FRANÇOISE BOSCHET
ALINE ROBERT

Ingénierie didactique sur les suites numériques après le baccalauréat

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 2
« Séminaires de mathématiques - science, histoire et société contemporaine », , p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983___2_A6_0>

Cahier de didactique des Mathématiques n°4

INGENERIE DIDACIQUE SUR LES SUITES NUMERIQUES

APRES LE BACCALAUREAT

par Françoise BOSCHET (Paris VII)

et Aline ROBERT (Paris VI)

PROPOSITIONS (NON SUIVIES D'EVALUATION) POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA CONVERGENCE DES SUITES NUMERIQUES EN PREMIERE ANNEE DE 1ER CYCLE

Tout le monde, ou presque, exprime des insatisfactions, à des degrés divers, quant à l'enseignement des mathématiques (à tous les niveaux).
Un des objectifs de la didactique des mathématiques, me semble-t-il, est d'apporter aux enseignants des moyens d'aborder plus "scientifiquement" les rapports entre enseignement et apprentissage. Précisément dans cet article, je voudrais exposer le cheminement qui m'a amenée à proposer quelques séquences d'enseignement de la notion de convergence des suites numériques en première année de premier cycle universitaire S.S.M. (1) (DEUG 1). Avant de décrire les choix que j'ai faits pour élaborer ces séquences et de présenter celles-ci (2), je vais résumer, en les analysant brièvement, certains éléments que j'ai mis en évidence sur l'acquisition de la notion. Par contre, je ne rappellerai ici ni le contenu des études dont on dispose sur l'élaboration historique de la notion (3), ni les résultats sur son enseignement actuel que F. Boschet a obtenu par son étude (4) des manuels, des cours, des exercices, etc ..., ni les résultats généraux de didactique des mathématiques sur les rapports entre enseignement et apprentissage ou sur l'ingenierie didactique (5).

---

(1) Sciences et Structure de la Matière.

(2) L'élaboration "concrète" a été faite en collaboration avec F. Boschet.

(3) Cf. M.C. Bour [1] , Cornu [1],[2], ...

(4) Cf. F. Boschet [1] .

(5) Cf. Revue "Recherches en didactique des mathématiques", Vol. I à II. Editions "La Pensée Sauvage".

1. Eléments sur l'acquisition de la notion.

J'ai en effet repéré, dans une étude préalable (1), des régularités sur l'acquisition de la notion valides par delà la diversité des enseignants et des enseignements: erreurs fugitives, erreurs tenaces (résistant aux corrections), représentations sur la convergence exprimées par ceux qui réussissent et par les autres. Rien n'a été obtenu sur le rapport "individuel" enseignement-apprentissage, si ce n'est l'indication d'une certaine variabilité, dans les limites des régularités (statistiques) ci-dessus.

On peut résumer ces régularités de la façon suivante:

1) Au niveau des représentations que les étudiants expriment (2) sur la convergence des suites numériques, on a relevé trois grands types :

Les représentations dynamiques (où "converger" est décrit comme "se rapprocher de") sont des représentations en termes "d'action".

Elles sont présentes dès le début de l'enseignement de la notion (3), et on peut penser que leur apparition est favorisée par le vocabulaire oral usuel très dynamique (4) ou même par certaines gestuelles expressives au tableau. Ces représentations ne sont pas erronées, mais ne sont pas précises, et ne peuvent amener à la définition de la convergence sans transformation. En particulier, si on essaie de formaliser une représentation dynamique du type "u_n se rapproche de ℓ ", on peut arriver par exemple à une première transformation du type "l'écart entre

---

(1) Cf. A. Robert [1],[2],[3].

(2) En réponse à la question "Comment expliqueriez-vous ce qu'est une suite convergente à un élève de 14-15 ans ?".

(3) Cf. chez les enfants "la droite qui va de O à A " est une formulation antérieure à "la droite OA", in Thèse C. Laborde [1].

(4) Cf. F. Boschet [1].

u_n et ℓ diminue", ce qui n'est pas encore formalisable directement. D'autres transformations pourraient être dangereuses à cause de l'introduction d'une idée de monotonie qui n'est pas nécessairement présente initialement, ainsi "l'écart entre u_n et ℓ décroît (vers 0)". Cependant, l'expérience montre qu'aucune de ces transformations visant à la formalisation ou au moins à une formulation plus précise ne vient à l'idée des étudiants.
On peut encore souligner que ce sont les représentations dynamiques (et monotones) qui sont apparues, historiquement, dans les premières descriptions écrites de la convergence (des séries - cf. d'Alembert in Bour [1]).

Les représentations statiques, au contraire, sont des formulations en langue naturelle de la définition formalisée de la convergence d'une suite (1), formulations toujours géométriques, plus ou moins éloignées de la formalisation du type "Tout intervalle autour de la limite contient tous les u_n sauf un nombre fini".
Enfin, on a trouvé, en DEUG, un certain nombre de représentations erronées parce-que trop partielles -représentations monotones où "converger" est assimilé à "être monotone bornée", ou archaïques où le mot limite est interprété avec son sens français de barrière ...
Il est clair que ces représentations ne sont pas fausses -il y a des suites convergentes monotones bornées, stationnaires, etc ... ; en fait, ces modèles trop partiels ne doivent pas être rejetés mais englobés dans une conception plus exacte. On peut faire des hypothèses sur l'origine de ces représentations: tout se passe comme si toutes ces conceptions étaient issues de l'expérience des suites convergentes qu'ont les élèves; or, dans ce domaine, il est difficile de parler d'expérience

---

(1) Par exemple, si ℓ est la limite de la suite (u_n) : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$
$\forall n > N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$.

"fausse", il peut seulement n'y avoir pas d'expérience du tout (alors on va adopter le sens français du mot "limite") ou des expériences insuffisantes (suites monotones exclusivement p.e.).

2) Il s'avère que ce sont les étudiants qui ont exprimé une représentation statique (associée ou non à une représentation dynamique) qui ont réalisé les meilleures performances, et ceci quelles que soient les tâches sur la convergence à effectuer, que ces tâches mobilisent ou non l'usage de la définition en (ε,N) . Les étudiants qui n'expriment qu'une représentation dynamique, qui n'ont donc pas remplacé leur modèle initial ("spontané") par un modèle plus élaboré ne sont pas discriminés par leur conception (il y en a autant de "bons" que de "mauvais"). Par contre, ceux qui ont gardé un modèle monotone ou archaïque réalisent de mauvaises performances.

3) Nous avons rencontré un certain nombre d'erreurs du type "la fin justifie les moyens" (1) - qui nous semblent "fugitives" (c'est-à-dire qui disparaissent petit à petit après les corrections). Nous n'avons pu vérifier complètement ce caractère fugitif, vu le carcatère synchronique de notre étude.
Il s'agit des transformations ou tronquages de théorèmes ou définitions réalisées sous une pression conjoncturelle -le même théorème pouvant figurer sous deux "versions" différentes dans deux exercices, pour un même élève-, ainsi dans le critère de Cauchy, on fait intervenir $(u_{n+1} - u_n)$, on oublie le

---

(1) Soulignons que les types d'erreurs que nous allons décrire ne sont pas disjoints, ainsi, un étudiant interrogé sur pourquoi il avait écrit $u_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ au cours d'une démonstration (erreur de type 5), m'a dit " mais, c'est parce que ça m'arrange !".

présupposé d'existence des limites dans les théorèmes algébriques, ou encore on intervertit l'hypothèse et la conclusion dans le théorème des suites extraites, etc ...

4) Il est par contre un type d'erreurs qui nous semble beaucoup plus tenace, c'est l'oubli du caractère variable de n . Nous voulons pour preuve de cette ténacité le fait que, même en maîtrise, on retrouve ce genre d'erreurs, dans le cas plus complexe, il est vrai, où il y a deux occurrences de n comme dans u_n^n (traité comme $u_n^{n_o}$ ou $u_{n_o}^n$ suivant les cas avec n_o fixé momentanément éventuellement). En DEUG, nous avons relevé cet oubli dans des erreurs type "reconnaissance des formes" comme celle-ci : On rencontre la formule

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |u_n - \frac{1}{n}| < \varepsilon$$

et on déduit $\lim u_n = \frac{1}{n}$, en s'inspirant d'un décalque de la forme de la définition en (ε,N) dans lequel on ne tient pas compte des signifiés formalisés ici : ces erreurs ont l'air de correspondre, momentanément en tout cas, à une perte de sens.

Il en est de même de celle-ci, où la suite (nu_n) a pour limite 1 :

$$\lim (nu_n) = n \lim u_n = 1 \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{n} \ .$$

On retrouve d'ailleurs ce type d'erreurs au moment de l'étude de la convergence uniforme des suites de fonctions (DEUG II). La collègue (1) qui fait cette étude m'a communiqué par exemple l'erreur suivante, qu'elle a relevé (dans un problème) chez plus de 3/4 des étudiants d'une section de DEUG II préparant plus spécialement aux études mathématiques : on avait une suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n^2x}{n^3x+1}$; les étudiants ont écrit "cette suite converge vers 0 sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{n^3}\}$" ...

---

(1) J. Robinet - communication privée.

On a le même oubli dans des erreurs moins importantes pour le déroulement de la démonstration (que j'ai appelé "muettes" pour cette raison), mais tout aussi symptomatiques, comme celle-ci :

"On pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n}$ ... "

Les interprétations de ce type d'erreurs en seuls termes logiques nous semblent insuffisantes, dans la mesure où chez la plupart des étudiants la variable n est mutifiée par un "$n \to \infty$" (symbolique ?) placé en dessous du lim. Cependant, il est certain que la "variable x" est mieux identifiée comme telle que la variable n (1), mais, à mon sens, sans que cela soit seulement dû, encore une fois, aux écritures des enseignants et des manuels.

5) Il est des erreurs vraisemblablement plus caractéristiques de l'analyse que de la seule convergence des suites numériques, comme le recours (mal adapté) systématique à des procédures de type algébrique ou algorithmique (2). Cela pose le problème de travail sur une notion isolée comme celle qui nous intéresse ici : il est très vraisemblable que seul un travail sur tout le champ conceptuel concerné réussisse à "changer" les réflexes des étudiants.

6) Nous n'avons que rarement rencontré des erreurs témoignant directement de lacunes antérieures. Cependant, un travail sur les prérequis supposés des étudiants en première année (3) de DEUG confirme que si les connaissances qu'on leur suppose sur $\mathbb{R}$ (calculs sur les décimaux, valeur absolue, ordre sans

---

(1) J'ai posé à un certain nombre d'étudiants l'exercice $\lim_{x \to \infty} x\, f(x) = 1$ et la répartition a été meilleure que pour $\lim n\ u_n = 1$.

(2) De nombreux auteurs ont étudié et souligné ce fait comme Glaeser, Barra et le groupe "causes d'échecs et d'erreurs en analyse", etc ...

(3) Cf. prétest, Annexe [1].

notion de borne supérieure) et sur les fonctions élémentaires sont en général effectivement en place, par contre, on note de grandes inégalités sur leur capacité technique de formalisation. J'avais élaboré, pour étudier les acquis des étudiants en début de première année de DEUG, un prétest. Sur les premiers dépouillements qui ne concernent que deux groupes de TD (mais où le prétest a été proposé plus de 3 mois après le début des cours), on peut confirmer un certain nombre de ces difficultés à formaliser.

Par exemple, à la question suivante, pour se limiter à un cas très simple : "Formaliser la phrase: étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tout intervalle de $\mathbb{R}$ de centre 0 contient un élément de la suite", ceux qui abordent la question (c'est-à-dire au mieux la moitié des effectifs) écrivent, pour tout intervalle $[-a,a]$ ou bien ... $\exists u$, $u \in [-a,a]$, ou bien ... $\exists u_n$, $u_n \in [-a,a]$, ou enfin (seulement dans un des groupes) $\exists n$, $u_n \in [-a,a]$.

Il y a là une identification de la variable sur laquelle porte le quantificateur qui pourrait, éventuellement, faire l'objet d'une intervention spécifique de l'enseignant.

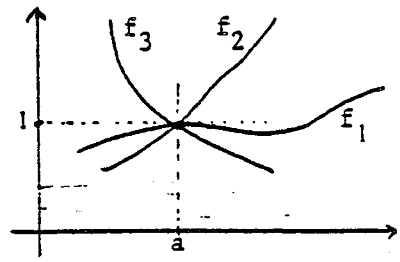
De même, à la question : "Trouver $A = \{x; \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon\}$" , sur les 24 copies d'un des groupes, je n'ai trouvé que une réponse correcte; de plus, lorsqu'on remplace dans la question ε par $\frac{1}{10^n}$, les résultats sont à peine meilleur (4 réponses correctes sur les 18 copies de l'autre groupe). Ceci peut suggérer qu'un certain travail pourrait être fait de manière à ce que les étudiants arrivent à attacher un signifié à cet "ε" qu'ils manipulent de toutes façons !

Le même prétest confirme aussi la difficulté pour les étudiants à donner un sens à des "phrases" formalisées, même très simples, et en particulier à attribuer à l'ordre d'écriture des quantificateurs son importance. Ainsi, sur les 10 réponses (obtenues sur 18 copies) aux questions suivantes :

"Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les propriétés suivantes a) $\forall i \ (1 \leqslant i \leqslant 3, \exists a \ (a \in \mathbb{R}) \ f_i(a)=1$,

c) $\forall a \ (a \in \mathbb{R}), \exists i \ (1 \leqslant i \leqslant 3) \ f_i(a)=1$ " .

huit consistent à écrire que a) et c) sont les mêmes et à dessiner :



Par contre les questions "b) $\exists i \ (1 \leqslant i \leqslant 3), \forall a \ (a \in \mathbb{R}) \ f_i(a)=1$,

d) $\forall a \ (a \in \mathbb{R}), \exists i \ (1 \leqslant i \leqslant 3) \ f_i(a)=1$ " .

sont moins abordées (8 réponses) mais toujours distinguées.

On peut supposer tout de même que l'apprentissage de l'usage de la formalisation en toute connaissance de sens va progresser au moment même de l'apprentissage de la convergence des suites; on peut aussi se demander si un seuil minimum initial (technique) n'est pas nécessaire. Un travail préliminaire peut d'ailleurs avoir lieu au cours du prétest cité plus haut.

II. Hypothèses sur le rapport enseignement-apprentissage de la convergence des suites.

Ainsi, il y a finalement deux éléments, plus ou moins spécifiques de la notion visée, sur lesquels on aurait envie d'agir, toutes choses égales par ailleurs (dans un premier temps du moins): les représentations d'une part et la prise en compte du caractère variable de n d'autre part.

Dans la mesure où ce dernier facteur est lié à une prise en compte du sens de la notion de convergence, je me suis attachée à me poser d'abord la question de la bonne transmission du sens de la notion, avant celle de sa formalisation.

J'ai fait l'hypothèse didactique qu'une manière de restituer son sens à la notion était d'en mettre en place une "bonne" représentation. Il y a bien là une intervention spécifique à avoir puisque nous avons vu justement que cette bonne représentation n'enrichit pas nécessairement chez tous les étudiants leur conception initiale, dans l'enseignement actuel (1)
Je me suis donc fixé comme objectif d'enseignement (1) d'élaborer des séquences permettant la mise en place (rapide) (2) d'une représentation statique en plus de la représentation dynamique initiale. Nous avons remarqué que la représentation statique peut être envisagée comme associée à une traduction en image de la définition en (ε,N) . Il en résulte qu'une première tentative (3), pour atteindre mon but, a été de chercher des problèmes (situation-problème) dont la résolution passe nécessairement par l'usage de la définition et qu'on proposerait (avant le cours correspondant) aux étudiants, ces problèmes devant pouvoir être abordés avec les acquis antérieurs. Malheureusement, les problèmes à notre disposition pour ce faire sont peu nombreux et beaucoup trop techniques pour être proposés d'emblée aux étudiants. Je pense au lemme de l'escalier, au lemme de Cesaro, etc ... Nous devions donc renoncer au schéma traditionnel. Nous l'avons remplacé par le schéma "parallèle" suivant :

Nous appuyant sur une représentation initiale dynamique explicitée (avant tout cours sur la convergence des suites), où "converger" est interprété momentanément comme "se rapprocher de", nous faisons d'abord agir pour faire constater

---

(1) En DEUG.

(2) Tôt.

(3) Par analogie avec ce qui a été fait avec succès dans le primaire, par exemple, où pour introduire un nouveau concept, on fait travailler les élèves sur un problème ouvert, qu'ils peuvent aborder néanmoins, et qui les amène à retrouver, dans son fonctionnement, une partie du concept visé.

la coïncidence entre la convergence en ce sens et le fait pour une suite d'avoir (1) la propriété suivante : il existe un nombre ℓ tel que la différence entre u_n et ℓ peut être rendue plus petite qu'un nombre donné à l'avance.

Autrement dit, nous introduisons une formulation "numérique" (2) de la définition en (ε,N); nous avons choisi,pour ce faire ces constats, le cadre des représentations graphiques qui nous semble aussi très propice à faire exprimer une représentation dynamique. Nous donnons ensuite une situation notée S où cette représentation permet de deviner le résultat, mais ne permet pas de le démontrer au sens habituel, dans la mesure où il manque une définition de la convergence et où la représentation dynamique n'est pas formalisable par les étudiants (cf. supra). C'est à ce moment là que nous introduisons magistralement (c'est l'enseignant qui le fait) la définition dans sa version formalisée avec reprise de la formulation "numérique" et introduction de la formulation géométrique (en termes d'intervalles); ceci doit être accompagné de longs commentaires et dialogues avec la classe sur la signification des symboles et les multiples jeux de traduction et doit intégrer (3) la correction de ce qui précède. Cette séance, type séance d'exercices (T.D), précède le cours complet sur les suites (servant d'institutionnalisation). Nous continuons ensuite en séances d'exercices en renforçant le fragile acquis (?) par un problème du même type que la situation (S) . Cela étant, nous nous appuyons aussi sur les hypothèses complemen-

---

(1) Sans que cette propriété soit démontrée, simplement par constat.

(2) Où le futur "ε" a son statut concret initial de nombre très petit (négligeable), (Cf. J.L. Verley qui m'a éclairé sur ce point d'histoire).

(3) A ce sujet, un travail est effectué en ce moment par Mme Boschet pour préciser, en particulier, quel peut être le rôle de la formalisation dans l'apprentissage de la notion.

taires (non disjonctives) suivantes, qui ne sont plus spécifiques de la notion visée, mais qui peuvent s'y adapter :

D'abord l'idée qu' "il faut prévenir pour guérir" en proposant dès la première séquence un exercice destiné à enlever le caractère monotone éventuellement attaché aux représentations dynamiques initiales -avec l'intention de pouvoir y faire référence, le cas échéant, lors de la production ultérieure de cette erreur. De même, dès la deuxième séance, on demande d'exhiber un produit convergent d'une suite divergente et d'une suite convergente (1) .

Ensuite, l'idée de préparer quelques exercices complexes (2) par des exercices simples, posés avant, et "faisant partie" de la résolution des premiers. Mais, attention, ce n'est pas le concept que l'on simplifie -il est présent à part entière dans les exercices simples- mais seulement le nombre d'opérations de pensée à effectuer pour arriver à la solution.

Enfin, l'idée que pour déstabiliser, puis supprimer, une "connaissance" erronée" plus résistante (obstacle ?), il peut être plus efficace de faire fonctionner un "conflit socio-cognitif" (3) entre élèves que de corriger toujours soi-même. Ces conflits sont favorisés, me semble-t-il, par des énoncés ouverts: j'ai choisi des exercices du tvoe "vrai ou faux" qui sont à résoudre par groupe de deux (une seule rédaction par groupe étant explicitement attendue). En particulier, nous faisons intervenir ce type d'exercices pour "chasser le monotone" du dynamique, pour la prise de conscience de l'insuffisance de la représentation dynamique pour ce qui est de démontrer, et pour prévenir l'oubli des présupposés d'existence de limites dans les théorèmes algébriques.

---

(1) Contre-exemple destiné à prévenir de l'erreur sur l'oubli des présupposés d'existence de limites dans les théorèmes algébriques.

(2) En l'occurrence, le lemme de Cesaro.

(3) Cf. Doise et Mugny [1].

III. Ingenierie didactique (élaboration des séquences) et séquences.

Les deux séquences que j'ai élaborées à partir de ces hypothèses (la première devant avoir lieu avant le cours et la seconde après) n'ont aucune prétention à une quelconque "unicité"; elles ne sont pas les seules à répondre aux objectifs que nous nous sommes fixés (1); mais nous faisons l'hypothèse importante qu'elles mettent effectivement en oeuvre, et de façon essentielle, les hypothèses précédentes. De plus, ces séquences ne sont complètes que si elles sont accompagnées de l'intervention de l'enseignant (à la fin de la première) sur la définition. C'est pourquoi j'ai joint une "feuille d'indications", destinée aux enseignants, qui fait partie de la séquence autant que les exercices eux-mêmes. Voici ces deux séquences, la deuxième nécessitant à l'évidence plusieurs séances de deux heures, et la première étant prévue pour durer -intervention magistrale comprise- deux heures; rappelons enfin que lors de cette séance, les étudiants sont impérativement supposés travailler par groupe de deux, comme l'indique le "mode d'emploi".

---

(1) Ainsi, les 10 premières suites à dessiner ont été choisies parmi les suites convergentes (resp. divergentes) de divers types, sans autre objectif que de couvrir une bonne partie des cas possibles.

SEQUENCE n° 1
(avant le cours)

I. Représenter graphiquement les suites de terme général suivant:

1. $u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées: une unité = 2cm.)
2. $u_n = (-1)^n$
3. $u_n = \frac{1}{n}\cos n$ 3'. $u_n = \frac{1}{n}|\cos n|$

   Attention, sur les calculettes, n en radian!
4. $u_n = \cos n$
5. $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = -1$, $u_n = 2$ pour tout $n \geqslant 5$.
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées: une unité = 10cm.)
7. $u_n = \cos n\frac{\pi}{6}$
8. $u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ (échelle sur l'axe des ordonnées: une unité=10cm.)

   Attention, sur les calculettes, n en radian!
9. $u_n = n^2+1$
10. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ $(n \geqslant 2)$

II. Pouvez-vous classer ces dessins? Rédigez rapidement les critères permettant vos classements.

III. Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l et un ~~rang~~ entier n à partir du quel $|u_n - l|$ reste inférieure à $\frac{1}{10}$ $\left(\frac{1}{100}\right)$; mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

IV. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux? Justifier vos réponses par écrit.

i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

I. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux?

iii) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.

iv) Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

II. Montrer que si, étant donnés une suite numérique (u_n) et l un nombre réel, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors la suite u_n converge vers l.

III. Que peut-on dire de (u_{n-2}) si (u_n) converge?

VI. Etudier la suite de terme général $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$.

V. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$\forall a < 1,\ \exists N,\ \forall n > N\ |u_n - l| < a$

est convergente?

VI. Construire une suite de terme général $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que une des deux suites (v_n) ou (w_n) diverge.

VII. Etudier les suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

VIII. Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que

$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

et qui diverge.

IX. a) Encadrer la suite (u_n) telle que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$

b) Que pouvez-vous en déduire ?

X. Que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie

$\lim_{n \to +\infty} n u_n = 0$.

XI. Que peut-on dire d'une suite (u_n) qui vérifie

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$?

Application : étudier la suite $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}$

XII. Suites récurrentes (un certain nombre)...

XIII. Etablir le lemme de Césaro avec une application.

XIV Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction réelle par : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1 et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) a une limite qui est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Indications sur la première séquence.

Il faut être muni de calculettes avec lignes trigonométriques.

PREMIERE SEQUENCE

Elle est prévue AVANT toute intervention de type magistrale.

Faire travailler les étudiants par groupe de 2 pour se partager les dessins .On peut diviser les 10 suites en les 5 premières et les autres.
Dans la mesure du possible constituer les groupes avec des étudiants de niveau pas très éloignés mais pas égaux!

Préciser qu'on attend des dessins séparés. Le cas échéant,leur dire de représenter entre 8 et 10 points par suite.
On s'attend à une représentation cartésienne.

Au moment du classement,effectué collectivement par chaque groupe, on voit apparaître généralement 2 sortes de critères:l'allure des suites et leur éventuel comportement à l'infini.
Si ce dernier n'apparaît pas on le provoque en faisant expliciter le modèle dynamique.On ne fait qu'un commentaire sur le classement:on se met d'accord sur le fait que converger peut se traduire en première approximation par "se rapprocher de".

Les réponses aux i) et ii) doivent être élaborées collectivement,par les mêmes groupes d'étudiants.Une seule justification par groupe est demandée Dans les bons cas,il y a toujours un des 2 membres du groupe qui trouve un contre-exemple (dessiné avant par exemple) et qui convainc le groupe. Pour le ii),ils pensent tous que c'est vrai mais n'arrivent pas à le démontrer.

C'EST ALORS ....QU'INTERVIENT L'INTERVENTION DU MAITRE(PENDANT LA SEANCE) ON INTRODUIT LA DEFINITION DE LA CONVERGENCE EN PASSANT DE L'EXPRESSION DYNAMIQUE DEJA RETENUE À LA FORMULATION NUMERIQUE PUIS À LA FORMALISATION DANS LA QUELLE ON INSISTE SUR LE JEU DES TRADUCTIONS PUIS À LA FORMULATION GEOMETRIQUE POUR LA QUELLE ENCORE ON REVIENT SUR LE JEU DES TRADUCTIONS.
On revient alors sur le i) pour "chasser le monotone" et on peut revenir sur le classement en soulignant au passage le changement de contrat par rapport aux fonctions.Ce n'est plus l'allure qui nous intéresse mais seulement (en général) le comportement quand $n \to +\infty$., d'où représentation sur un seul axe des u_n.

COURS

DEUXIEME SEQUENCE

Avant de décrire les premières expériences qui ont été faites, il faut souligner qu'il y a eu une dialectique, qui fait partie de l'ingénierie didactique, entre le passage des séquences et leur mise en forme définitive (1) ; ce n'est que lors du dernier passage (5ème) qu'on a atteint la "stabilité", c'est-à-dire qu'aucune modification n'est intervenue après l'expérience, ni dans le texte des séquences, ni dans les indications aux enseignants. D'autre part, la deuxième séquence n'a jamais été passée "in extenso" -de toutes façons, les séances pratiques sur les suites numériques comportent en général beaucoup plus d'exèrcices que ceux que j'ai évoqués dans cette séquence; il n'était pas dans mon intention d'élaborer entièrement une suite de séquences couvrant tout l'enseignement des suites, faute d'hypothèses didactiques suffisantes, en particulier sur le rapport entre l'enseignement correspondant aux séances plus techniques et l'apprentissage correspondant. Dans la mesure où cela fait partie de l'ingénierie didactique, je vais brièvement passer en revue les changements intervenus dans les séquences au cours des premières expériences.

D'abord, ce sont les premiers essais de passages de la première séquence qui m'ont amené à demander aux enseignants, dans leurs interventions pendant la séance, d'introduire systématiquement une remarque sur l'étude des fonctions et l'étude des suites. En effet, les étudiants dessinaient toujours leurs suites dans un repère (Ox,Oy) -même si les indications d'échelle sur l'axe Oy n'étaient pas données (2) et dans leurs classements apparaissent souvent comme critères et l'allure globale des suites et leur comportement "à l'infini". Ils sont encore dans le contrat "étude de fonctions", bien que certaines suites ne soient pas apparemment des restrictions à $\mathbb{N}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut leur expliquer que ce qui est visé par le texte "étudier une suite",

---

(1) Ci-jointe.

(2) Comme c'était le cas dans la première mouture.

c'est en général seulement sa convergence, et que dans ces conditions on peut avoir intérêt à ne représenter qu'un axe sur lequel on place les valeurs $\{u_n\}$; ce qu'on étudie $(n \to \infty)$, au lieu d'être nécessairement en dehors du graphe [(1)], se trouve alors au milieu de ce qu'on représente.

Une autre remarque s'est imposée, vu ce qui s'est passé lors de toutes les passations de ces séquences, qui a aussi trait au contrat didactique entre les étudiants et l'assistant, en séance de T.D. C'est que les étudiants n'ont pas l'habitude de travailler sur des concepts qui n'ont pas encore été définis "proprement", et qu'ils ne réalisent pas toujours l'importance dans ce cas de l'institutionnalisation qui doit suivre immédiatement leurs actions pour rendre efficace ce type d'approche. Ils n'ont donc pas nécessairement l'écoute indispensable à ce moment-là, dans la mesure où c'est l'assistant qui "raconte ses commentaires". On sait bien qu'en cours magistral, déjà, leur écoute est souvent peu satisfaisante, spécialement en ce qui concerne l'heuristique [(2)] ...

Il y a là un changement de contrat dans la méthode de travail, qu'il faut peut-être expliciter, et qui explique l'importance que j'accorde à la feuille d'indications (élaborée après coup).

En fait, ce changement de contrat concerne autant les enseignants que les étudiants, et on peut penser que ce n'est que lorsque les enseignants l'auront "intégré" que les étudiants pourront en bénéficier.

D'autres changements plus mineurs sont intervenus [(3)] -par exemple, nous nous sommes arrangées pour que, dans les 10 suites à dessiner, on puisse séparer les 5 premières et les 5 dernières (à dessiner respectivement par chaque

---

(1) "Dans la pièce à côté" comme disait une collègue chez qui nous avons observé.

(2) Par exemple, ils n'écrivent rien à ce moment-là, pas plus qu'à la phase d'institutionnalisation de la séquence.

(3) Je n'indique ici que l'essentiel.

membre d'un groupe donné [1]) et que ces deux paquets contiennent chacun un contre-exemple pouvant servir au 3) i), l'ordre initial des suites à dessiner étant différent. Nous avons aussi rajouté une suite stationnaire dont une des valeurs est supérieure à la valeur limite, à cause d'une confusion qui est apparue dans un des groupes expérimentaux entre limite de la suite (u_n) et borne supérieure de l'ensemble $\{u_n\}$. Nous avons rajouté les indications d'échelle et celle sur "n en radian", car beaucoup d'étudiants perdaient du temps sur les dessins, faute de ces précisions. Enfin, la partie III n'était pas programmée dans les premières moutures, alors que les 4 exercices "vrai ou faux" y étaient prévus; ce sont des questions de fond (rôle de la formulation numérique) et des questions de temps (nécessité de garder une demi-heure pour l'intervention magistrale en fin de séance) qui nous ont conduit à la forme "définitive" présentée ci-dessus. Soulignons le rôle du temps dans notre première séance; il est clair qu'il faut s'assurer que tout "tient" en une heure et demie puisque le plus important est la dialectique entre ce que les étudiants ont fait au début et ce que dit l'enseignant à la fin. Il semble impossible de s'assurer d'une durée moyenne de passage correcte sans effectivement réaliser à titre de pré-expérience ce passage, d'où l'importance de cette phase en ingenierie didactique.

IV. Description qualitative des premières expériences [2].

On ne s'est pas encore donné les moyens, vu la nécessité de mise en place des

---

(1) En réalité, souvent, ils dessinent ensemble - un utilisant la calculette et l'autre représentant les points graphiquement.

(2) 2 fois en Sup C, 2 fois en DEUG I, en ce qui concerne la première séquence (éventuellement légèrement différente de la séquence définitive) et le début de la deuxième, plus une fois, à titre indicatif, en DEUG Instituteur.

séquences soulignée plus haut, de faire une expérience "complète" avec pré-test, post-test et groupe témoin -j'y reviendrai.

On peut déjà cependant tirer quelques conclusions de cette pré expérimentation, outre les modifications des séquences déjà évoquées.

D'une part, l'émergence des expressions dynamiques pour caractériser les suites qui convergent par rapport aux autres s'est vérifiée sans exception à chaque fois.

D'autre part, le conflit socio-cognitif attendu en IV i) a toujours eu lieu, avec des résultats un peu différents selon les cas. Dans certains classes (1), la distribution des étudiants par binôme a été très favorable et a permis la résolution efficace du conflit dans chaque groupe de deux, l'étudiant défendant initialement la position erronée étant convaincu par son camarade exhibant l'exemple adéquat dessiné en première partie. Ailleurs, certains groupes sont restés sur une opinion fausse, faute de conflit ! Dans l'ensemble, le résultat juste diffuse, au bout d'un certain temps, mais on peut s'interroger sur l'efficacité de cette diffusion lorsqu'elle est extérieure aux groupes de deux.

Les réactions au IV ii) ont été tout-à-fait celles qu'on attendait; par contre, et c'est là une grosse difficulté de la séquence (2), les interventions magistrales devant clore la première séquence n'ont pas été menées efficacement dans beaucoup de cas -ou bien, elles n'ont pas eu lieu séance tenante, et l'expérience a montré que deux jours après, l'effet attendu est perdu; ou bien elles n'ont pas été reçu comme une institutionnalisation, et souvent même, les deux facteurs sont intervenus simultanément. Cela pose nettement encore une fois le problème de la transmission des séquences didactiques à des enseignants pourtant totalement convaincus, mais qui ne sont pas les auteurs de leurs séances d'enseignement ...

---

(1) Celles où les dessins ont été faits le plus sérieusement.

(2) Et de l'évaluation de son caractère bénéfique dans l'état actuel des choses ...

Enfin, et par là même, pour ce qui est de l'objectif attendu (établissement de représentations statiques), il est très difficile de se prononcer en l'état actuel des expériences (trop peu de deuxièmes séquences, trop de premières séquences pas au point [1]). De plus, vraisemblablement, il faudra procéder à des interviews pour se rendre compte. Mais, de toutes façons, même si on confirme l'apparition d'une telle représentation après la séquence, la disparition des représentations monotones, une régression de l'oubli du caractère variable de n , la vraie "réussite" de notre séquence résiderait dans le constat de la durabilité de ces acquis, et ceci est encore plus difficile à repérer.

V. En guise de conclusion : l'évaluation du travail.

Nous venons d'évoquer partiellement ci-dessus la difficulté d'évaluer le bénéfice d'une intervention "isolée" (2 séquences) dans la mesure où ce bénéfice doit être durable et même, phénomène bien connu des enseignants, peut intervenir plus tard.

Ceci dit, notre évaluation du travail n'est pas l'évaluation habituelle dans les travaux de psychologie.

En effet, c'est l'ensemble de notre démarche qui est à prendre en compte dans l'évaluation, et non la simple réussite en tant que telle à certaines tâches. Nous faisons une étude préalable de la notion à enseigner, et nous en déduisons des choix de variables didactiques (éventuellement [2] à faire varier dans un certain domaine également fixé par nous); nous construisons ensuite des séquences dans lesquelles nous estimons que ce sont les choix précédents qui sont essentiellement à l'oeuvre; nous postulons enfin qu'après l'enseignement qui en

---

(1) En particulier, les post-tests n'ont pas toute leur valeur puisque les conditions de déroulement des séquences n'étaient pas les "bonnes" !

(2) Pas dans notre cas particulier.

résulte se seront mis en place chez les élèves [1] un certain nombre de représentations et de comportements correspondant à un certain apprentissage. Ce que nous voulons évaluer dans ces conditions, ce sont les comportements, non pas en eux-mêmes, mais en ce qu'ils sont le résultat de nos prévisions [2]; autrement dit, nous avons mis en jeu des hypothèses de toutes sortes (cognitives, épistémologiques, ou de type ingenierie), et nous devons vérifier que le résultat (global) est effectivement conforme à ce qui était attendu. Dans notre cas particulier, ces prévisions sont la mise en place accélérée d'une représentation statique, l'élimination des émergences monotones des modèles dynamiques et la possinilité d'éliminer l'erreur de l'oubli du caractère variable de n . Cela étant, reste la question du comment évaluer ces prévisions ? Cela nous semble d'autant plus facile qu'il nous apparaît au contraire très difficile, si ce n'est illusoire, d'évaluer un apprentissage dans toute sa complexité. En effet, au moyen de post tests, ou d'entretiens, ou au cours même d'une séquence, on peut vérifier que telle conduite a été adoptée devant telle tâche précise. Or, nos prévisions peuvent être exprimées en de tels termes de comportements précis. Par contre, nous ne pourrons pas découper notre travail "en tranches" et affirmer que c'est telle séquence qui a amené telle acquisition. Nous pourrons seulement présenter une démarche globale -à tel enseignement, et pour telles raisons, doit correspondre telles conduites dont nous estimons qu'elles témoignent de l'apprentissage visé.

Il est possible, dans le cas des suites, de présenter des hypothèses d'enseignement [3] radicalement opposées, comme, par exemple, de suggérer de privilégier

---

(1) Majoritairement.

(2) C'est ce que Brousseau exprime depuis des années en terme de reproductibilité.

(3) Au niveau DEUG.

l'action sur les suites très longtemps (cf. manipulations avec calculettes) avant l'introduction de toute formalisation.

On peut aussi suggérer[1] un enseignement de la convergence des suites où on n'essaierait même pas d'introduire (de quelque manière que ce soit) la définition en (ε,N) -ne visant qu'à faire fonctionner les théorèmes utiles dans les exercices classiques (suites monotones bornées, suites explicites, suites récurrentes). Ceci présente l'inconvénient majeur à mes yeux d'estomper une des grandes sources de difficultés de la notion (n variable, n tendant vers l'infini), et donc de renforcer les erreurs téjà tenaces du type "oubli du caractère variable de n " .

Voilà le type de débat qui pourrait s'ouvrir, avec des arguments de type prédictif sur le terrain de l'acquisition des connaissances.

---

(1) Vu le "niveau" et les objectifs des étudiants de DEUG I.

1. Représenter dans le plan
   $A = \{ (x,y); x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; |x-1| \leq \frac{1}{2} \}$.
2. Les relations $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leq y_2$ impliquent-elles $(x_1 - x_2) \leqslant (y_1 - y_2)$? ($x_i, y_i$ réels).
3. Calculer (à la main) $0{,}3^2 \times 3{,}14$.
4. On considère l'ensemble des nombres de la forme $\{1+\frac{1}{n}\}$ (où n entier strictement positif).Cet ensemble est-il minoré? majoré? Existe-t-il un plus petit élément dans cet ensemble? Cet ensemble a-t-il une borne inférieure? Le cas échéant citer ces réels.
5. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ sur $]1,2]$ et $f(x)=|x|$ sinon. Cette application est-elle minorée? croissante? décroissante? Que valent $f(1), f(0{,}999), f(1{,}001)$?
6. Déterminer A où $A = \{ x; x \in \mathbb{R};\ \forall n, n \in \mathbb{N},\ |x| \leqslant \frac{1}{10^n} \}$.
7. Formaliser les expressions suivantes, étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels:
   a) Tout intervalle de $\mathbb{R}$ de centre 0 contient un élément de la suite.
   b) Pour tout nombre positif, tous les éléments de la suite sauf un nombre fini sont compris entre ce nombre et son double.
   c) pour tout nombre positif, il existe une infinité d'éléments de la suite inférieurs à ce nombre.
8. Nier la proposition suivante où A et B sont des réels et f une application ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
   $\exists A, A \in \mathbb{R}^{*+}, \forall B\ (B > A \Rightarrow |f(B) - B| \leq A)$.
9. Comparer 1 et 0,999...(développement décimal illimité);
   " 4 et (1,333... + 2,666...).
10. Donner le plus grand nombre possible d'expressions (y compris formalisées) équivalentes à l'expression suivante, où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0, ℓ deux réels: "Quand x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers ℓ."
11. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire graphiquement les propriétés suivantes:
   a) $\forall i\ (1 \leq i \leq 3), \exists a\ (a \in \mathbb{R})\ f_i(a)=1$.
   b) $\exists i\ (1 \leq i \leq 3), \forall a\ (a \in \mathbb{R})\ f_i(a)=1$.
   c) $\exists a\ (a \in \mathbb{R}), \forall i\ (1 \leq i \leq 3)\ f_i(a)=1$.
   d) $\forall a\ (a \in \mathbb{R}), \forall i\ (1 \leq i \leq 3)\ f_i(a)=1$.
   e) Il existe une fonction f_i $(1 \leq i \leq 3)$ et un point a de $\mathbb{R}$ tels que la fonction f_i prend la valeur a en a.

— —

POST-TEST

1. Définir une suite divergente; donner quelques exemples.
2. Une suite convergeant vers 1 par valeurs inférieures à 1 est-elle croissante à partir d'un certain rang? (Justifier).
3. Etudier les suites de terme général u_n définies ci-dessous:
   - $u_n = \frac{1}{n}\cos n\theta$;
   - $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$;
   - $u_n = \frac{1}{n}E(nx)$ ($E(A)$ désigne la partie entière de A c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à A, nombre réel et x un nombre réel,
   - $u_n = \left(\frac{3n+1}{2n}\right)^n$.
4. Etudier les suites (u_n) qui vérifient $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.
5. Etudier une suite (u_n) à termes positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Bibliographie sommaire

BARRA et Al. [1] "Causes d'échecs et d'erreurs en analyse", Groupe Inter-IREM Analyse (1977).

BOSCHET F. [1] Cours sur les suites numériques dans le premier cycle de l'enseignement supérieur, Thèse de 3e cycle, Université de Paris VII, (1982).

BROUSSEAU G. [1] Problèmes de l'enseignement des décimaux, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 1, n°1, (1980).

BOUR M.C. [1] Papier IREM n°4, Ed. IREM de Paris Sud, (1980).

CHEVALLARD Y. et JOHSUA M.A. [1] Un exemple d'analyse de la transposition didactique, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3, n°2, (1982)

CORNU B. [1] Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite, Séminaire de didactique et pédagogie des maths. n°8, Labo. INAG Grenoble, (1980).

[2] Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite, Bulletin A.P.M.E.P., n°335, pp.627-641, (1982).

DOISE W., MUGNY G. [1] Le développement social de l'intelligence, Inter-Editions Paris, (1981).

GLAESER G. [1] La didactique de l'analyse, Bulletin de l'A.P.M.E.P., n°302, pp.25-39, (1976).

LABORDE C. [1] Langue naturelle et écriture symbolique, Thèse d'Etat, Université de Grenoble, (1982).

ROBERT A. [1] L'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Bulletin de l'A.P.M.E.P., n°330, pp.649-674, (1981).

[2] L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Thèse d'Etat, Université de Paris VII, (1982).

[3] L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3, n°3, (1983).