Perspectives hétérodoxes de Russell sur la question des fondements

Anne-Françoise Schmid
INSA de Lyon, équipe STOICA, et Archives Poincaré

Résumé : Le logicisme de Russell consiste en une thèse affirmant que toutes les mathématiques pures peuvent être exprimées à l'aide de constantes logiques et de variables. Il est compris habituellement comme une *réduction* des mathématiques pures à la logique. Pourtant cette thèse est une garantie de *non-réduction* des mathématiques au nombre et à la grandeur, de l'arithmétique aux seuls nombres finis, de la géométrie à celle d'Euclide, de la logique à la syllogistique. Le logicisme ne peut donc être interprété comme doctrine positive et dogmatique d'un fondement logique des mathématiques. L'œuvre philosophique de Russell poursuit par ailleurs une critique des thèmes liés aux fondements. L'ensemble des points de vues de Russell sur les liens de la logique et des mathématiques ne peut être compris qu'en considérant la logique comme une science à part entière et non comme un langage formel. Cette façon d'aborder le logicisme fait voir des perspectives « hétérodoxes » auxquelles est amené Russell, qui n'est pas partout le « classique » que la littérature décrit trop vite. Cette lecture s'appuie notamment sur la correspondance récemment éditée entre Bertrand Russell et Louis Couturat (1897-1913).

Abstract: Russell's logicism consists of a thesis stating that all pure mathematics can be expressed in terms of logical constants and variables. It is usually assumed to be a *reduction* of pure mathematics to logic. Yet this thesis is a guarantee for the *non-reduction* of mathematics to number and quantity, of arithmetic to finite numbers only, of geometry to the Euclidean one, and of logic to syllogistic reasoning. Thus logicism cannot be interpreted

Philosophia Scientiæ, cahier spécial 5, 2005, 175–198.

as a dogmatically asserted doctrine of a logical foundation of mathematics. Besides, Russell's philosophical work develops a critique concerning the themes related to foundations. All of Russell's points of view on the links between logic and mathematics can only be understood if logic is considered as a full-fledged science and not as a formal language. This way to deal with logicism enhances "heterodoxical" perspectives to which Russell is led. Indeed, he is not always the "classic" that scholars too promptly identify. The present interpretation notably relies on the recently published correspondence between Bertrand Russell and Louis Couturat (1897-1913).

Le projet de faire voir des perspectives hétérodoxes à partir de Russell peut sembler paradoxal. Dans la littérature logique et philosophique, Russell est traité comme un « classique ». Son rôle déterminant dans la mise en place de la logique moderne fait qu'il est identifié et sacralisé dans une posture qui semble être en opposition à tout développement non-classique. Cette façon hâtive de traiter l'apport de Russell a quelque raison — par exemple dans son rejet de la logique modale ou dans son universalisme logique. Notre propos est de revenir sur ce jugement et de reconsidérer la place de Russell, en tenant compte d'une nouvelle source, sa très importante correspondance avec Louis Couturat[1].

La thèse soutenue ici est que ce qu'on appelle « logicisme » ne se réduit pas à une tentative de fondement des mathématiques et qu'il faut nuancer sa signification. L'un des faits qui soutiennent cette interprétation est que les notions philosophiques fondamentales qui servent habituellement à la constitution de fondements donnent lieu très tôt à une critique radicale par Russell — en particulier les notions de « analytique » et « synthétique » et celles qui accompagnent cette distinction, telles les idées de nécessité et d'universalité. La façon dont Russell traite de notions d'extension et d'intension, sa conception de la proposition comme variable, de la relation comme variable, son traitement des hypothèses selon une idée proche de celle de « mondes possibles » et de la sémantique, laissent une place à des façons de faire qui renouvellent son image. Enfin, son idée que la logique est une science à part entière, et, comme il le précise, une science inductive, et non pas, comme on l'a conçue plus tard, un langage formel, contrevient à l'interprétation usuelle de son œuvre. On peut constater d'ailleurs qu'après *An Essay*

[1] Bertrand Russell, *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913)*, édition et commentaire par Anne-Françoise Schmid, 2 volumes, Paris, Kimé, 2001. C'est la correspondance scientifique et philosophique la plus importante qu'il reste de Russell, entièrement en français.

on the Foundations of Geometry [Russell, 1897], l'idée de « fondations » semble perdre de l'importance, et est remplacée par celle de « principe » : *The Principles of Mathematics* [Russell, 1903], *Principia Mathematica* [Russell & Whitehead, 1910-1913].

Ce qui est en jeu, c'est la question des relations entre logique et mathématique et ses conséquences sur la conception des fondements. Notre but est de suggérer que ce qu'on appelle « logicisme »[2] — terme qui semble être né plus tard sous la plume de Carnap — pourrait bien être, s'il est conçu comme doctrine, une sorte de totalité inacceptable aux yeux de Russell, et, d'autre part, que la façon dont Russell décrit ce que l'on appelle habituellement « logicisme » n'est pas exactement de l'ordre du fondement, si l'on en croit du moins l'acception la plus courante du terme. Nous entendrons ici fondement au sens le plus général, celui proposé par exemple dans le *Nachlass* n°5195 de Kant : « Est fondement ce par quoi quelque chose d'autre est posé de façon déterminée ; par la succession, un fondement est posé de façon indéterminée » [Eisler, 1994, 437].

« Méthode » et « objet » des mathématiques

La question des fondements peut-être traitée selon plusieurs perspectives, parce qu'elle pose à la fois des problèmes à propos de la méthode et de l'objet des mathématiques, c'est du moins ainsi que le résume Couturat, dans sa lettre du 28 juin 1905 :

> Mais la question générale qui me préoccupe en ce moment, à la suite de ces lectures, est celle-ci : Peut-on (doit-on) définir la mathématique par sa méthode seule, ou par son objet seul, ou par sa méthode et son objet à la fois ? Et dans quelle espèce rentre réellement votre définition ? Je croyais d'abord, je l'avoue, qu'elle rentrait dans la 1è (méthode ou forme) ; et d'autre part, je reconnais qu'elle tend à définir les *objets* de la Math. en termes de Logique. Mais cette dualité de définition ne me satisfait pas : ne suffit-il pas de définir la méthode seule, ou l'objet seul, et le reste n'est-il pas déterminé par là même ? Ou n'y aurait-il pas alors *deux* sciences appelées mathématique, l'une caractérisée par sa méthode, l'autre par son objet, et qui ne coïncideraient que partiellement ? Il n'y a aucune nécessité à ce qu'une science qui procède formellement suivant les *règles* de la logique doive partir, *matériellement*, de *principes* de la logique : puisque les *règles* de la Logique s'appliquent à n'importe quelle matière. [Russell, 2001, 505]

[2]Voir [Grattan-Guinness, 2000, 500-501]. Il semble que « logicisme » soit un mot fabriqué en 1929 par Carnap à partir de « logistique », mot qu'il trouvait « bâtard ». Mais du coup la signification en a été changée : « logistique » désignait une discipline, « logicisme » les thèses soutenues dans *Principia Mathematica*.

Russell répond en deux temps à Couturat. Tout d'abord, il émet quelques réserves sur les distinctions entre matière et forme, entre méthode et matière, mais néanmoins il tente de donner une interprétation[3] :

> Oui, je crois dans un sens que la mathématique se définit par sa matière aussi bien que par sa forme ; c'est à dire, les *constantes* doivent être des constantes logiques, mais les *variables* prennent toute les valeurs qu'il y a, de sorte que, si on comprend les variables dans la matière, la mathématique n'est pas restreinte à telle ou telle matière. L'idée d'une Df par la forme seule est un peu vague ; je crois que si on la précise, on arrive à ma Df. Car on suppose une forme ou bien constante, ou bien définissable en terme de certaine constante. Il y a donc ce qu'on peut appeler la matière de la forme même ; cette matière, c'est les constantes logiques. L'idée de *forme constante* s'oppose à celle de *matière variable* ; donc elle s'applique aux *fonctions*. Dire alors que la forme est constante, c'est dire que les *constantes* sont d'une nature qu'on peut préciser d'avance ; et c'est là juste ce que je dis. Mais l'idée de matière et de forme est trop aristotélicienne pour être précise. [Russell, 2001, 509].

Ce premier fragment de réponse témoigne qu'il n'est pas possible, pour Russell, de distinguer rigoureusement entre mathématique et logique. La première est caractérisée autant par sa matière que par sa forme. C'est en analysant la mathématique elle-même que l'on trouve les invariants les plus généraux qui sont identiques à ceux dont fait usage la logique — l'analyse logique est donc une sorte d'auto-analyse des mathématiques par elles-mêmes. Il n'y a pas la logique constituée d'un côté, et celle qui aurait à fonder les mathématiques, de l'autre côté. L'analyse même des mathématiques nous conduit, nous le verrons, non pas à telle fonction particulière, ni à telle proposition particulière, ce serait favoriser l'interprétation intensionnelle en mathématique[4], mais à l'idée générale

[3] Nous reproduisons le français de Russell.

[4] La question du caractère extensionnel des mathématiques, sur laquelle Russell a longtemps hésité [Russell, 2001] doit être examinée en tenant compte du fait que Russell veut, contrairement à Peano, atteindre les individus et non seulement les classes (nous développerons ce point plus loin dans le paragraphe « Les mathématiques pures »). Dans *Principia Mathematica*, Russell donne les conditions qui permettent de traiter les mathématiques de façon extensionnelle. Il faut considérer non pas seulement les fonctions dont les arguments sont des propositions ($F(p, q, r)$), mais des fonctions qui peuvent prendre des classes comme argument ($f!(\varphi!a,\ \varphi!b,\ \varphi!c)$), les points d'exclamation signifiant que la fonction est juste de l'ordre supérieur à l'argument. Une fonction ne peut entrer dans une proposition que par ses valeurs, telle est l'assomption de Russell permettant d'interpréter les mathématiques comme extensionnelles [Russell & Whitehead, 1962, 401]. Russell construit un formalisme permettant à la fois de toucher les individus variables et les fonctions de fonctions, elles aussi variables. Les nombreuses solutions proposées à « la contradiction » cherchent les limitations pour cette double variation, essentielle tant que la logique ne se limite

de l'une et de l'autre, qui trouvera, nous le verrons, son interprétation technique. Et Russell ajoute un paragraphe plus loin :

> Que signifie : « définir par la méthode » ? Prenez par exemple la logique de l'implication. Sous un point de vue, c'est la théorie de la *méthode* de la déduction[5] ; sous un autre, c'est la théorie de l'*implication*, ce qui ressemble à une Df par la matière[6]. Du moment qu'il s'agit d'une relation constante ou d'une fonction constante, la distinction entre la méthode et la matière perd toute exactitude. (R 04.07.05[7]) [Russell, 2001, 509].

Cette remarque faite presque négligemment est rétrospectivement très importante : elle témoigne du fait que pour Russell, la logique n'est pas un simple langage formel ou une pure syntaxe, mais une science à part entière. La formule de Couturat, « définir par la méthode » n'est pas satisfaisante, car elle mélange un point de vue épistémologique et un problème scientifique et qu'elle manifeste le désir implicite de voir la logique prendre la place d'une théorie de la connaissance.

Distinction entre logique et mathématique

Nous voyons par ce texte que la distinction possible entre logique et mathématique est une question d'évaluation et qu'elle ne repose pas sur une doctrine. Les mathématiques peuvent découvrir par auto-analyse non seulement la logique mais les notions fondamentales de la logique. Plutôt que d'un fondement, il s'agit d'une conjonction : d'une part il y a la refonte, la correction et l'extension de la logique classique, dont on ne voyait pas les relations générales avec les mathématiques, et dont l'étude relevait de celle des études grecques, comme Russell le rappelle avec humour dans son *Introduction à la philosophie mathématique*[8] [Russell, 1919, 231]. L'importance de la distinction des deux disciplines est qu'elle a permis de séparer les mathématiques de sa définition traditionnelle, « science du nombre et de la quantité ». La conjonction de la logique et des mathématiques permettent de se passer de cette définition trop particulière. D'autre part, dans cette même page, Russell parle de l'identité des mathématiques et de la logique, arguant que nous ne disposons pas de critère pour distinguer ce qui revient à la logique ou aux mathématiques dans un développement, par exemple dans les *Principia Mathematica* [Russell & Whitehead, 1910-1913]. La logique se

pas à être un langage formel.

[5] On considère alors des assertions.

[6] On considère alors des propositions.

[7] Ce qui abrège « lettre de Russell à Couturat du 4 juillet 1905 ».

[8] 1ère édition 1919, cet ouvrage a été écrit en prison en 1918.

trouve d'une certaine façon déjà dans les mathématiques, dans la mesure où celles-ci ne traitent pas de fonctions, mais de fonctions de fonctions, c'est-à-dire de fonctions qui peuvent prendre des classes pour arguments [Russell, 1989, 327]. Il n'est pas possible de les séparer tout à fait, et toutes deux ont une forme et une matière, toute deux une méthode et une matière, si tant et que ces distinctions ont encore quelque pertinence[9]. Celles-ci sont de toute façon trop philosophiques selon Russell et ne sont pas adaptées à la description de ce qui est scientifique. Le « logicisme » est une thèse audacieuse, non une doctrine, qui permettait d'abord *de ne pas réduire* les mathématiques au nombre et à la grandeur, l'arithmétique aux nombres finis, les géométries à celle d'Euclide, les définitions à une déduction vide des mathématiques de la logique[10], la logique à la syllogistique ou encore aux algèbres de Boole. Autant dire que, si l'on se place au niveau des disciplines et dans le travail minutieux de Russell, le « logicisme » peut aussi bien être interprété comme un anti-réductionnisme ! Ce qui sort de cette non-distinction de la logique et des mathématiques est que la logique est une science à part entière[11].

La logique comme science

Que la logique soit une science a un certain nombre de conséquences, qui tiennent compte du fait qu'elle comporte aussi bien une « méthode » qu'une « matière » pour reprendre ces termes inadaptés. En particulier, pour poursuivre la préoccupation de Couturat selon une autre perspective, Russell reste souvent ambigu sur la différence entre déduction et implication, parce que son point de vue, moins formaliste, ne lui fait pas voir la logique comme un simple langage formel ou un algorithme[12]. Couturat est toujours plus proche que Russell d'une interprétation formelle :

> [...] je regrette que vous ne fassiez pas une distinction (que j'ai faite, en m'inspirant de Frege, dans mon article *Pour la Logistique*, p. 238, note) entre les prémisses d'une déduction et les principes formels qui la régissent. Par exemple, vous écrivez « Syll » parmi les prémisses d'un raisonnement

[9] C'est là peut-être la différence la plus grande avec Henri Poincaré. Pour celui-ci en effet, la logique est hors des mathématiques, et c'est dans cette exclusion que sa notion d'intuition prend sens.

[10] Voir [Landini, 1998, 19-20].

[11] Gregory Landini a montré l'importance qu'il y a à comprendre ce point chez Russell [Landini, 1998, 30 sqq.].

[12] Jean-Claude Dumoncel a montré comment le point de vue de Russell l'a amené à l'idée de « structure », élaborée en particulier dans le concept de « nombre-relationnel » exposé dans le tome 2 de *Principia Mathematica* [Dumoncel, 2002].

> qui *est* un syllogisme (3.21, 3.38, etc.). Il y a un intérêt philosophique à ne pas laisser croire que le principe du syllogisme, par exemple, est une *prémisse* de tout syllogisme ; cela engendre une régression à l'infini. (C 22.07.06) [Russell, 2001, 613],

A quoi Russell répond (R 21.08.06) [Russell, 2001, 616] :

> Ce que vous dites au sujet des prémisses d'une déduction et des principes formels est très juste ; j'aurais dû faire cette distinction. Cependant *Syll* (par ex.) peut être prémisse aussi bien que principe dans certain cas.

En d'autres termes, « Syll » peut être aussi bien un axiome du système qu'une hypothèse particulière dans une déduction. Pourquoi Russell ne fait-il pas cette distinction, ou pourquoi lui est-il difficile de la faire ? Notre hypothèse est justement que Russell voyait dans la logique une science, non pas un langage formel. Comme Gregory Landini[13] l'a bien montré, Russell avait une idée de la distinction entre langage et métalangage. Mais ce qui importait pour lui, c'est que la logique soit à la fois « matérielle » et « formelle » — si cette distinction a encore quelque sens. C'est évidemment une conception de la logique très différente de l'acception moderne, post-tarskienne, mais elle est très intéressante parce qu'elle pose la question du « fondement » très différemment de ce qui est attendu. Le « calcul logique » est pour Russell l'art de la déduction à partir d'hypothèses et est premier logiquement. Ce n'est après que viennent l'« *ars combinatoria* » ou l'« algèbre universelle » de Whitehead[14].

Du coup, il n'est pas possible de séparer la logique et la mathématique, et la première n'est pas exactement un « fondement » pour la seconde, et elle est, Russell l'affirme dès 1906, une science « faillible » comme une autre, et cela, il reprochera indirectement à Couturat de ne pas l'avoir compris dans son article « Les Paradoxes de la logique » :

> La méthode de la Logistique est essentiellement la même que dans toute autre science. Elle comporte la même faillibilité, la même incertitude, le même mélange d'induction et de déduction, et la même nécessité de faire appel, pour confirmer les principes, à l'accord des résultats calculés avec l'observation. Son objet n'est pas de bannir l'« intuition », mais de contrôler et de systématiser son emploi, d'éliminer les erreurs auxquelles son emploi non contrôlé donne lieu, et de découvrir les lois générales d'où l'on peut, par déduction, obtenir des résultats jamais contredits par l'intuition, et, dans les cas cruciaux, confirmés par elle. En tout cela, la Logistique est exactement sur le même pied que l'astronomie par exemple, excepté que,

[13] Voir [Russell, 2001, 3-36], par exemple, pages 34-36 et également R 14.03.04, la note 1 [Russell, 2001, 372].

[14] [Russell, 2001, 192] et [Russell, 1994, 546].

> en astronomie, la vérification s'effectue non par l'intuition mais par les sens. [Russell, 1906, 630].

Russell veut prendre quelque distance avec une idée à laquelle il avait adhéré, que la logique pouvait être le fondement d'une théorie de la connaissance. C'est là une « méprise sur les prétentions de la Logistique et sur la nature de l'évidence sur laquelle elle repose » [Russell, 1906, 630]. Russell se trouve être à cette occasion un meilleur disciple de Leibniz que Couturat. Leibniz avait dissocié principe et évidence, de telle façon que la notion d'« hypothèse » prenne un sens en philosophie. Chez Russell, le terme de « principe » s'oppose simplement à « développement », il ne faut pas lui donner de sens métaphysique ou ontologique. Par exemple, le 23 octobre 1905, Russell dit à Couturat à propos de la théorie des substitutions :

> Ceci, bien entendu, est une méthode pour les *principes* : on n'a pas besoin de traîner tout ceci à travers le développement mathématique, [Russell, 2001, 543].

C'est important, sans cela on est tenté d'enfermer les mathématiques dans *Principia Mathematica*, ce qui n'était certainement pas le projet de Russell[15]. C'est parce qu'on ne comprend pas les nouvelles fonctions de la logique et de la philosophie à la suite de la « révolution » de la logique moderne, fonctions qui consistent principalement à inventer des hypothèses, que l'on croit pouvoir faire une telle identification. La première *fonction* est donc la fonction critique, qui perdra progressivement sa signification kantienne. Mais surtout elle a une fonction qui dérive de ce qu'il appelle une « révolution » de la logique moderne par rapport à la logique classique. Leibniz imaginait le monde réel comme le monde réalisé parmi les mondes possibles. Russell ne voit plus du tout les choses dans cet ordre.

> Le rôle de la logique en philosophie [. . .] est excessivement important. Mais je ne pense pas que, ce rôle, nous devions l'imaginer comme le considérait la tradition classique. Dans cette tradition, la logique devient constructive au prix d'un certain nombre de négations. Lorsqu'un nombre d'alternatives semblent à première vue, également possibles, la logique doit les condamner

[15]Voir la logique enfermée dans les Principes a été l'un des malentendus entre Russell et le « Cercle de Boutroux » (selon l'expression de Jo Le Nye [Nye, 1979]). Pierre Boutroux s'en est excusé dans une lettre à Russell, lui expliquant qu'il avait projeté sur l'œuvre de Russell un débat français, celui qui opposait le projet du *Dictionnaire critique de la philosophie* de Lalande et de ses collaborateurs (dont Couturat), dont le but était, selon Émile Boutroux et son fils Pierre, mathématicien, neveu de Poincaré, de fixer le vocabulaire de philosophie, [Russell, 2001, 548], contre le cercle des Boutroux, dont Poincaré.

> toutes, sauf une, et déclarer celle-ci réalisée dans notre monde. Le monde est donc construit sans faire appel, ou très peu, à l'expérience concrète. Le rôle véritable de la logique, à mon avis, est exactement l'opposé de celui-là. Dans la mesure où elle s'applique à un contexte qui fait l'objet de l'expérience, elle est plus analytique que constructive. Prise *a priori*, elle montre la possibilité d'alternatives insoupçonnées jusqu'alors, plus qu'elle ne montre l'impossibilité d'alternatives qui semblaient de *prime abord* possibles. Ainsi, tandis qu'elle offre à l'imagination ce que le monde *peut* être, elle se refuse de légiférer sur ce que le monde *est*. Ce changement, qui est dû à une révolution interne de la logique, a écarté les constructions ambitieuses de la métaphysique traditionnelle [...]. [Russell, 1914, 32]

Ce changement est très remarquable chez Russell, il lie la philosophie à une invention des possibles. La philosophie, comme la logique, permet de voir dans le réel des « possibles insoupçonnés ». C'est là un thème récurrent dans les écrits de Russell auquel on n'est souvent pas assez attentif, à cause de l'interprétation réductionniste du logicisme. La logique et la philosophie sont d'abord liées à l'invention et à l'imagination.

> Envisagés simplement comme hypothèses auxiliaires de l'imagination, les grands systèmes du passé servent véritablement des fins très utiles et sont amplement dignes d'étude. [Russell, 1914, 24]

Logique et philosophie luttent contre les « aveugles habitudes », l' « envoûtement de l'habitude », la « tyrannie de l'habitude » [Russell, 1914, 240-241] et [Russell, 1912, 181] :

> [...] comme un auxiliaire essentiel à la perception directe de la vérité, il faut acquérir une imagination fertile en hypothèses abstraites. C'est, je pense, ce qui a le plus manqué en philosophie. L'appareil logique était si maigre que toutes les hypothèses que pouvaient imaginer les philosophes se trouvaient incompatibles avec les faits. Trop souvent, cet état de choses conduisit à adopter des mesures héroïques, telle qu'une fin de non-recevoir en masse des faits, alors qu'une imagination, mieux fournie d'outils logiques, aurait trouvé la clé du mystère. C'est de cette manière que l'étude de la logique devient l'étude centrale de la philosophie. [Russell, 1914, 241]

Ou encore :

> Quand on a tout accompli du côté de la méthode, on a atteint une position où seule la vision philosophique directe peut entrer plus avant dans la matière. Ici, seul le génie sera utile. Ce qui est requis, en principe, c'est un nouvel effort d'imagination logique pour découvrir une possibilité jamais conçue auparavant, et aperçue dans un éclair, et enfin la perception directe que cette possibilité se réalise dans le cas envisagé. Car ne pas pouvoir

> penser à la possibilité requise entraîne des difficultés insolubles, des controverses, des embarras extrêmes, et on désespère. Mais la possibilité correcte, en principe, dès qu'elle est conçue, se justifie rapidement par son pouvoir étonnant d'absorber des faits en conflit. » — ce qui est, je le rappelle, la fonction d'un « système cohérent ». [Russell, 1914, 243]

Ou en 1912, dans les *Problèmes de Philosophie* :

> La philosophie, bien qu'elle ne soit pas en mesure de nous donner avec certitude la réponse aux doutes qui nous assiègent, peut tout de même suggérer des possibilités qui élargissent le champ de notre pensée et délivre celle-ci de la tyrannie de l'habitude. Tout en ébranlant notre certitude concernant la nature de ce qui nous entoure, elle accroît énormément notre connaissance d'une réalité possible et différente ; elle fait disparaître le dogmatisme quelque peu arrogant de ceux qui n'ont jamais parcouru la région du doute libérateur, et elle garde intact notre sentiment d'émerveillement en nous faisant voir les choses familières sous un aspect nouveau. [Russell, 1912, 181-182].

Tous ces textes jettent une lumière inhabituelle autant sur l'œuvre de Russell que sur l'interprétation des fonctions de la logique.

L'objet de la logique

Tout ce qui précède détermine l'objet de la logique, dont nous allons voir qu'il n'est pas simple. D'une part, l'objet de la logique est la déduction en général : en ceci, son objet est la mathématique *pure* ou la science *pure*. Plutôt que de dire qu'elle est le fondement des mathématiques et des sciences, il est plus juste de dire que celles-ci sont son objet, et qu'elle est une science, faillible, qui porte sur les mathématiques pures. Ceci est important, et suppose que la théorie des mathématiques n'a plus à être la philosophie, mais doit être une science, qui pourra aussi bien fournir une théorie des relations entre science et philosophie — comme nous allons le voir. D'autre part, son objet est aussi tout ce qu'il y a au monde, dans la mesure où les variables peuvent prendre toutes les valeurs possibles. Ainsi, l'objet même de la logique assume-t-il la grande distinction, non pas tellement entre matière et forme, mais plus précisément entre fonction et variable, et son objet porte sur ce type de distinction — c'est pourquoi d'ailleurs Russell donne si peu d'exemples de traduction en logique du langage naturel. Il travaille à même le matériau mathématique. A Couturat qui lui demande :

> A ce propos, pouvez-vous m'indiquer un problème particulier qu'on puisse citer comme exemple de l'application de la Logistique (comme on en cite

> pour l'Algèbre de la Logique) ? Je sais bien que la grande application de la Logistique est la reconstruction de la mathématique que vous avez entreprise ; mais je voudrais avoir un petit spécimen isolé à citer, pour convaincre les incrédules, et les gens pratiques, qui demandent toujours : « A quoi cela sert-il ? » (C 10.11.05, [Russell, 2001, 546])

Russell répond en récusant la valeur de tels exemples :

> Dans le moment, je ne puis trouver aucun problème de la sorte que vous me le demandez. Du reste, il me paraît que même si on citait un tel problème, cela ne donnerait que peu d'utilité à la logistique. Pour ma part, si j'avais à recommander la logistique, je dirais : Depuis 2000 ans, on s'occupe de la nature de l'infini, de l'espace et du temps : sur les théories qu'on invente à ce propos, on érige des systèmes de métaphysique, et l'on se permet des théories sur les rapports de l'homme avec l'univers, etc. Or, ces problèmes, on ne peut les résoudre que par la logistique. Donc, ceux qui conviennent qu'il est bon d'étudier la philosophie ne peuvent pas nier qu'il soit bon d'étudier la logistique. (R 21.11.05) [Russell, 2001, 549].

La question n'est pas celle des exemples ou de l'utilité, mais du passage du traitement métaphysique de problèmes généraux à leur traitement scientifique et mathématique (théorie des ensembles et continuité en l'occurrence). Notons que dans la réponse de Russell, les mathématiques et la logique sont à nouveau difficilement distinguables.

Les mathématiques pures

Lorsque Russell « déduit »[16] les mathématiques de la logique, il s'agit toujours des mathématiques *pures*. Il faut donc préciser ce que Russell entend par « mathématique pure ». La signification qu'il donne à ce terme est assez particulière, parce qu'elle lui vient de plusieurs traditions à la fois. D'une part, de sa pratique de la tradition idéaliste et transcendantale, Kant, puis Hegel, il retient qu'il y a les mathématiques *a priori* et les mathématiques appliquées, et que ce sont deux genres tout à fait différents. Mais d'autre part, Russell donne un sens logique et technique à cette distinction qu'il ne remet pas en cause : les mathématiques pures se « développent » pour reprendre le terme cité plus

[16]Sur la discussion des sens que l'on peut donner à cette déduction, Sainsbury a fait beaucoup de nuances importantes, [Sainsbury, 1979, 272 sqq.]. Il distingue trois cas : 1° toute vérité mathématique peut être exprimée dans un langage dont toutes les expressions sont logiques — toute vérité mathématique peut être exprimée comme une proposition logique vraie ; 2) toute proposition logique vraie qui traduit une vérité mathématique est une vérité logique ; 3) toute vérité mathématique, une fois exprimée sous forme de proposition logique, est déductible d'un petit nombre d'axiomes logiques et de règles.

haut par le moyen de *définitions*, alors que les mathématiques appliquées nécessitent des *axiomes*. Il y a d'ailleurs également une dynamique rationnelle qui peut être considérée comme pure, et être introduite dans la suite des sciences par des définitions. Tout cela est déjà déterminé dans *The Principles of Mathematics* (1903) et ne variera pas. Dans le même ouvrage, il y a également deux sources de l'analyse logique : celle qui vient de l'analyse du langage (1ère partie du même ouvrage) et celle qui vient de l'analyse des mathématiques. C'est la coïncidence de ces deux sources, le recouvrement aussi de la mathématique pure et de la logique qui donne cette allure de fondement à la logistique. Ce sont donc à elles que nous devons nous adresser pour tenter de comprendre si la logique classique est bien un fondement pour Russell. Ce sont ces deux sources qui valent à l'objet de la logique d'être compris selon deux perspectives différentes : d'une part l'étude des principes des mathématiques, d'autre part « *everything* ».

Mais Russell prend ses précautions. Il n'y a pas de confusion de ces deux genres, logique et mathématique, d'une part grâce à la fonction qu'il confère aux définitions en mathématiques — qui permettent de ne pas réduire celles-ci à une immense tautologie, d'autre part par son usage de la notion de variable, qui touche « *everything* ».

Ce qui distingue les développements des mathématiques par rapport à la logique, c'est l'introduction de définitions pour introduire chaque nouveau domaine. Cela ne veut pas dire qu'il n'y ait pas de définition logique. L'important, c'est un aspect tout à fait essentiel, que les mathématiques pures ne résultent pas de la logique par une simple grande implication, dont l'antécédent serait logique et le conséquent mathématique : ce que l'on avait appelé par ailleurs « *if-thenism* » et que Landini par exemple a contesté avec raison[17]. Les définitions introduisent chaque nouveau domaine, chaque géométrie, etc., de telle façon à dessiner la spécificité de chacun d'eux. Dans son exposé des mathématiques pures, Russell n'introduit pas d'axiomes, mais des définitions. Celles-ci n'ont beau porter que sur des noms :

> Pour les Df, je crois devoir adopter un point de vue plus formaliste que le vôtre. Il me semble que les définitions ne portent que sur les noms [...] (R 05.02.05). [Russell, 2001, 471]

Elles supposent une *analyse* des idées, qui montrent que, quoique nominales, elles portent sur un *objet* :

> Pour les Df, je suis complètement de votre avis, en ce qui concerne la logique. Il me paraît absurde de parler d'une Df quand elle n'est pas nomi-

[17] Voir le livre de Landini, [Landini, 1998, 20].

> nale. Cependant le procédé psychologique est différent du procédé logique. Je crois qu'il est possible d'apercevoir un tout sans se rendre compte de ses parties. Donc, quand on analyse un tout, on obtient un Df d'un objet qu'on connaissait déjà d'une manière vague. (R 13.06.04) [Russell, 2001, 407].

Russell renvoie dans ce passage au § 63 de *The Principles of Mathematics* (1903) où il souligne le caractère paradoxal des définitions, qu'elles ne soient que des abréviations et que pourtant elles demandent un tel effort de pensée. Elles sont nominales, mais non point banales. La réduction des mathématiques à la logique ne se conçoit pas sans cet énorme effort de pensée et celui-ci témoigne du fait que les mathématiques ne se réduisent pas à une déduction vide de la logique.

> C'est un paradoxe curieux, intrigant pour l'esprit symbolique, que les définitions, théoriquement, ne soient rien que des formulations d'abréviations symboliques, n'ayant rien à voir avec le raisonnement et seulement introduites pour la commodité pratique. Pourtant, dans le développement d'un sujet, elles requièrent toujours une très grande quantité de pensée, et incarnent souvent l'un des plus grands accomplissements de l'analyse. [Russell, 1903, 103].

Même devenu presque « nominaliste », dans *Signification et Vérité*, Russell admettra que l'on ne peut réduire les relations de similitude et les relations asymétriques [Russell, 1940, 399 sqq].

Que les définitions soient nominales est essentiel. Les définitions nominales permettent d'atteindre les individus, et non seulement les classes. On sait que Peano admettait trois types de définitions, nominales, par postulats et par abstraction.

> Je n'admets que la nominale : les autres, semblerait-il, sont uniquement nécessitées par le refus de Peano de considérer les relations comme appartenant au dispositif de la logique, et par sa hâte quelque peu exagérée à considérer comme un individu ce qui est en réalité une classe. [Russell, 1903, 112].

Par les définitions par postulats ou par abstraction, on ne détermine que des classes, dont on sait qu'elles seront traitées plus tard comme des descriptions définies. Il faut, pour Russell, pousser l'analyse plus loin, et ne pas confondre, comme ceux qui ne cherchent pas de définitions nominales, l'identité avec l'équivalence. Il faut que les définitions touchent les individus, même s'ils ne sont pas des individus « absolus » [Russell, 2001, 420]. L'une des conséquences techniques essentielles est que Russell traite les fonctions mathématiques comme des fonctions de fonctions, cela sera même essentiel dans sa recherche d'une solution aux paradoxes, l'une des directions de celle-ci étant de limiter la variation des fonctions. L'autre conséquence touche la conception de la variable. Les variables portent sur des individus ou des « termes », mais ce sont des individus variables, puisque la Logique et les mathématiques portent sur tout ce qu'il y a (*everything*). Chaque terme d'une série peut être lui-même une série. Cela est essentiel et fait comprendre le rôle de la théorie des relations auquel fait allusion Russell, et ne peut être appréhendé que par la distinction que Russell fait entre les constantes et les variables.

Les constantes logiques

Tout ce qu'on peut dire des constantes en première approche, c'est qu'elles sont fondamentales, mais beaucoup plus rares que les variables. Russell ne s'exprime que peu directement au sujet des constantes — cela a été remarqué, en particulier par Sainsbury[18]. Dans la correspondance avec Couturat, c'est à propos d'autres sujets que Russell s'exprime incidemment sur les constantes. Voici un exemple, à propos des implications matérielles :

> Je n'admets nullement qu'il y ait « quelque chose de paradoxal » dans l'idée de l'implication matérielle. Ne dit-on pas que les P.[19] d'Euclide se déduisent des axiomes ? Il s'agit là d'implication entre P. constantes. Sans l'idée d'implication matérielle, aucune P. constante ne se déduirait d'aucune autre, et il n'y aurait aucune démonstration de quoi que ce soit. (R 23.07.05) [Russell, 2001, 520].

C'est un point sur lequel Russell diffère de Couturat, il le dira clairement aussi dans son compte rendu de *La Logique de Leibniz* écrit en 1903 pour le *Mind* [Russell, 1994, 547], cette fois-ci à propos de la différence entre l'*Ars Combinatoria* ou Mathématique Universelle et le calcul logique (*Logical Calculus*). Leibniz et Couturat ne les distinguent à ses yeux pas assez nettement. Dans l'*Ars Combinatoria* — qui correspond à l'Algèbre Universelle de Whitehead —, les opérations sont variables, alors que dans le calcul logique, les opérations sont constantes. Le calcul précède donc la combinatoire :

> Lorsque nous transformons nos symboles d'opérations en des variables, nous n'enlevons pas de cette façon toutes les constantes de nos propositions, puisque les lois formelles auxquelles nos opérations doivent obéir requièrent des constantes pour leur formulation. J'ai réussi à réduire le nombre des

[18] [Sainsbury,1979, 275] voir aussi Russell, *Correspondance avec Louis Couturat*, lettre du 4 juillet 1905 [Russell, 2001, 509].

[19] « P. » abrège « proposition ».

> termes indéfinissables employés dans les mathématiques pures (y compris la géométrie) à huit (un nombre qui est susceptible de diminuer davantage), grâce auquel toute notion apparaissant de façon récurrente dans l'ensemble de la science peut être définie. Ainsi toutes les mathématiques sont simplement l'étude de ces huit notions : et le calcul logique est le nom des parties les plus élémentaires de cette étude. Nous avons justement là un développement tel que Leibniz désirait donner à tous les sujets ; avec la différence du fait que les propositions sont synthétiques et que les axiomes indémontrables des mathématiques, au lieu d'être uniques, se révèlent être une vingtaine. Ainsi la logique symbolique se distingue et est logiquement antérieure à celle que Leibniz nomme les mathématiques universelles. [Russell, 1994, 547].

En d'autres termes, des constantes sont nécessaires dans la formulation des lois formelles, qui sont elles-même synthétiques — c'est ce que par ailleurs Russell nomme les constantes logiques, sur l'interprétation desquelles il a eu quelques hésitations. D'autre part, il y a les relations d'implication entre propositions constantes sur lesquelles porte le calcul logique, mais ce n'est là que l'une des parties les plus élémentaires. Dès que l'on en arrive à des opérations du type de l'addition, Russell insiste sur le fait qu'il faut les interpréter dans le cadre de l'*Ars Combinatoria*, comme une opération variable.

Les termes

D'autre part, si l'on suit l'autre perspective sur l'objet de la logique et des mathématiques : « *everything* », ce que doit permettre de déterminer le symbolisme, ce sont des individus et non des classes. Si, comme Russell le dit de Peano, on se contentait des classes, le problème des paradoxes ne pourrait être résolu. Mais les individus constants ne sont, comme précédemment, que des cas tout à fait particuliers. Il faut pouvoir parler d'individus variables, où le domaine puisse être « *everything* ». Sur ce point, Russell aussi reprend Couturat, trouvant que ce dernier ne l'a pas compris :

> Il n'est pas juste d'appeler φx une *proposition variable* ; p est une proposition variable, par opposition à « Socrate est mortel », qui est une P. constante. φx est une valeur variable d'une fonction variable. (R 05.07.04) [Russell, 2001, 428].

De même R est une relation variable, et non pas telle ou telle relation, il le rappelle dans sa « logique des relations avec des applications à la théorie des séries » (*Revue de Métaphysique et de Morale* 7 (1902) :

> [...] on ne doit pas considérer telle ou telle relation particulière, à l'exception de celles qui sont fondamentales pour la logique (comme $\in$ et $\supset$), mais bien les relations d'une certaine classe —par exemple, les relations transitives et asymétriques, et les relations univoques et réciproques [Russell, 1993, 613 et 661].

La conséquence en est que les fonctions mathématiques ordinaires sont la plupart du temps des fonctions de fonction.

Mondes possibles et perception des relations

De même, les domaines d'interprétation sont essentiellement variables et déterminent autant de « mondes possibles », dont l'ensemble détermine les grandes structures de l'univers. Habituellement, on fait remonter la problématique en logique des mondes possibles à Carnap, sous le terme de « descriptions d'états », mais je soutiens que l'on peut trouver une notion équivalente chez Russell, qui, elle aussi, a pour fonction de traduire d'un point de vue extensionnel ce qui se présente de façon intensionnelle. Russell utilise un argument semblable à celui des « mondes possibles » très clairement une première fois dans *The Principles of Mathematics*, dans un passage où il réfute un argument de Mach contre le caractère absolu de l'espace [Russell, 1903, 493]. Parce que celui-ci suppose que les propositions portent sur des existants actuels, et non sur des entités qui parfois existent ou parfois n'existent pas, c'est, dit-il, un empirisme radicalement opposé à la philosophie défendue dans son ouvrage[20]. Comme nous l'avons vu plus haut, la dynamique peut être construite de façon pure, sans relation au monde actuel, par l'introduction de définitions, et, par conséquent, cette dynamique peut être appliquée aussi bien à des mondes qui existent qu'à des mondes qui n'existent pas. Quoi qu'il en soit, ajoute Russell, si l'on fait des calculs exacts à partir de la Dynamique rationnelle, la distribution de matière telle qu'elle est donnée dans les résultats ne sera jamais exactement celle du monde actuel, et il semble impossible de dénuer de signification de tels calculs. Russell en conclut que l'univers n'est pas donné seulement une fois, ni deux fois, mais autant de fois qu'il y a de distributions possibles de matière. La logique et les mathématiques doivent toucher les individus, mais leur domaine doit rester essentiellement variable, et donne lieu à autant de mondes possibles. Les limitations actuelles du monde sont données par la perception. C'est pourquoi la théorie des relations est si essentielle dans le point de vue de Russell.

[20] Même empiriste, Russell a toujours tenu qu'un empirisme radical n'était pas possible. Il faut en effet disposer d'Universaux.

Russell exprime très bien cela en d'autres termes à Couturat pour lui faire comprendre les différences de conception de la géométrie chez Poincaré et chez lui :

> Il y a une conséquence assez importante pour la théorie de la connaissance, qui résulte de la théorie moderne de la géométrie. Etant donné un espace euclidien, il y a entre les points d'un tel espace non seulement les relations qui engendrent l'ordre euclidien, mais aussi d'autres relations qui engendrent d'autres espaces. Tout espace continu contient 2^{α_0} points : si vous prenez un tel espace et une telle classe quelconque de 2^{α_0} points, il subsiste une relation univoque et réciproque entre les points de l'espace et les points de la classe. Soit S cette relation. Soit R une relation dont le champ est une droite dans l'espace. Alors $\breve{S}RS$ sera une relation qui engendre une droite dans la classe ; et l'ensemble de relations telles que $\breve{S}RS$ fera de la classe donnée un espace pareil à l'espace donné. Il s'ensuit que les points de l'espace actuel forment également des espaces d'espèces différentes, suivant les relations génératrices que l'on considère. Donc — et c'est là le point important — ce sont les relations, et non les points, qui caractérisent l'actualité de l'espace. Il est donc nécessaire d'admettre que la sensation — ou la perception, si vous le préférez — nous révèle des relations aussi bien que les termes des relations. Toute espèce de relations subsiste entre les points de l'espace actuel ; mais il n'y a qu'une espèce de relations que nous apercevons immédiatement. La perception immédiate des relations est (si je ne me trompe pas) une chose que Kant n'admet pas. Mais voici un cas où cette perception est évidente. Toute perception, du reste, affirme l'existence de quelque chose, c'est à dire, affirme une proposition qui exprime une relation entre quelque chose et l'existence. Mais dans le cas de l'espace, il paraît que la chose dont on aperçoit l'existence est elle-même une relation. (R 04.04.04) [Russell, 2001, 376-377].

Russell précise à propos de l'espace actuel ce qu'il a dit de l'existence dans sa lettre du 14 mars 1904 à Couturat. L'existence ne peut que se constater par expérience (quand il ne s'agit pas de l'existence mathématique), et une proposition qui affirme l'existence affirme une relation entre quelque chose et l'existence. Quel que soit l'espace dont nous nous occupons, actuel ou de géométrie pure, ce sont les relations, et non pas les points, qui spécifient les espaces. Etant donné un nombre actuel infini de points, on peut construire une quantité de relations génératrices d'une droite. Dans la mesure où nous percevons l'espace actuel, nous percevons ces relations. Il y a une limite importante à cet empirisme compatible avec la thèse que les faits sont indépendants de notre expérience : dans l'espace actuel, nous percevons un type de relations de façon approximative, alors que toute espèce de relations y est déterminable entre les points. Dans son compte rendu du *Mind* [Russell, 1905b] de la traduction anglaise (1905) de *La Science et l'Hypothèse*, Russell décrira ce problème de façon très semblable :

> Il existe des relations qui arrangent les points de l'espace dans n'importe quel ordre imaginable, c'est-à-dire de telle sorte que les objets que nous percevons être proches seraient très éloignés, alors que des objets qui, dans l'ordre spatial perçu sont très distants, viendraient prendre place entre les objets très proches de nous. En résumé, des relations subsistent entre les points qui font d'elles un réarrangement complet, ne ressemblant aucunement à l'arrangement que nous percevons. Ces autres arrangements diffèrent de celui que nous percevons, semblerait-il, juste du fait que nous ne les percevons pas. Et cela met en évidence la nécessité de supposer que les relations spatiales que nous considérons comme de fait *sont* perçues.

On ne saurait exagérer l'importance de la théorie des relations et des séries chez Russell : elles nous donnent juste l'ordre des mondes possibles.

Ainsi, nous pouvons articuler ce double objet de la logique, la déduction et les individus, à condition à la fois que les constantes soient dans les principes de la première et que les individus soient variables. Si bien que Russell travaille autant avec des relations variables qu'avec des domaines variables. La technique auquelle une telle situation donne lieu est très intéressante. On a affaire dans les développements de Russell, non seulement à des séries d'individus variables, mais à des séries de séries, parce que chaque terme d'une série peut être lui-même une série. Russell invente un formalisme où les individus peuvent être définis (et non seulement les classes), mais où ils sont variables. Il semble que cette technique ait été liée à l'idée que Russell se faisait de la logique comme science et qu'elles ait été partiellement oubliée lorsque l'on a compris la logique comme un langage formel.

Critique des notions associées à celle de fondement

Toutes ces considérations doivent être enrichies par le fait que Russell, dans ses écrits, fait une critique très radicale de notions qui entrent en jeu habituellement dans les problématiques de fondements. Cette critique intervient dès que, abandonnant sa problématique des fondements de la géométrie, il change ses opinions philosophiques. C'est ce dont il témoigne dans sa lettre à Couturat du 3 juin 1898 :

> A vrai dire, j'ai beaucoup changé en philosophie depuis que j'ai écrit mon livre, et je n'ai plus guère d'opinions dont je sois certain de la vérité. Ce scepticisme me rend difficile la défense de l'opinion assez nette que j'ai mise dans mon livre. [Russell, 2001, 50].

Lorsqu'il écrit *An Essay on the Foundations of Geometry*, Russell se place dans une perspective kantienne, mais se tourne très vite vers Hegel, dont il sera le disciple pendant trois ans à peu près. Ce passage par l'idéalisme — qui était assez naturel dans l'Angleterre de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème, où presque tous les professeurs de Russell étaient hégéliens — a rodé Russell aux techniques philosophiques les plus élaborées. Fort de cette tradition, alors qu'il adopte la thèse des relations externes formulée par G. E. Moore, il est capable de faire une critique à la fois des notions de nécessaire et de contingent, d'analytique et de synthétique, d'*a priori* et d'empirique tout à la fois et systématiquement. Il est très curieux de voir que dans la tradition analytique ces critiques ont été très oubliées.

Tout d'abord, il faut insister sur le fait que les propositions de la logique sont synthétiques. Déjà dans sa philosophie de Leibniz, Russell décrit le problème que pose l'analycité :

> Ainsi dans les jugements analytiques, quand ils ne sont pas exprimés sous la forme dérivée de jugement conditionnel, le sujet est une idée complexe, c'est-à-dire une collection d'attributs, et le prédicat est une partie de cette collection. La collection, cependant — et c'est là le point faible de la doctrine des jugements analytiques — ne doit pas être une collection quelconque, mais une collection de prédicats compatibles, ou prédicables conjointement [...]. Mais cette compatibilité, puisqu'elle est présupposée par le jugement analytique, ne peut être elle-même analytique. [Russell, 1900, 20-21].

De toutes façons, plus tard, Russell fait remarquer à Couturat que « la plupart des inférences mathématiques sont synthétiques » (R 01.01.05) :

> La distinction analytique–synthétique me paraît juste en philosophie, mais sans importance en mathématiques [...] *Synthétique–analytique* a à faire avec la *signification* des Props ; en substituant à une prop vraie une autre prop vraie, ou à une fausse une fausse, dans une partie seulement d'une formule, on en change le caractère sous ce point de vue, mais non pas sous le point de vue de la logique de l'implication. La plupart des inférences mathématiques sont synthétiques [...] [Russell, 2001, 462].

Russell reviendra sur cette question dans l'introduction à *Principia Mathematica*, dans la partie consacrée aux classes, dans le chapitre sur les symboles incomplets, pour montrer qu'une fonction intensionnelle peut être remplacée par une fonction dérivée extensionnelle. [Russell, 1989, 320]. Dans son compte rendu du livre de Couturat sur Leibniz, Russell ajoute une note :

> M. Couturat me dit qu'il considère comme analytique toute proposition qui découle des principes de la logique, dont la loi de contradiction n'en est qu'un. Je ne sais pas s'il attribue cette position, qui résout la difficulté ci-dessus, ainsi que beaucoup d'autres, à Leibniz [Russell, 1994, 544].

Et dans une lettre à Elie Halévy, datée du 22 novembre 1904, Russell s'exprime ainsi sur l'usage du terme « analytique », que, selon Lalande, Couturat abandonnera :

> Couturat confère un sens nouveau à « analytique » qui rend toutes les mathématiques analytiques. Pour ma part, je considère que ce terme est inutile, en ceci qu'il me paraît former une représentation fausse de la nature des propositions et de la loi de la contradiction. Je ne vois donc aucun avantage à lui conférer un nouveau sens. Cependant, je suis d'accord avec ce que Couturat veut dire, quoique je pense que son langage est calculé pour éveiller une logomachie hors de propos. (Archives Russell, ref. 710. 050 634) [Russell, 2001, 278-279].

Cette discussion est indirectement liée à la question de l'intuition, que dans sa lettre à Couturat datée du 12.05.98, Russell qualifie de la question « peut-être la plus difficile de la philosophie » [Russell, 2001, 56]. Contrairement à ce que l'on croit d'habitude, Russell ne nie pas l'intuition, mais il ne pense pas que chacun des principes doive être isolément intuitif. S'il n'a jamais été intuitionniste au sens de Brouwer, il a pris son école au sérieux. Le 5 octobre 1903, Russell dit à Couturat :

> Pour l'intuition, je crois aussi qu'elle est nécessaire comme support subjectif de tout raisonnement. Mais je dirais : (1) que bien des choses qu'on croît intuitives avant d'y réfléchir se trouvent finalement très compliquées ; (2) que c'est l'intuition du savant, et même du savant qui a analysé le plus les faits logiques, qu'on doit adopter ; (3) que souvent il vaut mieux ne pas prendre comme prémisse la vérité qui paraît la plus intuitive, mais une autre qui lui équivaut au point de vue logique, et qui est plus simple dans le sens logique. Car la simplicité logique est tout autre chose que l'évidence intuitive. Ce qui est essentiel, c'est qu'il y ait assez d'évidence intuitive pour supporter l'édifice ; mais il n'est pas nécessaire que toute l'évidence se trouve dans les prémisses. Du reste, une proposition peut paraître très difficile un jour, et devenir lumineuse le lendemain — c'est une question toute subjective. Pour ma part, je me suis guidé beaucoup par des maximes esthétiques [Russell, 2001, 305].

Et il ajoute :

> l'évidence d'une proposition que l'analyse révèle comme très compliquée est souvent illusoire, et qu'en tout cas il est bon d'éduquer l'intuition à l'appréhension de ce qui est simple au point de vue logique [Russell, 2001, 306].

La logique ne supprime pas l'intuition et ne se substitue pas à elle, mais a au contraire à la guider. Mais sur ces questions, Russell distingue les niveaux de la logique, de la théorie de la connaissance, de l'épistémologie.

Sur la question de la distinction entre nécessaire et contingent, Russell s'exprime aussi dans sa philosophie de Leibniz. Russell soutient l'idée que toutes les propositions, même existentielles, sont nécessaires, car il n'y a aucune raison qu'une proposition, admise pour vraie, puisse être considérée comme fausse [Russell, 1900, 95]. C'est une raison analogue qui lui fait rejeter l'implication stricte de C. I. Lewis dans l'*Introduction à la philosophie mathématique* :

> Chaque fois que la relation de *déductivité formelle* existe entre deux propositions, c'est que nous pouvons voir que la première <proposition> est fausse, ou que la seconde est vraie et nous n'avons pas besoin d'admettre dans nos prémisses rien au-delà de ce fait. [Russell, 1919, 185].

Les notions de nécessité et de possibilité sont réductibles à la logique de Russell, possible signifiant « parfois vrai » (voir la conférence « Necessity and Possibility », prononcée le 22 octobre 1905 devant la Société philosophique d'Oxford [Russell, 1994, 507-520].

Russell n'avait pas besoin de logique modale, parce qu'il estimait que sa logique fournissait les moyens d'analyse permettant de comprendre ces notions. Il y a certainement des liens entre la façon dont Russell a construit son système sur les variables d'individu et son idée qu'il permettait de rendre compte des idées modales. Ces idées modales ont un sens pour Russell en épistémologie comme des équivalents des notions d'*a priori* et d'empirique, mais non pas en logique. Et Russell traduit la nécessité sous la forme suivante :

> Une fonction propositionnelle « x a la propriété φ » est *nécessaire* si elle est valable pour toute chose (*everything*) ; elle est *nécessaire relativement à la classe u*, si elle est valable pour tout membre de u.
> Une fonction propositionnelle « x a la propriété φ » est *possible* si elle est valable d'une chose quelconque (*something*) ; elle est *possible relativement à la classe u* lorsqu'elle est valable pour un membre quelconque de u. [Russell, 1994, 518].

Si l'on se rappelle que φx est une valeur variable d'une fonction variable, alors une telle conception engage la logique des mondes possibles que nous avons vue plus haut. Cela ressemble déjà à une réduction des modalités par le moyen des mondes possibles.

Dans la correspondance de Couturat et de Russell, jamais le terme de logicisme n'est écrit — il est d'ailleurs plus tardif, et revient semble-t-il à Carnap [Grattan-Guiness, 2000]. Russell sait qu'il soutient une thèse, mais cette thèse n'est jamais assurée de façon positive ou dogmatique. Il le dit très clairement dans l'*Introduction à la philosophie mathématique.* Elle n'est pas une doctrine. Dans ce même ouvrage, Russell reste prudent :

> Mais, bien que toutes les propositions logiques (ou mathématiques), puissent être entièrement exprimées à l'aide de constantes logiques et de variables, il ne s'ensuit pas que, réciproquement, toutes les propositions, formulées de cette façon, soient logiques. Nous avons trouvé, pour les propositions mathématiques, un critérium nécessaire mais non suffisant. Nous avons suffisamment défini le caractère des *idées* primitives, permettant de *définir* toutes les idées mathématiques, mais pas le caractère des *propositions* primitives d'où toutes les propositions mathématiques peuvent être *déduites.* Il y a là une question assez difficile à laquelle on n'a pas encore pu faire une réponse précise. [Russell, 1919, 241].

Le problème de Russell l'excède tout à fait : ce n'est pas seulement chez lui que la recherche des principes prend une allure de fondement — c'est toute l'ambiguïté d'une démarche philosophique que l'on peut faire assumer à une science, en l'occurrence, la logique. Russell s'en tire au mieux à la fois en voyant les mathématiques comme un objet de la logique — ce qui fait de la logique une science — et en séparant ce qui est de l'ordre de la logique et de l'épistémologie. Comprendre le mot de « logicisme » comme une doctrine est un projet trop étroit, qui oublie une grande partie de la signification du travail technique et philosophique de Russell.

Bibliographie

Dumoncel, Jean-Claude

2002 *La Tradition de la Mathesis Universalis, Platon, Leibniz, Russell*, Paris : Cahiers de l'Unebévue, 2002.

Eisler, Rudolf

1929 *Kant-Lexicon*, trad. fr. par Anne-Dominique Balmès et Pierre Osmo, Paris : Gallimard, 1994.

Grattan-Guinness, Ivor

2000 *The Search for Mathematical Roots 1870-1940. Logic, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton/Oxford : Princeton University Press, 2000.

Landini, Gregory

1998 *Russell's Hidden Substitutional Theory*, New York/Oxford : Oxford University Press, 1998.

Nye, Mary Jo

1979 The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism, *Journal of the History of Ideas*, 40, 107-120.

Poincaré, Henri

1902 *La Science et l'Hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902.

Russell, Bertrand

1897 *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1897 ; trad. fr. par Albert Cadenat, *Essai sur les fondements de la géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

1900 *A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge : Cambridge University Press, 1900 ; trad. fr. par J. et R. Ray, *La Philosophie de Leibniz. Exposé critique*, Paris : Félix Alcan, 1908.

1903 *The Principles of Mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press, 1903.

1905a Science and Hypothesis, *The Westminster Gazette*, 3 juin 1905 ; trad. fr. par E. Stœsser, in [Schmid 2001], 217-222.

1905b Science and Hypothesis, *Mind* 14, 412-418. Réédité dans [Russell, 1994, 591-592] ; trad. fr. par E. Stœsser, in [Schmid 2001], 222-232.

1906 Les Paradoxes de la logique, *Revue de Métaphysique et de Morale* 14, 627-650.

1912 *The Problems of Philosophy*, Oxford : Oxford University Press, 1912 ; trad. fr. par S. M. Guillemin, *Problèmes de philosophie*, Paris : Payot, 1968.

1914 *Our Knowledge of the external World*, Londres : G. Allen and Unwin, 1914 ; trad. fr. par P. Devaux, *La Méthode scientifique en philosophie. Notre connaissance du monde extérieur*, Paris : Payot, 1971.

1919 *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres : G. Allen and Unwin ; trad. fr. par G. Moreau, Paris : Payot, 1961.

1940 *An Inquiry into Meaning and Truth*, New York : Norton, 1940 ; trad. fr. par P. Devaux, *Signification et vérité*, Paris : Flammarion, 1959.

1989 *Ecrits de logique philosophique*, textes traduits de l'anglais par J.-M. Roy, Paris : Presses Universitaires de France, 1989.

1993 *Toward the "Principles of Mathematics" 1900-1902*, edited by Gregory H. Moore [*The Collected Papers of Bertrand Russell*, volume 3], London/New York : Routledge, 1993.

1994 *Foundations of Logic 1903-1905*, edited by Alasdair Urquhart with the assistance of Albert C. Lewis [*The Collected Papers of*

Bertrand Russell, volume 4], London/New York : Routledge, 1994.

2001 *Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913)*, édition et commentaire par A.-F. Schmid, Paris : Kimé, 2 volumes, 2001.

Russell, Bertrand et Whitehead, Alfred North

1910-1913 *Principia Mathematica*, Cambridge : Cambridge University Press, 1910-1913.

1962 *Principia Mathematica*, Cambridge : Cambridge University Press, 1962.

Sainsbury, R. M.

1979 *Russell*, London/Boston/Henley : Routledge and Kegan Paul, 1979.

Vernant, Denis

2003 *Russell*, Paris : Flammarion, 2003.