DEUX CARACTÉRISATIONS DE LA MESURE D'ÉQUILIBRE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$

par JEAN-YVES BRIEND *et* JULIEN DUVAL

Erratum to : Publ. Math. IHÉS 93 (2001), 145–159
DOI 10.1007/s10240-001-8190-4

Tien-Cuong Dinh [2] nous a signalé une erreur dans la preuve du premier lemme du deuxième paragraphe de [1]. Nous avons essayé en vain de la corriger dans le même esprit. Voici néanmoins une démonstration de nature dynamique de ce lemme, inspirée de [6] (voir aussi [3]). Elle est valide pour une itérée de f, ce qui suffit pour la suite de l'article. Rappelons le contexte. Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ de degré $d \geq 2$. On note $\deg_{\mathrm{A}} f$ le degré local de f en un point générique d'un ensemble algébrique irréductible A. Le lemme affirmait que $\deg_{\mathrm{A}} f \leq d^p$ où p est la codimension de A. La remarque qui suit le lemme dans [1] montre que ceci est vrai si A est invariant par f et que l'égalité impose sa totale invariance. Voici le cas général.

Lemme. — *Quitte à remplacer f par une itérée, on a $\deg_{\mathrm{A}} f \leq d^p$ pour tout ensemble algébrique* A *irréductible de codimension p.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur p. Quand $p = 0$, $\mathrm{A} = \mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ et $\deg_{\mathrm{A}} f = 1$. On suppose maintenant que, quitte à remplacer f par une itérée, $\deg_{\mathrm{A}} f \leq d^q$ pour tout ensemble algébrique irréductible de codimension $q \leq p - 1$. On veut le montrer pour les algébriques de codimension p. Par hypothèse, les points de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ de degré local au moins d^p forment un ensemble algébrique de codimension au moins p. Soit S sa strate de codimension p. Elle est constituée d'un nombre fini d'ensembles algébriques irréductibles, certains périodiques, d'autres non. On note n_0 une période commune aux premiers.

Soit maintenant A un ensemble algébrique irréductible de codimension p. S'il est totalement invariant par f^{n_0} on a $\deg_{\mathrm{A}} f^{n_0} = d^{n_0 p}$.

Sinon on aura l'estimée suivante :

$$\deg_{\mathrm{A}} f^n \leq \mathrm{C}(d^{n_0 p} - 1)^{\frac{n}{n_0}}$$

où C est une constante indépendante de A et n. Dans tous les cas on obtient bien $\deg_{\mathrm{A}} f^{n_1} \leq d^{n_1 p}$ pour un multiple n_1 de n_0 assez grand.

The online version of the original article can be found under doi :10.1007/s10240-001-8190-4.

DOI 10.1007/s10240-009-0020-0

Pour montrer l'estimée on analyse la récurrence de l'orbite positive de A dans la strate S. Si cette orbite ne visite qu'un nombre fini de fois S, elle ne passe qu'une fois au plus par les composantes non périodiques de S. On en déduit que

$$\deg_{A} f^n = \prod_{i=0}^{n-1} \deg_{f^i(A)} f \leq D(d^p - 1)^n.$$

Ici D est le produit des degrés de f sur toutes les composantes non périodiques de S. L'inégalité résulte du fait que $\deg_{f^i(A)} f \leq d^p - 1$ si $f^i(A)$ n'est pas une composante de S.

Sinon A est prépériodique à une composante périodique de S : $f^m(A) = B$ où B est dans S, $f^{n_0}(B) = B$ et $\deg_B f^{n_0} \leq d^{n_0 p} - 1$ puisque A n'est pas totalement invariant par f^{n_0}. On obtient alors

$$\deg_{A} f^n \leq D(d^p - 1)^m (d^{n_0 p} - 1)^{\frac{n-m}{n_0}+1} \leq D(d^{n_0 p} - 1)^{\frac{n}{n_0}+1}.$$

Dans tous les cas on a bien $\deg_A f^n \leq C(d^{n_0 p} - 1)^{\frac{n}{n_0}}$ avec $C = D(d^{n_0 p} - 1)$. □

Dans [1] ce lemme est un pas vers l'équidistribution des préimages de points d'un endomorphisme holomorphe de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ en dehors d'un ensemble exceptionnel algébrique. Ce résultat a été généralisé dans [4] (voir aussi [5]). Nous remercions T.-C. Dinh pour avoir relu la démonstration présentée ici et, à cette occasion, nous avoir signalé l'existence de [3].

BIBLIOGRAPHIE

1. J.-Y. Briend and J. Duval, Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$, *Publ. Math. IHÉS*, **93** (2001), 145–159.
2. T.-C. Dinh, communication personnelle, novembre 2006.
3. T.-C. Dinh, arXiv :0805.2682.
4. T.-C. Dinh and N. Sibony, Dynamique des applications d'allure polynomiale, *J. Math. Pures Appl.*, **82** (2003), 367–423.
5. T.-C. Dinh and N. Sibony, Equidistribution towards the Green current for holomorphic maps, *Ann. Sci. ENS*, **41** (2008), 307–336.
6. C. Favre, Multiplicity of holomorphic functions, *Math. Ann.*, **316** (2000), 355.

J.-Y. B.
Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence,
13453 Marseille cedex 13, France
briend@cmi.univ-mrs.fr

J. D.
Laboratoire de Mathématique, Université Paris-Sud,
91405 Orsay cedex, France
julien.duval@math.u-psud.fr

Manuscrit reçu le 8 décembre 2008
publié en ligne le 26 mars 2009.