepsilon' > \varepsilon$, tels que les conditions i) et iii) ci-dessus soient encore vérifiées pour r' au lieu de r , ε' au lieu de ε , et tout $D \in \mathbb{N}$.

Soit

$$B_{D,i} = |A_D| \cap \overbrace{(Q(a,r') \times P_i(\varepsilon))}^0.$$

En vertu de la condition ii), la projection de $B_{D,i}$ sur $\overbrace{Q(a,r')}^0$ est propre ; son image est donc un sous-ensemble analytique $B'_{D,i}$

de $\overbrace{Q(a,r')}^0$ de codimension pure 1. Soient $B_{D,i}^{(\alpha)}$ les composantes irréductibles de $B_{D,i}$; chacune d'elles est contenue dans une composante de A_D ; donc sa multiplicité $\mu_{D,i}^{(\alpha)}$ est déterminée. Soit $B'_{D,i}^{(\alpha)}$ la projection de $B_{D,i}^{(\alpha)}$; les $B'_{D,i}^{(\alpha)}$ sont les composantes irréductibles de $B'_{D,i}$.

Pour chaque $B'_{D,i}^{(\alpha)}$ soit $f_{D,i}^{(\alpha)}$ une fonction holomorphe dans $\overline{Q(a,r')}$ ayant $B'_{D,i}^{(\alpha)}$ pour diviseur. Comme les $f_{D,i}^{(\alpha)}$ divisent $p_D / \overline{Q(a,r')}$, qui est de degré g , on peut prendre pour $f_{D,i}^{(\alpha)}$ un polynome unitaire en y_{d+1}

$$f_{D,i}^{(\alpha)}(y) = y_{d+1}^{s_{\alpha,D,i}} + \sum_{1 \leq j \leq s_{\alpha,D,i}} a_j(y_1, \dots, y_d) y_{d+1}^{s_{\alpha,D,i} - j}$$

dont les coefficients a_j soient holomorphes dans $\overline{Q(a,r')}$ et dont les racines soient toutes dans le rectangle

$$\left\{ \left| \sum_{2d+1}^{2d+1}(y) - \sum_{2d+1}^{2d+1}(a) \right| < r_{2d+1}, \left| \sum_{2d+2}^{2d+2}(y) - \sum_{2d+2}^{2d+2}(a) \right| < r_{2d+2} \right\}.$$

Soit alors

$$f_{D,i} = \prod_{\alpha} (f_{D,i}^{(\alpha)})^{\mu_{D,i}^{(\alpha)}}$$

On a $f_{D,i} \in \mathcal{H}(\overline{Q(a,r')}, a, r, g)$ et les fonctions $f_{D,i}$ vérifient les hypothèses du lemme 11: l'hypothèse ii) en vertu de la condition ii) de β selon laquelle la projection est génériquement biunivoque, les autres hypothèses en conséquence immédiate de la construction. Par conséquent, pour tout r'' vérifiant $r < r'' < r'$, $f_{D,i}$ converge uniformément vers $f_{0,i}$ dans $Q(a,r'')$ quand D tend vers $+\infty$.

ε) Convergence des intégrales .

Soit Q un pavé contenant K . Il existe une constante $V > 0$ telle que l'on ait, pour tout $D \in \mathbb{N}$,

$$\text{vol}(p_D) \Big|_Q < V$$

où (p_D) désigne le diviseur de p_D .

Selon les conclusions de β , nous intégrons une forme différentielle

$$\varphi = \alpha(y, z) \theta, \quad \theta = \left(\frac{i}{2}\right)^d \bigwedge_{1 \leq i \leq d} dy_i \wedge d\bar{y}_i$$

où $\alpha(y, z)$ est une fonction continue dont le support se projette dans K .

Soit $\delta > 0$; soit $\eta > 0$ tel que, si p et p' sont deux points de \mathbb{C}^n , de distance $< \eta$, on ait

$$|\alpha(p) - \alpha(p')| < \frac{\delta}{3gV}$$

Pour chaque point $a \in \{p_0(y) = 0\} \cap K$, effectuons la construction exposée en δ , avec des nombres r_a et ε_a , de telle sorte que chaque $Q(a, r_a) \times P_i(\varepsilon_a)$ soit de diamètre $< \eta$. Soit $(a_h)_{1 \leq h \leq \ell}$ une suite finie de points de $\{p_0(y) = 0\} \cap K$ telle que l'on ait

$$\{p_0(y) = 0\} \cap K \subset \bigcup_{1 \leq h \leq \ell} Q(a_h, r_{a_h}) \subset Q.$$

Posons $r_h = r_{a_h}$ et $\varepsilon_h = \varepsilon_{a_h}$ pour $1 \leq h \leq \ell$. La construction précédente, effectuée aux points a_h , $1 \leq h \leq \ell$, nous fournit les voisinages

$$Q(a_h, r_h) \times P_i(\varepsilon_h), \quad 1 \leq i \leq k_h, \quad 1 \leq h \leq \ell,$$

k_h désignant le nombre de points de $|A_0|$ au dessus de a_h . Nous pouvons supposer

$$|A_D| \cap (K \times \mathbb{C}^{n-d-1}) \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} Q(a_h, r_h) \times P_i(\varepsilon_h)$$

pour tout $D \in \mathbb{N}$, car cette condition est réalisée dès que D est suffisamment grand.

La construction exposée en δ nous fournit encore des fonctions $f_{D,i,h}$, $1 \leq i \leq k_h$, $1 \leq h \leq \ell$, $D \in \mathbb{N}$; $f_{D,i,h}$ est définie au voisinage de $Q(a, r_h)$ et possède les propriétés indiquées à la fin de δ .

Soit $E_1 = Q(a_1, r_1)$ et, pour tout $h \leq \ell$,

$$E_h = Q(a_h, r_h) - \bigcup_{1 \leq j < h} Q(a_j, r_j) \quad ; \text{ pour } 1 \leq h \leq \ell,$$

et pour $1 \leq i \leq k_h$, soit $\Delta_{h,i} = E_h \times P_i(\varepsilon_h)$. Pour tout $D \in \mathcal{N}$,

nous avons

$$\int_{A_D} \varphi = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} \int_{\Delta_{h,i} \cap A_D} \varphi$$

et par conséquent

$$\left| \int_{A_D} \varphi - \int_{A_0} \varphi \right| \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} \left| \int_{A_D \cap \Delta_{h,i}} \varphi - \int_{A_0 \cap \Delta_{h,i}} \varphi \right|.$$

En désignant par $\alpha_{h,i}$ une valeur prise par α dans $\Delta_{h,i}$, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{A_D \cap \Delta_{h,i}} \varphi - \int_{A_0 \cap \Delta_{h,i}} \varphi \right| \leq \left| \int_{A_D \cap \Delta_{h,i}} (\alpha - \alpha_{h,i}) \theta \right| \\ & + \left| \int_{A_0 \cap \Delta_{h,i}} (\alpha - \alpha_{h,i}) \theta \right| + \left| \alpha_{h,i} \left(\int_{A_D \cap \Delta_{h,i}} \theta - \int_{A_0 \cap \Delta_{h,i}} \theta \right) \right| \\ & \leq \frac{\delta}{3gV} \text{vol}(p_D) \Big|_{E_h} + \frac{\delta}{3gV} \text{vol}(p_0) \Big|_{E_h} \end{aligned}$$

$$+ \sup_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} |\alpha_{h,i}| \cdot \left| \int_{(f_{D,i,h}) \Big|_{E_h}} \theta - \int_{(f_{0,i,h}) \Big|_{E_h}} \theta \right|.$$

D'après δ , $f_{D,i}$ tend vers $f_{0,i}$ uniformément dans un voisinage de $Q(a_h, r_h)$. D'après δ et la remarque faite à la suite du lemme 10,

$$\int_{(f_{D,i,h})|_{E_h}} \theta - \int_{(f_{0,i,h})|_{E_h}} \theta$$

tend vers 0 quand D tend vers $+\infty$. Soit D_1 tel que $D \geq D_1$ entraîne

$$\left| \int_{(f_{D,i,h})|_{E_h}} \varphi - \int_{(f_{0,i,h})|_{E_h}} \varphi \right| < \frac{\delta}{3 \cdot \sup_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} |\alpha_{h,i}| \cdot \sum_{1 \leq h \leq \ell} k_h}$$

pour tout h vérifiant $1 \leq h \leq \ell$ et tout i vérifiant $1 \leq i \leq k_h$.

Pour $D \geq D_1$, on a

$$\left| \int_{A_D} \varphi - \int_{A_0} \varphi \right| \leq \frac{\delta}{3gV} \sum_{1 \leq h \leq \ell} k_h (\text{vol}(p_D)|_{E_h} + \text{vol}(p_0)|_{E_h}) + \frac{\delta}{3}.$$

Comme on a $k_h \leq g$ et $\sum_{1 \leq h \leq \ell} \text{vol}(p_D)|_{E_h} \leq V$, on obtient

$$\left| \int_{A_D} \varphi - \int_{A_0} \varphi \right| \leq \delta.$$

6. Théorème d'analyticité.

a) Un lemme sur des courbes analytiques dans $\mathcal{C}_d^+(\mathbb{P}_n)$

Soit $D = \{t ; t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$; l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ des séries entières en t convergentes au voisinage de 0 est factoriel; donc l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ u, \dots, u \end{smallmatrix}^d \right]$ (voir la notation introduite dans le n° 4 a)

Remarque 1 . Soit $F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ un élément de l'anneau
 $\mathbb{C} \{t\} [\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$, à coefficients holomorphes dans D , et irréduc-
tible sur $\mathbb{C} \{t\}$. Il existe un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$
tel que, pour tout t vérifiant $0 < |t| < \varepsilon$, $F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ se décom-
pose dans $\mathbb{C} [\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$ en facteurs irréductibles distincts.

En effet, vu la Remarque 3 du N° 4, b, la condition pour que $F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ ait un facteur multiple dans $\mathbb{C} [\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$ est donnée par l'annulation de polynomes p_α , $1 \leq \alpha \leq \mathcal{L}$, en les coefficients de F , c'est-à-dire par l'annulation au point t d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{C} \{t\}$; comme $\mathbb{C} \{t\}$ est principal, l'idéal engendré par ces éléments est engendré par un élément $\Delta(t)$; celui-ci n'est pas identiquement nul car F est irréductible sur $\mathbb{C} \{t\}$. Il suffit de choisir ε tel que l'on ait $\Delta(t) \neq 0$ pour $0 < |t| < \varepsilon$.

Pour toute application holomorphe \mathcal{C} de D dans $\mathcal{C}_d^+(\mathbb{P}_n)$, il existe un élément $F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ de l'anneau $\mathbb{C} \{t\} [\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$ à coefficients holomorphes dans D , tel que, pour tout $t \in D$, $F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ soit une forme de Cayley appartenant à $\mathbb{C} [\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$ et définissant l'élément $\mathcal{C}(t)$ de $\mathcal{C}_d^+(\mathbb{P}_n)$; comme D est normal, un tel élément définit \mathcal{C} .

Lemme 12 . Soit \mathcal{C} une application holomorphe de D dans
 $\mathcal{C}_d^+(\mathbb{P}_n)$. Il existe un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$, une
variété analytique complexe A de dimension $d+1$, une application
holomorphe propre π de A sur D et une application holomorphe f
de A dans \mathbb{P}_n , de telle sorte que :

- i) pour tout $t \in D$, la restriction de f à $\pi^{-1}(t)$ est
propre, et on a $f(\pi^{-1}(t)) = |\sigma_{\mathbb{P}_n, d}(\mathcal{C}(t))|$;
- ii) pour tout t vérifiant $0 < |t| < \varepsilon$, il existe un sous-
ensemble analytique S_t de $\pi^{-1}(t)$, de dimension $\leq d-1$,
tel que la restriction de f à $\pi^{-1}(t) - S_t$ soit un isomor-
phisme analytique de $\pi^{-1}(t) - S_t$ sur son image;

iii) pour tout 2-simplexe différentiable Δ contenu dans la couronne $0 < |t| < \varepsilon$, la restriction de π à $\pi^{-1}(\Delta)$ est une fibration différentiable triviale, à fibres compactes de dimension d , de $\pi^{-1}(\Delta)$ sur Δ .

Preuve. \forall . En appliquant à un élément F de $\mathbb{C}\{\{t\}\}[u, \dots, u^d]$ qui définit \mathcal{Z} la méthode utilisée au début de la démonstration du lemme 4, on obtient un système d'équations $g_j(t, x) = 0$, $0 \leq j \leq k$ définissant un sous-ensemble analytique \tilde{A} de $D \times \mathbb{P}_n$. Soit $\tilde{\pi}$ (resp. \tilde{f}) la projection de \tilde{A} sur D (resp. dans \mathbb{P}_n). On a les propriétés suivantes :

- i) pour tout $t \in D$, la restriction de \tilde{f} à $\tilde{\pi}^{-1}(t)$ est un isomorphisme analytique de $\tilde{\pi}^{-1}(t)$ sur $|\sigma_{\mathbb{P}_n, d}(\mathcal{Z}(t))|$; en particulier, $\tilde{\pi}$ est propre.
- ii) \tilde{A} est purement dimensionnel et de dimension $d+1$; c'est une conséquence de i.

β . Soit \tilde{S} l'ensemble des points singuliers de \tilde{A} ; c'est un ensemble analytique de dimension $\leq d$. D'après le théorème d'Hironaka [12], il existe une variété analytique complexe A de dimension $d+1$ et une application holomorphe propre h de A sur \tilde{A} , de telle sorte que la restriction de h à $A - h^{-1}(\tilde{S})$ soit un isomorphisme analytique de $A - h^{-1}(\tilde{S})$ sur $A - \tilde{S}$, et que l'ouvert $A - h^{-1}(\tilde{S})$ soit partout dense dans A . Soient $\tilde{\pi} = \pi \circ h$ et $f = \tilde{f} \circ h$. On a les propriétés suivantes :

i) Pour tout $t \in D$, on a

$$f(\pi^{-1}(t)) = \tilde{f}(\tilde{\pi}^{-1}(t)) = |\sigma_{\mathbb{P}_n, d}(\mathcal{Z}(t))|,$$

et la restriction de f à $\pi^{-1}(t)$ est propre.



ii) L'ensemble $S = h^{-1}(\tilde{S})$ est un sous-ensemble analytique de dimension $\leq d$ de A ; pour tout $t \in D$, la restriction de f à $\pi^{-1}(t) - S_t$, $S_t = S \cap \pi^{-1}(t)$ est un isomorphisme analytique de $\pi^{-1}(t) - S_t$ sur son image. Parmi les composantes irréductibles de S , pourrait figurer une composante irréductible d'une fiche de π ; toutefois, il existe un nombre réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout t vérifiant $0 < |t| < \varepsilon_1$, l'ensemble analytique S_t soit de dimension $\leq d-1$. La propriété ii) du lemme est donc établie pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

iii) L'application π est propre, et il existe un nombre réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que la couronne $0 < |t| < \varepsilon_2$ ne contienne aucune valeur critique de π . En effet, l'ensemble critique de π dans A est l'ensemble des points de A où s'annule la différentielle de π ; c'est donc un ensemble analytique, et son image par l'application propre π est un sous-ensemble analytique T de D ; d'après le théorème de Sord, T est de mesure nulle ; il est donc de dimension zéro ; la propriété annoncée en résulte. On en déduit la propriété iii) du lemme pour $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

Corollaire . Soit X un sous-ensemble algébrique de \mathbb{P}_n ; soit Y un ouvert de X , ne contenant aucun point singulier de X . Soit φ une forme différentielle extérieure continue, de type (d,d) , dans Y . Soit F_φ la fonction à valeurs complexes définie dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \quad \text{pour tout } c \in \mathcal{C}_d^+(Y).$$

Soit \mathcal{Z} une application holomorphe de D dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$, définie par un élément $F(t, \overset{0}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ de $\mathbb{C}\{\{t\}\} [\overset{0}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$ à coefficients holomorphes dans D , et irréductible sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$.

Il existe un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$, une variété analytique complexe A de dimension $d+1$, une application holomorphe propre π de A sur D et une application holomorphe f de A dans Y , tels qu'on ait la propriété suivante :

Soient $D'_\varepsilon = \{t ; 0 < |t| < \varepsilon\}$, $A'_\varepsilon = \pi^{-1}(D'_\varepsilon)$, et π'_ε la res-
triction de π à A'_ε ; alors la restriction de $F_\varphi \circ \tau$ à D'_ε
est (comme courant de degré 0 dans D'_ε) l'image par π'_ε de la
restriction de $f^*\varphi$ à A'_ε (considérée comme courant dans A'_ε) .

Effectuons en effet la construction du lemme 12 ; la remarque 1 nous permet en outre de choisir ε tel que $\sigma_{Y,d}(\tau(t))$ soit identique à son support pour $t \in D'_\varepsilon$. On a alors

$$(F_\varphi \circ \tau)(t) = \int_{\sigma_{Y,d}(\tau(t))} \varphi = \int_{\pi^{-1}(t)} f^* \varphi$$

pour $t \in D'_\varepsilon$.

Soit ψ une forme différentielle extérieure indéfiniment différentiable, de type (1,1), à support compact dans D'_ε . On a

$$\int_{D'_\varepsilon} (F_\varphi \circ \tau) \cdot \psi = \int_{D'_\varepsilon} \left(\int_{\pi^{-1}(t)} f^* \varphi \right) \cdot \psi .$$

Si le support de ψ est contenu dans un 2-simplexe différentiable Δ contenu dans D'_ε , la dernière intégrale est égale à

$$\int_{A'_\varepsilon} (f^* \varphi) \wedge (\pi'_\varepsilon{}^* \psi) ;$$

sinon, on se ramène à ce cas en utilisant une partition de l'unité. La relation obtenue

$$\int_{D'_\varepsilon} (F_\varphi \circ \tau) \cdot \psi = \int_{A'_\varepsilon} (f^* \varphi) \wedge (\pi'_\varepsilon{}^* \psi)$$

exprime la propriété annoncée.

b) Enoncé et démonstration du théorème .

Définition . Une forme différentielle φ de type (d,d) , définie et continue dans une variété analytique complexe, sera dite pseudoconvexe si elle est réelle et si le courant $\frac{i}{\pi} d'd'' \varphi$ est ≥ 0 (au sens de [17]) .

Théorème 5 . Soit X un sous-ensemble algébrique de \mathbb{P}_n ; soit Y un ouvert de X , ne contenant aucun point singulier de X , et soit Ω^d le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré d dans Y .

i) Pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , deux fois différentiable et pseudoconvexe dans Y , la fonction à valeurs réelles F_φ définie dans $\mathcal{L}_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \quad \text{pour tout } c \in \mathcal{L}_d^+(Y)$$

est continue et plurisousharmonique (au sens de [10])

ii) Pour tout $\omega \in H^d(Y, \Omega^d)$, la fonction à valeurs complexes F_ω définie dans $\mathcal{L}_d^+(Y)$ par

$$F_\omega(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \omega \quad \text{pour tout } c \in \mathcal{L}_d^+(Y) ,$$

est holomorphe.

Démonstration . Soit φ une forme différentielle extérieure continue de type (d,d) dans Y , et soit F_φ la fonction définie par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \quad \text{pour tout } c \in \mathcal{L}_d^+(Y) .$$

Soit \mathcal{C} une application holomorphe de D dans $\mathcal{L}_d^+(Y)$; elle est définie par un élément $F(t, \overset{a}{u}, \dots, \overset{a}{u})$ de l'anneau $\mathbb{C}\{t\}\{\overset{a}{u}, \dots, \overset{a}{u}\}$ à coefficients holomorphes dans D .

Soit

$$F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}) = \prod_{1 \leq i \leq s} F_i(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})^{m_i}$$

la décomposition de F en facteurs premiers dans $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$;
 soit $\tau_i(t)$ l'élément de $\mathcal{L}_d^+(Y)$ défini par la forme de Cayley
 $F_i(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$. Pour $|t|$ suffisamment petit, on a

$$\sigma_{Y,d}(\mathcal{Z}(t)) = \sum_{1 \leq i \leq s} m_i \cdot \sigma_{Y,d}(\tau_i(t))$$

et par conséquent

$$F_\varphi \circ \mathcal{Z} = \sum_{1 \leq i \leq s} m_i \cdot (F_\varphi \circ \tau_i) .$$

Si, moyennant des hypothèses convenables sur φ , on montre que
 $F_\varphi \circ \tau_i$ est, pour tout i , soit holomorphe, soit sousharmonique au
 voisinage de \mathbb{O} , la même propriété en résultera pour $F_\varphi \circ \mathcal{Z}$. Il
 suffit donc de considérer le cas où \mathcal{Z} est définie par un élément
 $F(t, \overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u})$ de $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u}, \dots, \overset{d}{u}]$ à coefficients holomorphes dans D ,
 et irréductible sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Effectuons dans ce cas la construction
 du Corollaire qui précède.

(β) Supposons φ pseudoconvexe et deux fois différentiable ;
 l'opération image réciproque f^* des formes par f et l'opération
 image directe π_* des courants par π'_ε commutent avec les diffé-
 rentielles d' et d'' , par conséquent aussi avec l'opérateur $d'd''$;
 elles conservent en outre le caractère ≥ 0 des formes et des courants.
 La fibration $\pi : A'_\varepsilon \longrightarrow D'_\varepsilon$ étant localement triviale (du point
 de vue différentiable) sur D'_ε , le courant $\pi_* f^* \varphi$ coïncide sur
 D'_ε avec la fonction continue $F_\varphi \circ \mathcal{Z}$. Par conséquent le courant
 $\frac{1}{n} d'd''(F_\varphi \circ \mathcal{Z})$ est ≥ 0 dans D'_ε ; comme $F_\varphi \circ \mathcal{Z}$ est continue
 (d'après le théorème 4), $F_\varphi \circ \mathcal{Z}$ est sousharmonique au voisinage de \mathbb{O} .
 Ceci ayant lieu quel que soit \mathcal{Z} , F_φ est plurisousharmonique dans
 $\mathcal{L}_d^+(Y)$.

(γ) Supposons maintenant que φ est indéfiniment différentiable
 et vérifie $d''\varphi = 0$; un argument utilisé en (β) montre que l'on a
 $d''(F_\varphi \circ \mathcal{Z}) = 0$ (au sens des courants) dans D'_ε ; par conséquent

$F_\varphi \circ \mathcal{T}$ est holomorphe dans D'_ε ; comme $F_\varphi \circ \mathcal{T}$ est continue d'après le théorème 4 , $F_\varphi \circ \mathcal{T}$ est holomorphe au voisinage de 0 en vertu du théorème de Riemann . Ceci ayant lieu pour toute application \mathcal{T} telle que $\mathcal{T}(0)$ soit un point non singulier de $\mathcal{C}_d^+(Y)$, F_φ est (d'après le théorème de Hartogs banal) holomorphe au voisinage des points non singuliers de $\mathcal{C}_d^+(Y)$. Comme F_φ est continue et comme $\mathcal{C}_d^+(Y)$ est faiblement normal, F_φ est holomorphe dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$.

Or on a par définition $F_{\xi} = F_\varphi$ (cf. [3] n° 7 a δ) si φ est une forme à laquelle le théorème de Dolbeault associe la classe

$$\xi \in H^d(Y, \Omega^d); F_{\xi} \text{ est donc holomorphe.}$$

c) L'application $\rho_{Y,d}^{(0)}$.

Reprenons les hypothèses du théorème 5 , et désignons par \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$. Vu le théorème 5 , soit

$$\rho_{Y,d}^{(0)} : H^d(Y, \Omega^d) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}_d^+(Y), \mathcal{O})$$

l'application qui fait correspondre, à tout $\xi \in H^d(Y, \Omega^d)$, la fonction F_ξ , holomorphe dans $H^0(\mathcal{C}_d^+(Y), \mathcal{O})$; cette application est linéaire;

son image est contenue dans l'ensemble des fonctions f holomorphes sur $\mathcal{C}_d^+(Y)$ et additives , c'est-à-dire vérifiant

$$f(c_1 + c_2) = f(c_1) + f(c_2)$$

pour tous $c_1 \in \mathcal{C}_d^+(Y)$, $c_2 \in \mathcal{C}_d^+(Y)$, l'addition dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ étant obtenue en transportant par la bijection $\sigma_{Y,d}$ l'addition de $\mathcal{C}_d^+(Y)$.

Soit $A_q(Y)$ l'algèbre engendrée dans $H^0(\mathcal{C}_d^+(Y), \mathcal{O})$ par l'image de $\rho_{Y,d}^{(0)}$ et les constantes .

§ 3 . Convexité holomorphe dans l'espace des cycles .

6 . L'espace des cycles d'une variété algébrique strictement q-pseudoconvexe .

a) Cas d'un ouvert strictement q-pseudoconvexe .

Rappelons, selon [7] et [19], la méthode de réduction de Remmert d'un espace holomorphiquement convexe . Soit V un tel espace, et soit R la relation d'équivalence dans V pour laquelle $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ pour toute fonction f holomorphe dans V . Cette relation d'équivalence est propre ; d'après le "Main theorem" de [], l'espace annelé V/R quotient de V par R est un espace analytique complexe et l'application naturelle π de V sur V/R est holomorphe ; V/R est un espace de Stein ; les fibres de π sont des ensembles analytiques connexes. L'ensemble

$$\{x ; x \in V \quad , \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) > 0 \}$$

sera appelé ensemble de dégénérescence de V . D'après un théorème de Remmert [20] , c'est un ensemble analytique .

Nous avons défini dans [3] la notion de sous-ensemble ouvert strictement q-pseudoconvexe d'une variété analytique complexe.

Théorème 6 . Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une variété algébrique projective X ; supposons que Y a une frontière non vide et ne contient pas de point singulier de X .

Si Y est strictement q-pseudoconvexe, alors :

- i) l'espace analytique complexe $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est $A_q(Y)$ -convexe ;
- ii) $H^0(\mathcal{C}_q^+(Y), \mathcal{O})$ est la fermeture intégrale faible de $A_q(Y)$.

En particulier, l'espace $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est holomorphiquement convexe. L'ensemble de dégénérescence de chacune de ses composantes connexes est compact .

Si, de plus, $H^{q+1}(Y, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau analytique, cohérent \mathcal{F} dans Y (en particulier si Y est q -complet), alors $A_q(Y)$ sépare les points de $\mathcal{C}_q^+(Y)$; en particulier, $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est holomorphiquement complet.

La conclusion i) résulte de la Proposition 7 de [3] (encore valable quand on y remplace les ensembles analytiques A_q , par des éléments de $\mathcal{C}_q^+(Y)$) et du Théorème 5. La conclusion ii) résulte de i) et du Théorème 2.

D'après le lemme 15 de [3], il existe un compact K de Y contenant tout sous-ensemble analytique compact de Y de dimension $\geq q+1$ en chacun de ses points. Soit E l'ensemble de dégénérescence d'une composante connexe W de $\mathcal{C}_q^+(Y)$; d'après la Remarque 4 du n° 4, b, $\bigcup_{c \in E} |\sigma_{Y,q}(c)|$ est un sous-ensemble analytique compact de Y ayant en chaque point une dimension $\geq q+1$, donc contenu dans K ; d'après la Remarque 5 du n° 4, b) E est contenu dans un compact K' de W .

La dernière assertion résulte du Théorème 5 de [3].

b) Paires de Runge d'espaces de cycles.

Soit X une variété analytique complexe ; on désigne par $C^{r,s}(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles indéfiniment différentiables et de type (r,s) dans X ; on le munit de la topologie de la convergence uniforme, sur tout compact, des coefficients des formes et de leurs dérivées ; c'est alors un espace de Fréchet - Schwartz.

La différentielle extérieure d'' définit une application linéaire continue $d''_{r,s}$ de $C^{r,s}(X)$ dans $C^{r,s+1}(X)$; le noyau $Z^{r,s}(X)$ de $d''_{r,s}$ est fermé ; c'est donc un espace de Fréchet-Schwartz.

Définition. Soit Y un sous-ensemble ouvert de X ; on dit que (X,Y) est une q -paire de Runge si l'image de l'homomorphisme de restriction

$$\begin{matrix} r^X \\ Y \end{matrix} : Z^{q,q}(X) \longrightarrow Z^{q,q}(Y)$$

est dense dans $Z^{q,q}(Y)$ (cf. [22]).

Si $q = 0$, on retrouve la notion usuelle de paire de Runge.

Soit Ω^q le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré q dans X . Vu le théorème de Dolbeault, $H^s(X, \Omega^r)$ est canoniquement isomorphe au quotient du noyau de $d_{r,s}''$ par l'image de $d_{r,s-1}''$; on munit $H^s(X, \Omega^r)$ de la topologie déduite de la topologie quotient correspondante. Pour que l'espace vectoriel topologique $H^s(X, \Omega^r)$ soit séparé (donc pour qu'il soit un espace de Fréchet - Schwartz), il faut et il suffit que l'image de $d_{r,s-1}''$ soit un sous-espace fermé de $C^{r,s}(X)$. Ceci a lieu en particulier si $\dim_{\mathbb{C}} H^s(X, \Omega^r) < +\infty$ (analogue de la Remarque qui suit le Théorème 11 de [0]).

Remarque . Supposons les espaces $H^q(X, \Omega^q)$ et $H^q(Y, \Omega^q)$ séparés. Alors, pour que (X, Y) soit une q -paire de Runge, il faut et il suffit que l'image de l'homomorphisme de restriction

$$*r_Y^X : H^q(X, \Omega^q) \longrightarrow H^q(Y, \Omega^q)$$

soit dense dans $H^q(Y, \Omega^q)$.

En effet, on a le diagramme commutatif d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} Z^{q,q}(X) & \xrightarrow{r_Y^X} & Z^{q,q}(Y) \\ \downarrow \lambda_X & & \downarrow \lambda_Y \\ H^q(X, \Omega^q) & \xrightarrow{*r_Y^X} & H^q(Y, \Omega^q) \end{array}$$

dans lequel λ_X et λ_Y sont surjectifs donc topologiques.

Si (X, Y) est une q -paire de Runge, l'image de $*r_Y^X$ est dense dans $H^q(Y, \Omega^q)$. Réciproquement, supposons que cette image est dense; pour tout $\varphi \in Z^{q,q}(Y)$, il existe une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $Z^{q,q}(X)$ telle que

$$\lambda_Y (r_Y^X (\mu_n) - \varphi) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty .$$

Comme λ_Y est topologique, il existe une suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $Z^{q,q}(Y)$ tendant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et vérifiant $\lambda_Y(r_Y^X(\mu_n) - \varphi) = \lambda_Y(\nu_n)$, c'est-à-dire $\lambda_Y(r_Y^X(\mu_n) - \varphi - \nu_n) = 0$. Pour tout n , il existe donc un élément h_n de $C^{q,q-1}(Y)$ vérifiant

$$r_Y^X(\mu_n) = \varphi + \nu_n + d''h_n.$$

Pour tout n , soit k_n un élément de $C^{q,q-1}(X)$ tel que $h_n - (k_n|_Y)$ tende vers 0 dans $C^{q,q-1}(Y)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_Y^X(\mu_n - d''k_n).$$

Donc (X, Y) est une q -paire de Runge.

Rappelons que selon [0], une fonction φ à valeurs réelles, définie et indéfiniment différentiable dans une variété analytique complexe X de dimension n , est dite fortement q -pseudoconvexe si sa forme de Levi a au moins $n-q$ valeurs propres > 0 en tout point de X .

Proposition 7 . Soit X une variété analytique complexe . Soit K un compact de X , et soit φ une fonction à valeurs réelles, indéfiniment différentiable dans X , vérifiant les conditions :

- i) φ est fortement q -pseudoconvexe dans $X - K$;
- ii) pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $B_c = \{x ; x \in X, \varphi(x) < c\}$ est relativement compact dans X .

Alors, pour toute valeur non critique c de φ vérifiant $c > \sup_{x \in K} \varphi(x)$ et pour tout entier $\ell \geq q$, le couple (X, B_c) est un ℓ -couple de Runge .

Cette proposition est établie dans [22] avec l'hypothèse $K = \emptyset$. La démonstration de [22] s'applique encore à notre cas avec les modifications suivantes (p.331) : $B^{k, \ell+1}(A)$ est un sous-espace fermé de $Z^{k, \ell+1}(A)$ (puisque $\dim_{\mathbb{C}} H^{\ell+1}(A, \Omega^k) < +\infty$) ; $j^{-1}(B^{k, \ell+1}(A))$ est un sous-espace fermé de $Z^{k, \ell}(B_c \cap V)$, et c'est l'image de r .

Théorème 7 . Soient X et Y deux sous-ensembles ouverts, sans points singuliers, et strictement q-pseudoconvexes, d'une variété algébrique projective. Si (X,Y) est une q-paire de Runge, alors
 $(\mathcal{C}_q^+(X), \mathcal{C}_q^+(Y))$ est une paire de Runge et, pour tout compact K de $\mathcal{C}_q^+(Y)$, $\widehat{K}_{\mathcal{C}_q^+(X)}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}_q^+(Y)$.

Conservant les notations du théorème 6 , posons $A = A_q(X)$, $B = A_q(Y)$, et désignons par A' l'algèbre des restrictions à $\mathcal{C}_q^+(Y)$ des éléments de A ; (X,Y) étant une q-paire de Runge, la Remarque 2 qui suit l'énoncé du Théorème 4 montre que A' est dense dans B . De plus, d'après le Théorème 6 , $\mathcal{C}_q^+(X)$ (resp. $\mathcal{C}_q^+(Y)$) est A-convexe (resp. B-convexe) . De ces propriétés, on déduit :

- i) $\mathcal{C}_q^+(X)$ (resp. $\mathcal{C}_q^+(Y)$) est A-convexe (resp. A'-convexe) ;
- ii) $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est saturé pour la relation d'équivalence, définie dans :

$\mathcal{C}_q^+(X) : x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in A$.

De l'énoncé (b') de [1] p. 501 , résulte la conclusion .

c) Variétés strictement q-pseudoconvexes .

Définition . Une variété analytique complexe X sera dite strictement q-pseudoconvexe s'il existe un compact K de X et une fonction φ à valeurs réelles, indéfiniment différentiable dans X , vérifiant les conditions :

- i) φ est fortement q-pseudoconvexe dans $X - K$;
- ii) il existe une suite croissante et divergente $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $B_{c_n} = \{x ; x \in X, \varphi(x) < c_n\}$ soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, relativement compact et strictement q-pseudoconvexe dans X .

Théorème 8 . Soit X un ouvert d'une variété algébrique projective, ne contenant pas de points singuliers. Si X est une variété strictement q-pseudoconvexe, $\mathcal{C}_q^+(X)$ est holomorphiquement convexe .

Si, de plus, $H^{q+1}(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} dans X (en particulier si X est q -complet), alors $A_q(X)$ sépare les points de $\mathcal{L}_q^+(X)$; en particulier, $\mathcal{L}_q^+(X)$ est holomorphiquement complet.

En effet, d'après la Proposition 7, (B_{c_m}, B_{c_n}) est une q -paire de Runge pour $m > n$; d'après le théorème 7, $(\mathcal{L}_q^+(B_{c_m}), \mathcal{L}_q^+(B_{c_n}))$ est une paire de Runge et, pour tout compact K de $\mathcal{L}_q^+(B_{c_n})$, $\hat{K}^{\mathcal{L}_q^+(B_{c_m})}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}_q^+(B_{c_n})$. D'après un théorème de Stein ([23] Satz 1.2.), $(\mathcal{L}_q^+(X), \mathcal{L}_q^+(B_{c_n}))$ est une paire de Runge pour tout n . Donc, pour tout compact K de $\mathcal{L}_q^+(X)$ et tout n vérifiant $K \subset \mathcal{L}_q^+(B_{c_n})$, on a $\hat{K}^{\mathcal{L}_q^+(X)} \cap \mathcal{L}_q^+(B_{c_m}) = \hat{K}^{\mathcal{L}_q^+(B_{c_m})}$ pour tout $m > n$; d'après ce qui précède, $\hat{K}^{\mathcal{L}_q^+(X)} \cap \mathcal{L}_q^+(B_{c_m})$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}_q^+(B_{c_n})$ pour tout $m > n$; $\hat{K}^{\mathcal{L}_q^+(X)}$ est donc un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}_q^+(B_{c_n})$ et a fortiori de $\mathcal{L}_q^+(X)$.

La seconde assertion résulte du théorème 5 de [3].

Exemple 1. Reprenons l'exemple du N° 5 de [3] en gardant les mêmes notations. Soit $Z = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - P_{n-h-1}$.

α) Dans X , nous avons

$$\mathcal{L}(F) = F \mathcal{L}(\Phi) + \frac{i}{\pi} \frac{d'F \wedge \overline{d'F}}{F}.$$

En un point $a \in Z - P_h$, choisissons un repère

$$\theta^\alpha = \sum_{1 \leq i \leq h} a_i^\alpha dx_i, \quad 1 \leq \alpha \leq h, \quad \eta^\beta = \sum_{1 \leq j \leq n-h-1} b_j^\beta dy_j, \quad 1 \leq \beta \leq n-h-1$$

$$d'F = \sum_{1 \leq i \leq h} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \overset{-62-}{\sum_{1 \leq j \leq n-h-1}} \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

tel que

$$\pi_1^* \Omega_1 = \frac{i}{\pi} \sum_{1 \leq \alpha \leq h} \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\alpha \text{ et } \pi_2^* \Omega_2 = \frac{i}{\pi} \sum_{1 \leq \beta \leq n-h-1} \eta^\beta \wedge \bar{\eta}^\beta;$$

alors

$$\mathcal{L}(F) = \frac{i}{\pi} F \left(- \sum_{1 \leq \alpha \leq h} \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\alpha + \sum_{1 \leq \beta \leq n-h-1} \eta^\beta \wedge \bar{\eta}^\beta + \frac{d'F}{F} \wedge \frac{\overline{d'F}}{F} \right),$$

et $\mathcal{L}(F)$ a $n-h$ valeurs propres > 0 et h valeurs propres < 0 au point a . La variété Z est donc strictement h -pseudoconvexe.

(a) Les ouverts

$$U_i = \{ z ; z \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}), z_i \neq 0 \}, \quad 0 \leq i \leq h$$

constituent un recouvrement de Z par $h+1$ ouverts de Stein. Pour tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} sur Z , on a donc $H^{h+i}(Z, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \gg 1$. Grâce à cette propriété et à celle établie ci-dessus, $\mathcal{L}_h^+(Z)$ est, vu le théorème 8, un espace holomorphiquement complet.

(b) Montrons que Z est même h -complet. Utilisant les notations du N° 4, c, β , choisissons N tel que $n+h < t(n, N)$ et posons $z_{i,i}, \dots, i = \hat{z}_i$ pour $0 \leq i \leq h$; soit

$$P_{t(n, N)-h-1} = \left\{ \hat{z} ; \hat{z} \in \mathbb{P}_{t(n, N)}, \hat{z}_i = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq h \right\};$$

$\Lambda_n^N(Z)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{P}_{t(n, N)} - P_{t(n, N)-h-1}$.

Soit P'_h un sous-espace linéaire projectif de dimension h de $\mathbb{P}_{t(n, N)}$ tel que :

- i) $P'_h \subset \mathbb{P}_{t(n, N)} - P_{t(n, N)-h-1}$
- ii) P'_h et $P_{t(n, N)-h-1}$ engendrent $\mathbb{P}_{t(n, N)}$
- iii) $P'_h \cap \Lambda_n^N(Z) = \emptyset$.

Construisons sur $\mathbb{P}_{t(n,N)}^{P'_h} - \mathbb{P}_{t(n,N)-h-1}$ la fonction F analogue à celle considérée en α) ; sa forme de Levi a $t(n,N)-h$ valeurs propres > 0 en tout point de $\mathbb{P}_{t(n,N)}^{P'_h} - \mathbb{P}_{t(n,N)-h-1}$, donc en tout point de $\lambda_n^N(Z)$; la fonction $\varphi = F \circ \lambda_n^N$ correspondante est fortement h -pseudoconvexe dans Z et les sous-ensembles

$$B_c = \{ z ; z \in Z , \varphi(z) < c \} , \quad c \in \mathbb{R}$$

sont relativement compacts dans Z . Donc Z est h -complet. Remarquons toutefois que les sous-ensembles B_c que nous venons de construire n'ont aucune raison d'être strictement h -pseudoconvexes, et que la fonction φ ne permet donc pas de montrer que Z est strictement h -pseudoconvexe.

Exemple 2. Soit maintenant X un sous-espace algébrique (compact) de \mathbb{P}_n , et soit $U = X \cap Z$. Les ouverts $U_i \cap X$, $0 \leq i \leq h$, constituent un recouvrement de Y par $h + 1$ ouverts de Stein, donc $H^{h+i}(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$ et pour tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} dans Y .

En construisant les variétés de Chow relativement à \mathbb{P}_n , on obtient $\mathcal{C}_h^+(U)$ comme sous-ensemble analytique de $\mathcal{C}_h^+(Z)$; comme $\mathcal{C}_h^+(Z)$ est holomorphiquement complet (Exemple 1, β), l'espace analytique A , obtenu en munissant $\mathcal{C}_h^+(U)$ de la structure analytique induite par $\mathcal{C}_h^+(Z)$, est de Stein. L'application naturelle de $\mathcal{C}_h^+(U)$ sur A est un homéomorphisme holomorphe ; d'après [18], $\mathcal{C}_h^+(U)$ est un espace de Stein.

7. L'application $\rho^{(1)}$ pour les variétés algébriques compactes.

Pour définir cette application, nous utiliserons les remarques suivantes :

Remarque 1 . Soit X un espace topologique . Soit $\mathcal{U}=(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . L'application naturelle

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

est injective . Elle est surjective si l'on a $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i \in I$.

C'est un cas particulier du théorème des recouvrements acycliques de J. Leray .

Soit $\mathcal{A}^{r,s}$ le faisceau des germes de formes différentielles indéfiniment différentiables de type (r,s) dans une variété analytique complexe X ; soit $\mathcal{A}_c^{r,s}$ le sous-faisceau des germes de formes différentielles d'' -fermées, et $\Omega^r = \mathcal{A}_c^{r,0}$ le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré r .

Remarque 2 . On a un isomorphisme canonique

$$H^s(X, \mathcal{A}_c^{r,r}) \simeq H^{r+s}(X, \Omega^r) \text{ pour } s \geq 1 .$$

En effet, désignant par d_s la restriction de d'' à $\mathcal{A}_c^{r,r+s}$, on a pour $\mathcal{A}_c^{r,r}$ la résolution finie

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_c^{r,r} \longrightarrow \mathcal{A}_c^{r,r} \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}_c^{r,r+1} \xrightarrow{d_1} \dots \longrightarrow \mathcal{A}_c^{r,r+s} \xrightarrow{d_s} \dots ;$$

pour $s \geq 1$, $H^s(X, \mathcal{A}_c^{r,r})$ est donc canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel de d'' -cohomologie des formes différentielles indéfiniment différentiables de type $(r, r+s)$; la remarque résulte alors du théorème de Dolbeault .

Définition de l'application $\rho^{(1)}$. Soit X une sous-variété algébrique (compacte) non singulière de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Pour tout élément $p \in \mathbb{P}_{n-d-1}$ de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,n-d-1}$ des sous-variétés linéaires de dimension $n-d-1$ de \mathbb{P}_n , soit $Z_p = \mathbb{P}_n - \mathbb{P}_{n-d-1}$ et $U_p = X \cap Z_p$; soit \mathcal{U} le recouvrement de X par les ouverts U_p , $p \in \mathbb{P}_{n,n-d-1}$, et soit \mathcal{C} le recouvrement de $\mathcal{C}_d^+(X)$ par les ouverts $\mathcal{C}_d^+(U_p)$. D'après

l'exemple 2 du N° 6 ,

i) $H^{d+i}(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$, $U \in \mathcal{U}$ et pour tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} dans X ;

ii) \mathcal{C} est un recouvrement de Stein de $\mathcal{C}_d^+(X)$.

Soit $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}_c^{d,d})$ (resp. $Z^1(\mathcal{C}, \mathcal{O})$) l'espace vectoriel des 1-cocycles de \mathcal{U} (resp. \mathcal{C}) à valeurs dans le faisceau $\mathcal{A}_c^{d,d}$ (resp. \mathcal{O}).

Soit α l'application de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}_c^{d,d})$ dans $Z^1(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ qui, à tout

$\varphi_{p,q} \in \Gamma(U_p \cap U_q, \mathcal{A}_c^{d,d})$, fait correspondre

$$\overset{(o)}{\varphi}_{U_p \cap U_q, d}(\varphi_{p,q}) \in \Gamma(\mathcal{C}_d^+(U_p) \cap \mathcal{C}_d^+(U_q), \mathcal{O}) ;$$

à tout cobord, α associe un cobord ; donc α définit une application linéaire

$$\beta : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}_c^{d,d}) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}) .$$

Or, d'après la propriété ii) ci-dessus, $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ est canoniquement isomorphe à $H^1(\mathcal{C}_d^+(X), \mathcal{O})$. D'après la propriété i) ci-dessus et la Remarque 2 , on a $H^1(U, \mathcal{A}_c^{d,d}) = 0$ pour tout $U \in \mathcal{U}$;

d'après la Remarque 1 , $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}_c^{d,d})$ est canoniquement isomorphe à $H^1(X, \mathcal{A}_c^{d,d})$, et celui-ci à $H^{d+1}(X, \Omega^d)$ d'après la Remarque 2 .

Compte-tenu de ces isomorphismes, β définit une application linéaire

$$\overset{(1)}{\rho}_{X,d} : H^{d+1}(X, \Omega^d) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}_d^+(X), \mathcal{O}) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- 0 . A. ANDREOTTI et H. GRAUERT . - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.-Bull. Soc.Math. France. 90, 1962 p. 193-259 .
- 1 . A. ANDREOTTI et R. NARASIMHAN .- A topological property of Runge pairs.- Annals of Mathematics, 76,1962, pp. 499-509 .
- 2 . A ANDREOTTI et F. NORGUET . - Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes .-Anais Acad. Bras. de Ciencias .
- 3 . A. ANDREOTTI et F. NORGUET . - Problèmes de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie -Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa .
- 4 . A. ANDREOTTI et P.SALMON . - Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete .- Monatshefte für Mathematik, t. 61, 1957, pp. 97-142 .
- 5 . A. ANDREOTTI et E. VESENTINI . - Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets .- Séminaire Ehresmann, 4 (1962-63), 1-31, Paris, Secrétariat Mathématique .
- 6 . H. CARTAN . - Variétés analytiques complexes et cohomologie .- Colloque sur les fonctions de plusieurs variables .- Centre belge de recherches mathématiques, 1953 .
- 7 . H. CARTAN . - Quotients of complex analytic spaces .- Contributions to Function Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, pp. 1-15 .
- 8 . H. CARTAN . - Problèmes d'approximation dans la théorie des fonctions analytiques .- Atti della 2a Riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine, 1961, pp. 24-29 .
- 9 . H. GRAUERT . - Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen .- Publications mathématiques de l'I.H.E.S. N° 5', 1960 .
- 10 . H. GRAUERT et R. REMMERT . - Plurisubharmonische Funktionen im komplexen Räumen .- Math. Zeitschr. 65, 1956, pp. 175-194 .

- 11 . H. GRAUERT et R. REMMERT . - Komplexe Räume .- Math. Ann. 136, 1958, pp. 245-318 .
- 12 . H. HIRONAKA . - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero .- Ann. of Math. 79, 1964, pp. 109-326 .
- 13 . W.V.D. HODGE et D. PEDOE . - Methods of Algebraic Geometry .- Cambridge University Press, 1952 .
- 14 . Y.KATZNELSON . - Lectures on several complex variables .- Yale University, 1963-64, multigraphié .
- 15 . K. KODAIRA et G. DE RHAM . - Harmonic integrals .- Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1950, revised 1953.- Princeton, Institute for Advanced Study, 1953, multigraphié .
- 16 . P. LELONG . - Intégration sur un ensemble analytique complexe.- Bull. Soc. Math.France, 85, 1957, pp. 239-262 .
- 17 . P. LELONG . - Eléments positifs d'une algèbre extérieure complexe avec involution .- Séminaire P. Lelong, 4e année, 1962, Exposé 1, 22 pages - Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie, Paris .
- 18 . R. NARASIMHAN . - A note on Stein spaces and their normalisations .- Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962) pp. 327-333 .
- 19 . R. REMMERT . - Reduction of complex spaces .- Seminars on analytic functions, Volume 1 , pp. 190-205, Princeton, Institute for advanced Study, 1957, (multigraphié).
- 20 . R. REMMERT . - Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume .- Math. Annalen, 133, 1957, p. 328-370 .
- 21 . J.P. SERRE . - Faisceaux algébriques cohérents .- Ann.of Math. 61, 1955, pp. 197-278 .
- 22 . G. SORANI . - Homologie des q-paires de Runge .- Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie 3 , vol. 17 , 1963, pp. 319-332 .
- 23 . K. STEIN . - Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume .- Archiv der Mathematik, 7 , 1956, pp. 354-361 .

24 . O. ZARISKI . - The second summer institute .- Bull. Amer.Math.Soc.
62, 1956, 129 .

Istituto Matematico "Leonida Tonelli"
Università di Pisa .

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire associé au C.N.R.S
Palais Universitaire
Strasbourg

