PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PAUL MALLIAVIN

Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 2 (1959), p. 61-68

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1959__2__61_0>

IMPOSSIBILITÉ DE LA SYNTHÈSE SPECTRALE SUR LES GROUPES ABÉLIENS NON COMPACTS

Par P. MALLIAVIN
Université de Caen

Soit G un groupe abélien localement compact, $L_1(G)$ l'espace des fonctions sommables pour la mesure de Haar muni du produit de composition : $L_1(G)$ est alors une algèbre de Banach.

On dit que la synthèse spectrale est possible sur G si tout idéal fermé de $L_1(G)$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. Le problème de synthèse spectrale, issu du théorème taubérien de WIENER [**1**], posé par BEURLING [**2**] puis par GELFAND [**3**], a été résolu dans des cas particuliers. Par exemple si G est compact, il résulte du théorème de Peter-Weyl ou bien d'un résultat de GODEMENT [**4**] que la synthèse spectrale est possible sur G. Un autre exemple où la synthèse est possible est le cas où l'ensemble des idéaux maximaux contenant l'idéal donné est discret (AGMON et MANDELBROJT [**5**] pour $G=R$, KAPLANSKY [**6**] et HELSON [**7**] dans le cas général). Ces deux exemples ne représentent d'ailleurs qu'une faible partie des résultats obtenus sur le sujet. On sait d'autre part que la synthèse spectrale n'est pas toujours possible : cela résulte d'un contre-exemple de SCHWARTZ [**8**] donné pour R_3.

Dans une autre direction de recherches, KAHANE [**9**] et KATZNELSON [**10**] ont obtenu l'été dernier des résultats sur le calcul symbolique dans $L_1(R)$ qui ont été à l'origine de ce travail. Dans deux notes précédentes [**11**] on a montré l'impossibilité de la synthèse spectrale dans $L_1(Z)$. On se propose ici d'étendre ce résultat à un groupe abélien non compact arbitraire.

G' dénotera le groupe dual de G, $<g,g'>$ l'application de $G\times G'$ dans les nombres complexes de module 1 définie par les caractères. Si $f\in L_1(G)$, alors sa transformée de Fourier sera notée $f'(g') = \int f(g)<g, g'>dg$. On notera de même, si h est une fonction définie sur G', sa transformée de Fourier sur G par $h'(g) = \int h(g')<-g,g'>dg'$. Si $k\in L_1(G')$ on posera $\| k \|_p' = \| k' \|_p$ $(p = 1, +\infty)$.

Le spectre $\sigma(f)$ de $f\in L_1(G)$ est la partie fermée de G' définie par $\sigma(f) = \overline{\{ g'\in G' ; f'(g') \neq 0 \}}$. Si $h\in L_\infty(G)$, on appelle $h^\perp$ l'ensemble des $f\in L_1(G)$

tels que $f * h = 0$. Le spectre $\sigma(h)$ de h est défini par : complémentaire de $\sigma(h) = \bigcup_{f \in h^\perp} \overset{\circ}{\sigma}(f)$. (On note par $\overset{\circ}{\sigma}$ l'intérieur de σ).

En transformant par dualité la définition de la synthèse spectrale on obtient l'énoncé bien connu [12].

(P) Si la synthèse spectrale est possible sur G, alors $a \in L_1(G)$, $b \in L_\infty(G)$, $\sigma(b) \subset a'^{-1}(0)$, *entraînent* $\int_G a\bar{b} = 0$.

Les contre-exemples construits mettront cette dernière propriété en défaut.

1. Nous allons nous ramener au cas de groupes discrets.

1.1. *Supposons que G contienne un sous-groupe discret K et que la synthèse spectrale soit impossible sur K ; alors elle est impossible sur G.*

En effet, notons par i l'injection de $K \to G$; alors par dualité $i' : G' \to K'$, l'application étant surjective.

A tout $a \in L_1(K)$, associons la mesure $d\mu_a$ composée de masses ponctuelles, qui est l'image par i de la mesure a. On notera par V_ι un système fondamental de voisinages de zéro de K', par k_ι des fonctions telles que $\int k'_\iota = 1$, $k'_\iota > 0$, support de $k'_\iota \subset V_\iota$. Alors si $b \in L_\infty(K)$, $b_\iota = bk_\iota$ vérifie $b \in L_1(K)$, b_ι converge faiblement vers b dans $L_\infty(K)$. Choisissons a et b mettant la proposition (P) en défaut. Soit W un voisinage symétrique de zéro dans G tel que $(2\,W) \cap K = 0$. Soit f la fonction caractéristique de W. Alors on a

$$f * d\mu_a = \alpha \in L_1(G),\quad f * d\mu_b = \beta \in L_\infty(G)$$
$$\int_G \alpha\bar{\beta} = (f * f(0)) \int_K a\bar{b} = (\text{mesure } W) \int_K a\bar{b} \neq 0.$$

D'autre part, la transformée de Fourier de α est le produit des transformées de Fourier-Stieltjes de f et $d\mu_a$, d'où $\alpha'^{-1}(0) \supset i'^{-1}(a'^{-1}(0))$. D'autre part $\beta =$ limite faible β_ι où $\beta_\iota = f * d\mu_{b_\iota}$, d'où $\sigma(\beta) = \lim \sigma(\beta_\iota)$.

D'autre part, comme β'_ι est un produit de transformées de Fourier-Stieltjes, $\sigma(\beta_\iota) \subset i'^{-1}(\sigma(b_\iota))$, ce qui entraîne, comme $\lim \sigma(b_\iota) = \sigma(b)$, $\sigma(\beta) \subset i'^{-1}(\sigma(b))$. Si a et b mettent la proposition (P) en défaut il en sera de même de α et β.

1.2. *Soit G un groupe abélien localement compact, H un sous-groupe compact de G; alors, si la synthèse spectrale est impossible sur* $M = G/H$, *elle est impossible sur G.*

En effet, si p désigne l'homomorphisme de G sur M, alors si $l \in L_1(M)$, $l(p(g)) \in L_1(G)$, on pourra ainsi identifier $L_1(M)$ à une sous-algèbre de $L_1(G)$. Définissons une projection de $L_1(G)$ sur $L_1(M)$ en posant

$$f^0(g) = \int_H f(g + h)\, dh$$

Alors $f^0 \in L_1(M)$; si $f \in L_1(M)$, $f^0 = f$. On a, si $k \in L_1(M)$, $k * f = k * f^0$ quel que soit $f \in L_1(G)$.

Cette formule implique que tout idéal de $L_1(M)$ est un idéal dans $L_1(G)$. Par suite, si la synthèse est impossible dans $L_1(M)$, elle le sera dans $L_1(G)$.

1. 3. *Si la synthèse spectrale est impossible sur les groupes discrets infinis, elle le sera également sur tout groupe abélien non compact.*

Utilisons un résultat de Pontrjagin **[13]**. On sait que pour tout groupe abélien localement compact G, on peut trouver un sous-groupe G_1, tel que G/G_1 soit discret, G_1 étant la somme directe d'un espace euclidien R_n et d'un groupe compact K.

Si $n > 0$, G contiendra le sous-groupe discret infini constitué par l'ensemble Z des entiers situé dans R_n, et on appliquera 1. 1. Si $n = 0$, alors G_1 est compact et G étant non compact, G/G_1 est infini ; on applique alors 1. 2.

2. Lemme : *Soit G un groupe discret, $\varphi(g') \in L_\infty(G')$ telle que $\varphi(g')$ soit réelle et que $\|\varphi\|' < \infty$.*

Alors si

$$I = \int_0^{+\infty} \| e^{iu\varphi} \|'_\infty \, u du < \infty$$

la synthèse spectrale est impossible sur G.

Preuve : Notons par F l'espace des fonctions $h(t)$ réelles telles que $\hat{h}(u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-itu} dt$ vérifie $\hat{h} \in L_1(R)$; alors on a

$$h(\varphi(g')) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\varphi(g')} \hat{h}(u) du \quad \text{quel que soit } g' \in G'.$$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'espace des distributions de support compact, dérivées premières de mesures. Alors, si $T \in \mathcal{E}_1$, on peut construire une suite $h_n(\xi) \in F$ telle que h_n converge vers T dans $\mathcal{E}_1$, $|h_n(u)| < B(|u| + 1)$.

Alors

$$\| h_n(\varphi) \|'_\infty < 2 B I.$$

Soit $g \in G$; après une interversion d'intégration, légitime puisque G' est compact, on a

$$\lim_n [h_n(\varphi)]'(g) = \lim_{n \to \infty} \int \hat{h}_n(u) \, du \int e^{iu\varphi(g')} < -g, g' > dg'$$

la seconde intégrale étant $< \| e^{iu\varphi} \|'_\infty$, le second membre converge ; par suite $(h_n(\varphi))'$ converge faiblement dans $L_\infty(G)$ vers une fonction b.

Notons par E le support de T, alors h_n a pu être pris ayant son support dans E_ε, où E_ε est l'ensemble des points situés à une distance de E au plus égale à ε ; alors $\sigma[(h_n(\varphi))'] \subset \varphi^{-1}(E_\varepsilon)$ et $(h_n(\varphi))'$ convergeant faiblement vers b, $\sigma(b) \subset \varphi^{-1}(E)$.

Calculons, α étant donné, α réel,

$$\int_G (\varphi-\alpha)'\,b = \lim_n \int_G (\varphi-\alpha)'\,\overline{(h_n(\varphi))'} = \lim_n \int_{G'} (\varphi-\alpha)\,h_n(\varphi) = \lim_n \int (\xi-\alpha)\,h_n(\xi)\,d\mu(\xi)$$

où $d\mu(\xi)$ est la mesure image de la mesure de Haar sur G' par l'application $g' \to \varphi(g')$. La transformée de Fourier de $d\mu$ n'est autre que $(e^{iu\varphi})'(0)$, d'où $d\mu(\xi) = m(\xi)\,d\xi$ où $m(\xi)$ est une fonction ayant une dérivée continue, telle que $\int m(\xi)\,d\xi = \int d\mu = 1$; α sera choisi de telle sorte que $m(\alpha) \neq 0$. On a $\int_G (\varphi-\alpha)'\,\bar{b} = \langle (\xi-\alpha)\,m(\xi), T\rangle$.

Prenons en particulier pour T la dérivée de la mesure de Dirac placée en α, le second membre est $-m(\alpha) \neq 0$. Prenant $a = (\varphi-\alpha)'$, on a mis en défaut la proposition *(P)*.

3. Nous allons chercher des développements, g étant fixé, de $\exp(iv\, Im \langle g, g'\rangle)$.

Nous noterons par $r(g)$ ou r l'ordre de g c'est-à-dire le plus petit entier positif tel que $ng = 0$ $(2 \leqslant r(g) \leqslant +\infty)$. On a, si $r < +\infty$,

3.1. $$\exp(iv\, Im \langle g, g'\rangle) = \sum_{m=1}^{r} P_{m,r}(v) \langle mg, g'\rangle$$

En effet, notons par Γ le sous-groupe engendré par g. Développons en « série » de Fourier sur Γ' la fonction $\exp(iv\, Im \langle g, \gamma'\rangle) = h(\gamma')$. Cette fonction s'écrira $\sum_{m=1}^{r} P_{m,r}(v) \langle mg, \gamma'\rangle$, les $P_{m,r}$ étant donnés par les formules de Fourier :

$$P_{m,r}(v) = \frac{1}{r} \sum_{\gamma' \in \Gamma'} \langle -mg, \gamma'\rangle \exp(iv\, Im \langle g, \gamma'\rangle)\,;$$

Γ' est le groupe des racines $r^{\text{èmes}}$ de l'unité, d'où

$$r\,P_{m,r}(v) = \sum_{l=1}^{r} \exp\left(iv \sin \frac{2\pi l}{r}\right) \exp\left(-\frac{2\,iml\pi}{r}\right).$$

En particulier $|P_{m,r}(v)| \leqslant 1$ quel que soit v réel.

Utilisant l'identité $\exp(iv \sin\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ni\lambda} J_n(v)$, où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n, et intervertissant l'ordre des sommations, on obtient :

3.2. $$P_{m,r}(v) = \sum_{s \equiv m} J_s(v),$$

la congruence $s \equiv m$ étant prise modulo r. Si $r = +\infty$, les formules 3.1 et 3.2 sont encore valables en remplaçant $s \equiv m$ par $s = m$.

Démontrons quelques inégalités sur les $P_{m,s}(v)$.

Le fait que $J_n(x)$ a un zéro d'ordre n à l'origine, avec $|J_n(z)| < e^{|z|}$ donne, en utilisant l'inégalité de Schwarz,

3.3. $$|J_n(x)| < \left|\frac{ex}{n}\right|^n$$

Étant donnés $\eta > 0$, $R > 0$, on peut déterminer d tel que

3.4. $\sum_{|m|>d} |P_{m,r}(v)| < \eta$ quels que soient m, v, $|v| < R$ et r, avec $2 \leqslant r \leqslant +\infty$

(l'inégalité $|m| > d$ signifiant que la classe d'équivalence modulo r de m n'a aucun point dans le segment $[-d, +d]$.) On a en vertu de 3.2 si $2d < r$

$$\sum_{|m|>d} |P_{m,r}(v)| < 4 \sum_{s>d} |J_s(v)|.$$

Il suffit d'appliquer 3.3 (en remarquant que si $2d \geqslant r$ la somme considérée est nulle) pour obtenir 3.4.

On peut trouver $\delta > 0$ et $\rho < 1$ tels que

3.5. $|P_{m,r}(v)| < \rho$ quels que soient m, v tel que $\delta < v < 2\delta$, et r tel que $2 \leqslant r \leqslant +\infty$.

En effet, si $m \neq 0$, on a

$$|P_{m,r}(v)| \leqslant 2 \sum_1^\infty |J_s(v)| < \frac{1}{2} \quad \text{si } |v| < \delta'.$$

D'autre part si $r \geqslant 3$

$$|P_{0,r}(v)| < |J_0(v)| + 2 \sum_3^\infty |J_s(v)|.$$

Cette série représente une fonction $\lambda(v)$ indéfiniment dérivable sur $[0, 1]$, $\lambda(0) = \lambda'(0) = \lambda''(0) = 0$. Comme $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$, $J_0''(0) < 0$, on peut déterminer $\delta < \frac{\delta'}{2}$ tel que

$$|P_{0,r}(v)| < \rho < 1 \quad \text{si} \quad \delta \leqslant v \leqslant 2\delta, \quad r \geqslant 3.$$

Enfin $P_{0,2}(v) = \cos v$, d'où 3.5 si l'on a pris $\delta < \frac{\pi}{2}$.

4. Nous poserons $r(G) = \sup r(g)$ et nous distinguerons les trois cas suivants :

$r(G) < +\infty$.

$r(G) = +\infty$ tandis que $r(g) < +\infty$ pour tout $g \in G$.

Il existe $g_0 \in G$ tel que $r(g_0) = +\infty$.

On dira qu'un système $g_1, \ldots, g_q$ est linéairement indépendant si, quels que soient les entiers n_k, $\sum_1^q n_k g_k = 0$ entraîne $n_k g_k = 0$ pour tout k.

4.1. *Si* $r(G) < +\infty$, *alors* G *possède une infinité d'éléments linéairement indépendants.*

Sinon il existerait q éléments linéairement indépendants $g_1, g_2, \ldots, g_q$ tels que, en posant

$$H_p = \left\{ g \in G \,;\, pg = \sum_1^q n_k g_k \right\} \quad \text{alors} \quad \bigcup_{p=1}^r H_p = G.$$

H_1 comporte au plus r^q éléments ; montrons que H_s fini, $s < t$, entraîne H_t fini. Sinon il existerait une infinité d'éléments g''_m de H_t correspondant aux mêmes entiers n_k

dans le second membre. La différence $g''_1 - g''_m$ serait telle que $t(g''_1 - g''_m) = 0$, donc $g''_1 - g''_m \in \bigcup_{s<t} H_s$ qui comporterait ainsi une infinité d'éléments : contradiction ; donc chaque H_t, par suite G, serait fini, ce qui est impossible, G n'étant pas compact.

4. 2. *Si* $r(G) < +\infty$, *la synthèse spectrale est impossible sur* G.

Preuve : Soit (g_k) un système infini linéairement indépendant d'éléments de G. Posons

$$\varphi(g') = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\, Im <g_k, g'>.$$

Alors
$$e^{iu\,\varphi(g')} = \Pi\Sigma P_{m,r_k}\,(k^{-2}\,u)\,<mg_k, g'>$$
$$= \sum_{\theta} <\sum_k \theta(k)\, g_k, g'> \prod_k P_{\theta(k), r_k}\,(k^{-2}u)$$

où $\theta(k)$ est une fonction à valeurs entières, nulles sauf un nombre fini de valeurs, et $0 \leqslant \theta(k) < r_k$.

L'indépendance linéaire des g_k implique que

$$\| e^{iu\,\varphi(g')} \|'_\infty = \sup_{\theta} \left| \prod_{k=1}^{\infty} P_{\theta(k), r_k}\,(k^{-2}\,u) \right|$$

Ce produit se majore, en utilisant 3. 5 et posant $\mathcal{N}(u)$ = nombre de valeurs de k telles que $\delta < k^{-2}|\,u\,| < 2\,\delta$, par $\exp(\log \rho\ \mathcal{N}(u)) = \exp(-\rho_1 u^{1/2})$ où $\rho_1 > 0$.

Donc le lemme 2 est satisfait.

5. Envisageons maintenant le cas où $r(G) = +\infty$ bien que tous ses éléments soient d'ordre fini. Il existe alors une suite $g_n \in G$ tels que $r(g_n)$ soit une suite croissante tendant vers l'infini. Nous allons extraire par le procédé diagonal une suite convenable des g_n : g_k^0 sera la suite de tous les g_n ; supposant la suite g_k^{q-1} construite, nous déterminerons g_k^q de la manière suivante :

Soit $\gamma(u)$ une fonction croissante tendant vers $+\infty$, déterminée plus loin ; posons $R_q = \sup\{\,u;\ \gamma(u) \leqslant q\,\}$.

Soit $\eta_{q,k}$ une suite telle que le produit infini

5. 1.
$$\prod_{k \geqslant q} (1 + 2\,\eta_{q,k}) < 1 + \exp(-R_q^{1/2}).$$

Soit $d_q(k)$ une suite croissante d'entiers déterminés de telle sorte que

$$\sum_{|\,m\,| > d_q} |\,P_{m,r}(v)\,| < \eta_{q,k}$$

quels que soient m et r et v vérifiant $|\,v\,| < R_q$ ce qui est possible en vertu de 3. 4. Ceci étant, la suite g_k^q sera une suite extraite de g_k^{q-1} de telle sorte que $r(g_k^q) > 2\,d_q(k) \prod_{q \leqslant s < k} r(g_s^q)$ pour tous les $k > q$.

On notera par g_k la suite diagonale g_k^k ; on a alors, quels que soient q et $k > q$

5. 2. $$r(g_k) > 2\, d_q(k) \prod_{q \leqslant s < k} r(g_s).$$

Soit une combinaison linéaire nulle des g_k de la forme $\sum_{k=q}^{N} n_k g_k = 0$ où $|n_k| \leqslant 2\, d_q(k)$ et soit N le plus grand entier tel que $n_N g_N \neq 0$. Multiplions cette égalité par $\prod_{q \leqslant s < N} r(g_s)$ on obtient que $n_N \prod_{q \leqslant s < N} r(g_s)$ divise $r(g_N)$, ce qui contredirait 5. 2. Par suite si l'on développe le produit

$$\prod_{k \geqslant q} \sum_{|m| < d} P_{m,r}(k^{-2}u)\, Im < g_k, g' > = \psi_q(g')$$

on obtient une série trigonométrique dans laquelle chaque exponentielle est obtenue une fois et une seule, d'où

5. 3. $$\| \psi_q(g') \|'_\infty = \sup \left| \prod_{k \geqslant q} P_{m,r}(k^{-2}u) \right|$$

Envisageons maintenant

5. 4. $$\exp\left[iu \sum_{k \geqslant q} k^{-2} < g_k, g' > \right] = \psi_q(g') + \omega(g').$$

On a en vertu de 5. 1, si $|u| < R_q$, $\| \omega(g') \|_\infty < \exp(-R_q^{1/2})$ et *a fortiori*

$$\| \omega(g') \|_\infty < \exp(-R_q^{1/2}).$$

D'autre part

$$\| \exp[iv\, Im < g_s, g' >] \|'_1 = \sum | P_{m,r}(v) | \leqslant 2 \sum_{0}^{+\infty} | \mathcal{J}_m(v) | < (4e|v| + 2)$$

d'où

5. 5. $$\left\| \exp\left[iu \sum_{k < q} k^{-2}\, Im < g_k, g' > \right] \right\|'_1 < (4e|u| + 2)^q.$$

Posons

$$\varphi(g') = \sum_{1}^{\infty} k^{-2}\, Im < g_k, g' >.$$

On a, en vertu de 5. 3, 5. 4 et 5. 5, et en tenant compte que $|u| < R_q$,

$$\| \exp[iu\, \varphi(g')] \|'_\infty < (4e|u| + 2)^{\gamma(u)+1} (e^{-|u|^{1/2}} + \Delta(u))$$

où

$$\Delta(u) = \sup_{m,r} \left| \prod_{k \geqslant \gamma(u)} P_{m,r}(k^{-2}u) \right|.$$

Prenons par exemple $\gamma(u) = \log(u + 1)$, évaluons le produit infini en utilisant 3. 5 ; on obtient

5. 6. $$\log \| \exp[iu\, \varphi(g')] \|'_\infty = -\rho_2 u^{1/2} + O(\log^2 u) \quad \text{où} \quad \rho_2 > 0.$$

Le lemme 2 est ainsi satisfait et la synthèse spectrale est impossible sur G.

6. Reste à envisager le cas où il existe dans G un élément d'ordre infini, soit g_0. Cet élément engendre un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{Z}$; on a démontré dans [11] l'impossibilité de la synthèse spectrale sur $\mathcal{Z}$, par suite en appliquant 1. 1 on obtient que la synthèse spectrale sur G est impossible.

D'ailleurs il suffit de transcrire 5 pour obtenir directement ce résultat : on prend $g_k = \lambda_k g_0$, où λ_k est une suite d'entiers construite par le procédé diagonal de telle sorte que $\lambda_k > 2 \sum_{q \leqslant j < k} \lambda_j d_q(j)$ quels que soient q et $k > q$.

La série

$$\varphi(g') = \sum_1^{\infty} k^{-2} \, Im < \lambda_k g_0, g' >$$

satisfait alors à l'évaluation 5. 6.

On a achevé ainsi la démonstration de l'impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes discrets infinis.

7. *Remarque :* On peut se proposer de rechercher dans $\mathcal{Z}_n$ un contre-exemple sous forme d'un polynôme. Soit $\mathcal{Q}(x) = \sum_1^n \alpha_k \sin x_k$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$; supposons qu'il existe au moins sept $\alpha_k \neq 0$ (en particulier $n \geqslant 7$) alors

$$\| \exp [iu \, \mathcal{Q}(x)] \|'_\infty = \sup_\theta \left| \prod_{k=1}^{n} \mathcal{J}_{\theta(k)} (\alpha_k u) \right|$$

$\theta(k)$ prenant des valeurs entières. On sait que [14] $\mathcal{J}_n(v) = O(v^{-1/3})$ uniformément en n d'où $\| \exp [iu \, \mathcal{Q}(x)] \|'_\infty = O(u^{-7/3})$, $\mathcal{Q}(x)$ satisfait ainsi au lemme 2 et fournit un contre-exemple pour la synthèse spectrale.

RÉFÉRENCES

[1] *Annals of Mathematics*, **33**, 1932, p. 19.
[2] *Congrès des Mathématiciens scandinaves*, 1938, p. 344-366.
[3] *Matematičeski Sbornik*, **51**, 1941, p. 41-47.
[4] *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **83**, 1947, p. 131.
[5] *Acta Szeged*, 1950, B, p. 167-176.
[6] *Proceedings National Academy of Sciences U.S.A.*, 1949, p. 133-136.
[7] *Arkiv för Matematik*, **1**, 1952, p. 497-502.
[8] *Comptes rendus Académie des Sciences de Paris*, **227**, 1948, p. 424.
[9] *Comptes rendus Académie des Sciences de Paris*, **246**, 1958, p. 1949.
[10] *Comptes rendus Académie des Sciences de Paris*, **247**, 1958, p. 404.
[11] *Comptes rendus Académie des Sciences de Paris*, **248**, 1959, p. 1756 et p. 2155.
[12] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, **83**, 1947, p. 129.
[13] *Topological Groups*, Princeton, 1946, p. 161, E).
[14] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover, New York, 1956, p. 107, formule 10.

Reçu le 30 *avril* 1959.

1959. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)
ÉDIT. N° 25 555 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. N° 15 737