R. Ouzilou

# Représentation métaplectique

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 2C
« Représentation métaplectique », , p. 1-77
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___2C_A1_0>

# REPRESENTATION METAPLECTIQUE

par R. OUZILOU

------

# SOMMAIRE

## I - LE GROUPE SYMPLECTIQUE



## II - INDICE DE MASLOV



## III - REPRESENTATION METAPLECTIQUE

# INTRODUCTION

Sous sa forme infinitésimale, la représentation métaplectique est l'extension naturelle de la représentation de Heisenberg aux hamiltoniens quadratiques ; c'est dire qu'on aurait pu y penser plus tôt. Mais à l'instar du soldat dont l'existence importe moins que la servitude, cette représentation a dû s'avérer utile pour bénéficier de la considération, quelquefois exagérée, dont elle jouit aujourd'hui.

Cette introduction à l'étude de la représentation métaplectique et de ses applications est la première partie d'un cours de D.E.A. consacré aux fonctions thêta en 1985-1986. Ce cours, bien qu'inspiré fortement par l'ouvrage de Lion-Vergne [3], essaie de s'en dégager un peu. C'est ainsi qu'au premier chapitre on trouvera une étude plus détaillée du groupe symplectique et de l'espace de Siegel. Le chapitre II propose une définition originale de l'indice de Maslov; cette définition, purement axiomatique, permet d'alléger certaines démonstrations de [3] sur la transformation de Fourier géométrique. Le chapitre III est une étude détaillée de la représentation métaplectique ; on y trouvera en plus de l'influence de [3], celle d'Igusa ([2], ch. I), le seul souci de l'auteur de ce modeste cours ayant été de reprendre sous une forme un peu plus moderne (par l'intermédiaire des techniques lagrangiennes) l'introduction aux fonctions thêta donnée dans [2].

Sans la paresse de l'auteur ce cours aurait pu paraître plus tôt, grâce à l'aide efficace de Madame Boucher qui a frappé le texte sur Macintosh et, auparavant, grâce à la bienveillance de Madame Jouffre-Ertel, secrétaire du Département de Mathématiques de l'Université de Saint-Etienne, qui a réussi à transformer un manuscrit, à peine déchiffrable parfois, en un texte dactylographié d'une belle lecture.

# I. LE GROUPE SYMPLECTIQUE

## 1. - ESPACES SYMPLECTIQUES. BASES CANONIQUES.

K désigne un corps commutatif.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie : on l'identifie canoniquement à son bidual E**. La donnée d'une forme bilinéaire $\sigma : E \times E \to$ est équivalente à celle d'une application linéaire $\tilde{\sigma} : E \to E^*$ de par la formule :

$$\sigma(x,y) = <\tilde{\sigma}(x),y> \qquad ; \qquad (x,y) \in E \times E$$

$\sigma$ est non dégénérée si,n et seulement si ,$\tilde{\sigma}$ est injective et par conséquent bijective du fait que E est de dimension finie $\sigma$ est antisymétrique si, et seulement si, ${}^t\tilde{\sigma} = -\tilde{\sigma}$ .

**DEFINITION** : *Un* K-*espace symplectique consiste en la donnée d'un* K-*espace vectoriel* E *et d'une forme bilinéaire* $\sigma : E \times E \to K$ *alternée, non dégénérée.*

**NOTATION** : Pour tout sous-espace F d'un espace symplectique $(E,\sigma)$, on notera $F^{\sigma}$ l'orthogonal de F suivant $\sigma$ suivant $\sigma$ , i.e.

$$F^{\sigma} = \{x \in E ; \forall\, y \in F ; \sigma(x,y) = o\} .$$

Il est à noter que $F^{\sigma}$ est l'image réciproque par $\tilde{\sigma}$ de l'orthogonal $F^{\perp}$ de F dans le dual E*.

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

(1) $F \subset F^{\sigma\sigma}$

et pour tout couple $(F_1 , F_2 )$ de sous-espaces de E :

$$(2)\ (F_1 + F_2)^\sigma = F^{\sigma,1} \cap F^{\sigma,2}$$

Si E est de dimension finie n, on a :

$$\dim F + \dim F^\sigma = n$$

ce qui fait de (1) une égalité ; de plus (2),donne alors :

$$(2')\ (F_1 \cap F_2)^\sigma = F^{\sigma,1} + F^{\sigma,2}$$

**DEFINITION 2 :** *Un sous-espace* F *d'un espace symplectique* $(E,\sigma)$ *est dit (totalement) isotrope si* $F \subset F^\sigma$. *Les sous-espaces isotropes maximaux de* $(E,\sigma)$ *sont appelés les sous-espaces lagrangiens de* $(E,\sigma)$ ; *ce sont les sous-espaces* F *de* E *identiques à leur orthogonal symplectique* $F^\sigma$. *Dans le cas d'un espace symplectique* E *de dimension finie* n, *l'existence (évidente !) de sous-espaces lagrangiens assure que* n *est pair* ; *les sous-espaces lagrangiens de* $(E,\sigma)$ *sont alors les sous-espaces isotropes de* $(E,\sigma)$ *de dimension* $\frac{n}{2}$.

Voici une importante propriété des sous-espaces lagrangiens.

**PROPOSITION :** (E : *espace symplectique de dimension finie* $2\ell$).
*Pour tout sous-espace* ***lagrangien*** $L_1$ *de* E *et tout sous-espace* ***isotrope*** $M_2$ *transverse à* $L_1$ (i.e. $M_2 \cap L_1 = \{ o \}$) *il existe un sous-espace lagrangien* $L_1$ *de* E *contenant* $M_2$ *et* ***transverse*** *à* $L_1$ .

**PREUVE :** Il suffit de montrer que tout élément maximal N de la famille des sous-espaces isotropes de E transverses à $L_1$ est lagrangien.

Remarquons tout d'abord que la transversalité de L et N assure que

$$(1)\ \ L_1 + N^\sigma = L^{\sigma,1} + N^\sigma = (L_1 \cap N)^\sigma = E.$$

Par ailleurs, il est clair que, pour tout $x \notin L_1 + N$, $N+Kx$ est encore transverse à $L_1$ ; la maximalité de N assure alors que $x \notin N^\sigma$. Ainsi :

$$N^\sigma \subset L_1 + N$$

De sorte que, grâce à (1) :

$$E = L_1 \oplus N$$

d'où $\dim N = 2\ell - \ell = \ell$.

**COROLLAIRE :** *Toute famille linéairement libre* $p_1,\dots,p_\ell$ *de* E *telle que :*

$$\sigma(p_i, p_j) = o \qquad , \qquad 1 \le i \le j \le \ell$$

*peut être complétée en une base* $(p_1,\dots,p_\ell, q_1,\dots,q_\ell)$ *de* E *telle que*

$$\sigma(q_i, q_j) = o \qquad , \qquad \sigma(p_i, q_j) = \delta_{ij} .$$

**PREUVE :** L'hypothèse faite sur les $p_i$ signifie que le sous-espace vectoriel L engendré par cette famille est lagrangien. La proposition précédente assure l'existence d'un lagrangien $L_2$ transverse à $L_1$ d'où une décomposition directe (dite de Witt) $E = L_1 \oplus L_2$.

Il est aisé de s'assurer que $\sigma$ met $L_1$ et $L_2$ en dualité ; de façon précise, si on désigne par $i_1$ et $i_2$ les injections canoniques de $L_1$ et $L_2$ dans E, l'application

$${}^t i_1 . \tilde{\sigma} . i_2 : L_2 \to L^{*,1}$$

est bijective.

Il suffit alors de transporter par cet isomorphisme linéaire la base duale de $(p_1,\dots,p_\ell)$.

**DEFINITION 3 :** *Une telle base de* $(E,\sigma)$ *est dite* ***canonique.***

**Nota Bene :** Réciproquement, si E est un K-espace vectoriel de dimension paire $2\ell$, **toute base** de E :

$$(p_1, \ldots, p_\ell, q_1, \ldots, q_\ell)$$

peut être considérée comme **base canonique d'une forme symplectique unique.** On constate donc ainsi que le corollaire précédent assure que :

**THEOREME** : *Tous les K-espaces symplectiques de dimension $2\ell$ sont isomorphes.*

**EXEMPLES :**

1/ Si V est un K-espace vectoriel de dimension $\ell$, il existe sur V x V* une seule forme symplectique $\sigma$ admettant pour base canonique la base de V x V* constituée par une base de V et la base duale ; cette forme a pour expression explicite :

$$\tilde{\sigma}\left(\binom{x}{x^*} \cdot \binom{y}{y^*}\right) = \langle x, y^* \rangle - \langle x^*, y \rangle$$

2/ Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie , les dérivées premières $D_u$ et leurs transmuées $\mathfrak{F} \cdot D_u \cdot \mathfrak{F}^{-1}$ par la transformation de Fourier engendrant dans End(S(V)), un espace vectoriel qui, par le crochet des opérateurs devient symplectique, avec une décomposition lagrangienne évidente. Pour $V = \mathbb{R}^n$, on a de la sorte une base canonique :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x}\ ;\ x_1, \ldots, x\right).$$

## 2. - FORMES SYMPLECTIQUES SUR UN ESPACE COMPLEXE.

Rappelons qu'un espace vectoriel réel V de dimension finie n est le complexifié d'un espace vectoriel réel W si et seulement si , n est pair. De façon précise, si on considère sur $K^{2n} = K^n \times K^n$ l'opérateur :

$$J_n = \begin{pmatrix} o & I_n \\ I_n & o \end{pmatrix}.$$

où $I_n$ est l'unité de $M(n,K)$, on définit une structure complexe en posant

$$iu = J_n u \quad , \quad u \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n .$$

**DEFINITION** : *Une forme bilinéaire réelle* $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ *sur un espace vectoriel complexe* V *est dite* ***compatible*** *avec la structure complexe de* V *si* :

$$\beta(i.x,i.y) = \beta(x,y) \quad ; \quad (x,y) \in V \times$$

**CONVENTION** : Par forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe V nous entendrons une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

telle que pour tout couple (x,y) d'éléments de V :

i) $h(y,x) = h(x,y)$

ii) $h(x;iy) = ih(x,y)$.

**PROPOSITION** : *Sur un espace vectoriel complexe* V, *les données suivantes sont équivalentes* :

*i) celle d'une forme* ***hermitienne*** $h : V \times V \to \mathbb{C}$

*ii) celle d'une forme bilinéaire réelle,* ***symétrique***

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

***compatible*** *avec la structure complexe de* V.

*iii) celle d'une forme bilinéaire réelle, antisymétrique* :

$$\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$$

***compatible*** *avec la structure complexe de* V.

*Cette équivalence de données s'établit par les formules :*

$$h(x,y) = g(x,y) + i\sigma(x,y)$$
$$\sigma(x,y) = g(ix,y).$$

*De plus,* $\sigma$ (resp. g) *est* ***dégénérée*** *si, et seulement si* h *l'est.*

(Preuve aisée confiée au lecteur).

**EXEMPLE** : C'est ainsi que sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ la forme symétrique canonique (d'Euclide) et la forme antisymétrique canonique (de Lagrange) s'associent pour fournir la structure hermitienne canonique

$$(x,y) \to {}^t\bar{x}.y$$

**DEFINITION 2** : *Etant donné un espace vectoriel symplectique* $(E,\sigma)$, *on dit qu'un endomorphisme linéaire* $u \in L(E)$ *laisse* $\sigma$ *invariante (ou encore qu'il est compatible avec* $\sigma$ *) si, pour tout couple* $(x,y)$ *d'éléments de* E :

$$\sigma(u.x,u.y) = \sigma(x,y)$$

Le lecteur s'assurera aisément que,n si l'on se rapporte à une base canonique, ceci signifie que u est représenté par une matrice carré U telle que

$${}^tU.J_nU = J_n,$$

ce qui entraine en particulier qu'un tel endomorphisme u est inversible.

**DEFINITION 3** : *L'ensemble de ces automorphismes linéaires de* E *(qui est évidemment un groupe) s'appelle* ***le groupe symplectique*** *de* $\sigma$ ; *on le note* $Sp(\sigma)$.

**NOTATION** : Le groupe symplectique de E x E* muni de la 2-forme canonique antisymétrique est noté Sp(E). Pour $E = K^n$ , on le note Sp(n,K).

**REMARQUES :**

i) $J_n \in Sp(n,K)$

ii) $U \in Sp(n,K) \Rightarrow {}^tU \in Sp(n,K)$.

En effet : de ${}^tU.J_n.U = J_n$ on déduit $J_n.{}^tU.J_n.U = J^{2,n} = -I_{2n}$

d'où : $J_n.U.J_n.{}^tU = J^{2,n}$ puis $U.J_n.{}^tU = J_n$

iii) Si on écrit en blocs n x n :

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} ,$$

La transposée symplectique ${}^{\sigma}U = J^{-1,n}.{}^tU.J_n = -J_n.{}^t.U.J_n$ s'écrit :

$$\sigma_U = \begin{pmatrix} {}^t\delta & -{}^t\beta \\ -{}^t\gamma & {}^t\alpha \end{pmatrix}$$

et $U \in Sp(n,K)$, qui signifie ${}^{\sigma}U.U = I_{2n}$ , s'exprime alors par :

$${}^t\delta.\alpha - {}^t\beta.\gamma = I_n \qquad , \ {}^t\delta.\beta = {}^t\beta \quad {}^t\gamma.\alpha = {}^t\alpha.\gamma$$

iv) Si on identifie $\mathbb{R}^{2n}$ à l'espace complexe : $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\,\mathbb{R}^n$, le groupe $Sp(n,\mathbb{R}) \cap Gl(n,\mathbb{C})$ devient égal à $O(2n,\mathbb{R}) \cap Gl(n,\mathbb{C})$ ; c'est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^t\alpha.\alpha + {}^t\beta.\beta = I_n \ , \ {}^t\alpha.\beta = {}^t\beta.\alpha$$

i.e. si on écrit cette matrice sous la forme complexe $\alpha + i\beta$ , on se rend compte que :

$$SP(n,\mathbb{R}) \cap GL(n,\mathbb{C}) = U(n,\mathbb{C}).$$

## 3. - GRASSMANIENNE LAGRANGIENNE.

On désigne ainsi l'ensemble $L(\sigma)$ des sous-espaces lagrangiens d'un K-espace symplectique $(V,\sigma)$. Le groupe symplectique $Sp(\sigma)$ opère évidemment sur cet ensemble ; nous allons voir que cette action est transitive. Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques lemmes.

**LEMME (Transversalité lagrangienne):** *Pour tout couple* $(L_1,L_2)$ *de sous-espaces lagrangiens d'un espace symplectique* $(V,\sigma)$ *de dimension finie* 2n, *il existe un sous-espace lagrangien* $L_3$ *de* $(N,\sigma)$ ***transverse à*** $L_1$ *et* $L_2$.

**PREUVE :** On procède par récurrence sur la dimension p de $L_1 \cap L_2$. Si p = o i.e. ces deux sous-espaces sont transverses, $\sigma$ les met en dualité ; soient $(p_1,\ldots,p_n)$ (resp. $q_1,\ldots,q_n$)) une base de $L_1$ (resp. $L_2$) dans cette dualité ; il est alors aisé de se rendre compte que $p_1 + q_1,\ldots,p_n + q_n$ engendre un sous-espace lagrangien transverse à $L_1$ et $L_2$.

Supposons maintenant $p \geq 1$ et le lemme démontré pour dim $L_1 \cap L_2 \leq p-1$. Soit $x \in L_1 \cap L_2$ et $x \neq o$ ; alors, l'orthogonal symplectique $(Kx)^\sigma$ contient $L_1$ et $L_2$ et par passage au quotient par Kx , on obtient un espace symplectique $w = (Kx)^\sigma / _{Kx}$ de dimension 2(n-1) admettant $L_1 / _{Kx}$ et $L_2 / _{Kx}$ pour sous-espaces lagrangiens. Comme $L_1 / _{Kx} \cap L_2 / _{Kx} = L_1 \cap L_2 / _{Kx}$ est de dimension p-1, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un lagrangien M transverse à $L_1 / _{Kx}$ et $L_2 / _{Kx}$ d'où par relèvement. l'existence d'un sous-espace lagrangien M de V tel que $M \cap L_2$ . Si l'on prolonge x suivant une base $x_1 = x, x_2,\ldots,x_n$ de M, et cette base en une base symplectique $x_1,\ldots,x_n , y_1,\ldots,y_n$ , il est alors aisé de se rendre compte que $y_1 , x_2,\ldots,x_n$ constituent une base d'un espace isotrope transverse à $L_1$ et $L_2$.

**LEMME (Projecteurs lagrangiens) :**

*Les projecteurs* p *d'un espace symplectique* $(V,\sigma)$ *vérifiant l'identité :*

$$(1) \qquad \sigma(p.x,y) + \sigma(x,p.y) = \sigma(x,y)$$

*sont en correspondance biunivoque avec les décompositions lagrangiennes* $(L_1,L_2)$ *de* $(V,\sigma)$. *Cette correspondance est définie par formules :*

$$\mathrm{Ker}\, p = L_1 \ , \ \mathrm{Im} = L_2$$

**PREUVE :** On commence par remarquer que, si p vérifie (1), $id_E - p$ la vérifie aussi. D'autre part pour tout couple (x.y) d'éléments de Ker p, p vérifiant (1), on a $\sigma(x,y) = o$ , ce qui assure que la condition (1) entraine que $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im} p$ est une décomposition lagrangienne de $(E,\sigma)$.

Réciproquement, si $E = L_1 \oplus L_2$ est une décomposition lagrangienne de $(E,\sigma)$ et si on désigne par p la projection de E sur $L_2$ dans la direction $L_1$ , on s'assure aisément que p vérifie (1) dans chacun des trois cas :

$$(x,y) \in L_1 \times L_1 \ , \ (x,y) \in L_2 \times L_2 \ , \ (x,y) \in L_1 \times L_2$$

La bilinéarité antisymétrique de $\sigma$ permet alors de s'assurer que (1) est une identité dans E.

**PROPOSITION 1 :** Sp($\sigma$) *opère* ***transitivement*** *sur* L($\sigma$). *De façon plus précise, étant donnés deux sous-espaces lagrangiens* $L_1$ *et* $L_2$ *de* (V,$\sigma$) *et un sous-espace lagrangien transverse à chacun d'eux, il existe un élément* $\Phi$ *de* Sp($\sigma$) *tel que* $\Phi(L_1) = L_2$ *et* $\Phi(x) = x$ *pour tout* $x \in L$.

**PREUVE :** Le lemme précédent assure que l'opérateur linéaire $\Phi$ qui coïncide avec l'identité sur L et qui projette $L_1$ sur $L_2$ dans la direction L répond à la question.

**COROLLAIRE** : *Les stabilisateurs des sous-espaces lagrangiens de* (V,$\sigma$) *sont des sous-groupes de* Sp($\sigma$) *isomorphes au groupe matriciel* :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ o & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha.{}^t\beta = \beta.{}^t\alpha$$

**PREUVE :** La transitivité de l'action de Sp($\sigma$) sur L($\sigma$) assure que tous ces sous-groupes sont intérieurement isomorphes. En prenant pour modèle :

$$V = K^n \times K^n \quad , \quad L = K^n \times \{o\}$$

on trouve que St(L) est le sous-groupe de

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n,K)$$

défini par $\gamma = o$ , ce qui assure que ${}^t\alpha,\delta = I_n$ .

**PROPOSITION 2 :** *Le sous-groupe* St(L) de Sp($\sigma$) *qui stabilise un sous-espace lagrangien* L *de* (E,$\sigma$) *est* ***produit semi-direct*** *du sous-groupe* $St_1(L)$ *qui fixe chaque point de* L *et du sous-groupe de* St(L) *constitué par les opérateurs qui stabilise un certain sous-espace lagrangien transverse à* L.

**PREUVE :** Il suffit de se placer dans le Modèle $K^n \times K^n$, où $St_1(L)$ est constitué par les matrices :

$$\begin{pmatrix} I_n & \beta \\ o & I_n \end{pmatrix} \quad {}^t\beta = \beta ,$$

de s'assurer de la décomposition canonique :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ o & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \beta' \\ o & I_n \end{pmatrix}, \quad \beta' = \alpha^{-1}\beta$$

et du fait que $St_1(L)$ est distingué dans $St(L)$.

**COROLLAIRE** : *L'ensemble des sous-espaces lagrangiens de* $(V,\sigma)$ *transverses à un sous-espace lagrangien donné* L *est un espace affine de groupe structural* $St_1(L)$.

**REMARQUE** : Si on se fixe un sous-espace lagrangien $L_1$ transverse à L, la matrice symétrique $\beta$ qui représente l'élément de $St_1(L)$ faisant passer de $L_1$ à un autre sous-espace lagrangien $L_2$ transverse à L, dans la décomposition lagrangienne $V = L \oplus L_1$ est celle de la forme bilinéaire symétrique sur $L_1$ :

$$(x,y) \to \sigma(p.x,y),$$

p désignant la projection de $L_1$ sur $L_2$ dans la direction L.

**CAS REEL :**

Nous allons voir que la grassmannienne lagrangienne $\mathfrak{L}(\sigma)$ d'un espace symplectique réel $(V,\sigma)$ de dimension finie 2n est une **variété compacte** . Pour cela, revenons au modèle symplectique constitué par $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ et :

$$(z,z') \to \mathrm{Im}\,{}^t\bar{z}.z' .$$

Soit $\mathfrak{L}(n)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens réels de $\mathbb{C}^n$. Il est clair que, pour tout $L \in \mathfrak{L}(n)$, L est un élément de $\mathfrak{L}(n)$ transverse à L et que, si $(p_1,\dots,p_n)$ est une base orthonormale de L, $(p_1,\dots,p_n, ip_1,\dots,ip_n)$ est une base symplectique de $\mathbb{C}_n$, ce qui permet d'affirmer que :

**PROPOSITION 3** : U(n) *opère* ***transitivement*** *sur* $\mathfrak{L}(n)$ *et le stabilisateur du sous-espace lagrangien* $\mathbb{R}^n$ *de* $\mathbb{C}^n$ *est* O(n), *i.e.* :

$$\mathfrak{L}(n) = U(n)/_{O(n)}$$

*(La compacité de* $\mathfrak{L}(n)$ *est alors évidente).*

Ainsi tout sous-espace lagrangien de $\mathbb{C}^n$ est de la forme $A\mathbb{R}^n$ , $A \in U(n)$. De façon plus précise, ceci signifie qu'un tel sous-espace est défini par une équation en z :

$$A^{-1}.z = A^{-1}.z \quad , \quad A \in U(n)$$

ou encore :

$$z = A.{}^tA.\overline{z}$$

Après avoir remarqué que $A.{}^tA$ est alors une matrice **unitaire** et **symétrique** on est amené à s'interroger sur les sous-espaces vectoriels réels de $\mathbb{C}$ définis par une équation vectorielle, $z = B\overline{z}$, où B est une matrice inversible telle que :

$$(1) \quad B = {}^tB \quad , \quad B^{-1} = \overline{B}.$$

**LEMME :** *Pour tout* $B \in GL(n,\mathbb{C})$ *vérifiant* (1) , *il existe une matrice* $T \in O(n)$ *telle que* $B' = TBT^{-1}$ *soit diagonale de valeurs propres*

$$e^{it_1}, \ldots, e^{it_n}$$

**PREUVE :** Une matrice $B = \alpha + i\beta$ ($\alpha$ et $\beta$ dans $M(n,\mathbb{R})$) vérifie (1) si, et seulement si $\alpha = {}^t\alpha$ , $\beta = {}^t\beta$ , $\alpha\beta = \beta\alpha$ et $\alpha^2 + \beta^2 = I_n$ , de sorte qu'il existe alors dans $\mathbb{R}^n$ une base orthogonale constituée de vecteurs propres de $\alpha$ et $\beta$ , i.e. une matrice orthogonale T telle que :

$$T\alpha T^{-1} = \mathrm{diag}\,(\cos t_1,\ldots,\cos t_n)\ ;\ T\beta T^{-1} = \mathrm{diag}(\sin t_1,\ldots,\cos t_n)$$

**PROPOSITION 4 :** *Si* $B \in U_s(n)$, i.e. B *est* ***unitaire*** *et* ***symétrique***, *alors le sous-espace vectoriel réel de* $\mathbb{C}^n$ *d'équation :*

$$z = B\overline{z}$$

*est lagrangien.*

**PREUVE :** Du lemme précédent il résulte que, moyennant une conjugaison par une matrice orthogonale, cette équation se sépare en n équations scalaires

$$z_k = e^{it_n}\, \overline{z_k}\ ,\ i<k<n.$$

Or, en revenant aux variables réelles $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ par $z_k = x_k + iy_k$, on s'assure aisément que ces équations se réduisent à n équations réelles :

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg}\frac{t_1}{2},\ldots,\ y_n = x_n.\operatorname{tg}\frac{t_n}{2}\ .$$

Reste à prouver que le sous-espace vectoriel réel $z = B\bar{z}$ de $\mathbb{C}_n$ est isotrope. Or pour tout couple (z,z') de points de ce sous-espace, on a :

$$\operatorname{Im}({}^t z.z') = \operatorname{Im}({}^t z.B^{-1}.z') = \operatorname{Im}({}^t z.z') = \operatorname{Im}\ {}^t z.z'\ ,$$

de sorte que cette quantité est nulle.

**COROLLAIRE** : L(n) *s'identifie canoniquement à l'ensemble* $U_s(n)$ *des matrices* ***unitaires symétriques*** *d'ordre* n.

## 4. - ENSEMBLES DE TRANSVERSALITE :

**(4.1).** Pour tout sous-espace lagrangien L d'un espace vectoriel symplectique $(V,\sigma)$, on désignera par $\Omega$ (L) l'ensemble des éléments de $Sp(\sigma)$ qui transforment L en un sous-espace u(L) transverse à L. Il est clair que le stabilisateur St(L) opère à gauche et à droite sur $\Omega$ (L). Nous verrons que cette double action est transitive.

**EXEMPLE** : Pour $V = K^n \times K^n$ et $L = K^n \times \{o\}$, $\Omega(L)$ est constitué par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in Sp(n,K) \qquad , \quad \gamma \in GL(n,K).$$

La projection $A \to \gamma$ assure alors que $\Omega$(L) est un ensemble ouvert du groupe algébrique $Sp(n,K) \subset GL(2n,K)$.

Le cas particulier $\gamma = I_n$ est à noter : il est constitué par l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ I_n & \delta\end{pmatrix}\ ;\ \alpha = {}^t\alpha\ ,\ \delta = {}^t\delta,\ \beta = \alpha\delta - I_n\ .$$

Toute matrice de la sorte se décompose canoniquement en :

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ I_n & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & \alpha \\ o & I_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}o & -I_n \\ I_n & o\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}I_n & \delta \\ o & I_n\end{pmatrix}$$

et, comme pour $\gamma$ inversible on a :

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^t\gamma^{-1} & o \\ o & \gamma\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}{}^t\gamma.\alpha & {}^t\gamma.\beta \\ I_n, & \gamma^{-1}\delta\end{pmatrix} ,$$

on est assuré que tout élément de $\Omega(L)$ se décompose en un produit $P.J_n.T$ avec $P \in St(L)$ et $T \in St_1(L)$.

De façon générale on a, par transport de structure, le :

**THEOREME 1** : $St(L) \times St_1(L)$ *opère* ***transitivement*** *et librement par double classes sur* $\Omega(L)$.

**COROLLAIRE** : $Sp(n,K)$ *est un groupe algébrique de dimension* $n(2n+1)$.

**PREUVE** : $n^2$ est la dimension de l'espace des :

$$\begin{pmatrix}\alpha & o \\ o & {}^t\alpha^{-1}\end{pmatrix} , \quad \alpha \in GL(n,k)$$

et $\frac{n(n1)}{2}$ celle de l'espace des :

$$\begin{pmatrix}I_n & \beta \\ o & I_n\end{pmatrix} , \quad \beta = {}^t\beta .$$

**(4.2). ENSEMBLE $\Theta$ - (Cas réel)**

Il est constitué par les $u \in Sp(\sigma)$ de carré $-id_V$ et tels que la forme quadratique :

$$g : x \to \sigma(x,u.x)$$

(qui est non dégénérée) soit **positive.**

**EXEMPLE** : Pour le modèle canonique $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \Theta \ .$$

En effet, $J_n$ est symplectique de carré $-I_{2n}$ et :

$$\sigma(x,J_n x) = {}^t(J_n x).J_n x = {}^t x(-J_n).J_n.x = {}^t x.x.$$

**PROPOSITION :**

*i) Pour tout sous-espace lagrangien* L de (V,), on a $\theta \subset \Omega(L)$

*ii)* $\theta$ *est une classe de* ***transitivité*** *pour l'action intérieure de* $Sp(\sigma)$ (i.e. *c'est une classe de conjugaison de ce groupe).*

**PREUVE :**

i) Il suffit de remarquer que, pour tout $u \in \theta$ , u(L) est orthogonal à L pour la forme quadratique g, i.e. pour la forme bilinéaire symétrique $(x,y) \to \sigma(x,u.y)$.

ii) Grâce à i) on a une décomposition lagrangienne :

$$V = L \oplus u(L),$$

ce qui permet d'exprimer u sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^t\gamma = -I \quad \text{et} \quad \beta.\gamma = -I$$

$$\text{d'où } \beta = {}^t\beta \quad \text{et} \quad \gamma = -\beta^{-1}$$

La forme quadratique g vaut alors :

$${}^t(Jx).ux = {}^t x. \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} . x$$

$$= {}^t x \begin{pmatrix} -\beta^{-1} & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} . x$$

de sorte que la condition de positivité sur g se traduit par le fait que $\beta$ est **définie négative** et, par conséquent, il existe $b \in GL(n,\mathbb{R})$ telle que $-\beta = {}^t b.b$ d'où :

$$\begin{pmatrix} {}^t b & o \\ o & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & -I \\ I & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t b & o \\ o & b^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} o & \beta \\ {}^t\beta^{-1} & o \end{pmatrix} = u .$$

**THEOREME** : *Pour tout sous-espace lagrangien* L *de* (V,σ) *on a :*

$$Sp(\sigma) = \Theta.\Omega(L)$$

**PREUVE** : Soit $u \in Sp(\sigma)$. Le lemme de transversalité lagrangienne permet de disposer d'un sous-espace lagrangien L' de (V,σ) transverse à L et u(L). Dans la décomposition lagrangienne $V = L \oplus L'$, u s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in GL(n,\mathbb{R})$. En effet, les éléments de L s'écrivent $\begin{pmatrix} x \\ o \end{pmatrix}$ et ceux de u(L) sont les $\begin{pmatrix} \alpha.x \\ \gamma.x \end{pmatrix}$ ; la transversalité de u(L) et L' assure que :

$$\alpha x = o \Rightarrow \gamma.x = o$$

d'où x = o, compte tenu de ${}^t\delta.\alpha - {}^t\beta.\alpha = I$ .

Mais alors :

$$\begin{pmatrix} o & I \\ -I & o \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \Omega(L)$$

**COROLLAIRE** : $Sp(n,\mathbb{R})$ *est engendré par* $J_n = \begin{pmatrix} o & -I_n \\ I_n & o \end{pmatrix}$, *les matrices* $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & o \\ o & {}^t\alpha \end{pmatrix}$ , $\alpha \in GL(n,\mathbb{R})$, *et les matrices* $\begin{pmatrix} I_n & \beta \\ o & I_n \end{pmatrix}$ *où* β *est symétrique.*

**5. - ESPACE DE SIEGEL :**

**(5.1). Complexi fie d'un espace symplectique réel.**

Soit $V^{\mathbb{C}}$ le complexifié d'un espace vectoriel réel. Pour qu'un sous-espace W de $V^{\mathbb{C}}$ soit le complexifié d'un sous-espace réel $W^o$ de V il faut et il suffit que $W = \overline{W}$ et alors $W^o = \{x \in W, x = \overline{x}\}$ ; c'est ce qu'on appelle la **forme réelle** de W.

Toute structure symplectique réelle $(V,\sigma)$ se prolonge canoniquement en une structure symplectique complexe $(V^{\mathbb{C}},\sigma^{\mathbb{C}})$. Les sous-espace lagrangiens à forme réelle de $(V^{\mathbb{C}},\sigma^{\mathbb{C}})$ sont les sous-espaces $L^{\mathbb{C}}$, $L \in \mathfrak{L}(\sigma)$.

A toute structure symplectique réelle $(V,\sigma)$ on associe canoniquement une forme quadratique sur $V^{\mathbb{C}}$ :

$$x \to i\sigma^{\mathbb{C}}(x,\bar{x}).$$

Cette forme quadratique est **réelle** car :

$$\sigma^{\mathbb{C}}(x,\bar{x}) = \sigma^{\mathbb{C}}(\bar{x},x) = - \sigma^{\mathbb{C}}(x,\bar{x}).$$

La "forme polaire" de cette forme quadratique est :

$$(x,y) \to i(\sigma(x,\bar{y}) + \sigma(y,\bar{x})) .$$

**DEFINITION** : *L'ensemble des sous-espaces lagrangiens de* $(V^{\mathbb{C}},\sigma^{\mathbb{C}})$ *sur lesquels la restriction de la forme quadratique canonique de* $V^{\mathbb{C}}$ *est définie positive est appelé* ***l'espace de Siegel*** *de* $(V,\sigma)$ ; *on le note* $\mathfrak{M}(\sigma)$ *ou encore plus simplement* $\mathfrak{M}_g$ *si* $V = \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$.

Il est clair que le groupe symplectique $Sp(\sigma)$ opère à gauche sur $\mathfrak{M}(\sigma)$ ; nous allons voir que cette action est **transitive**. Auparavant, nous allons donner une inteprétation matricielle à l'espace de Siegel.

**(5.2). Matrices de Siegel :**

**LEMME 1** : *Tout* ***lagrangien de Siegel*** $\mathfrak{L}$ *de* $(V^{\mathbb{C}},\sigma^{\mathbb{C}})$ *est* ***transverse*** *à tout lagrangien à forme réelle* $L^{\mathbb{C}}$.

**PREUVE :** $x \in \mathfrak{L} \subset L^{\sigma} \Rightarrow \sigma(x,\bar{x}) = 0 \Rightarrow i\sigma(x,\bar{x}) = 0 \Rightarrow x = 0.$

**LEMME 2** : *Soit* $V = L + L'$ *une décomposition directe lagrangienne d'un espace symplectique quelconque de dimension finie. Alors, il existe une correspondance biunivoque canonique entre les lagrangiens* $L''$ *de* $V$ ***transverses à*** $L'$ *et les applications linéaires symétriques* $Z$ *de* $L$ *dans* $L'$ ($L''$ *est le graphe de* $Z$).

**PREUVE** : Soit $Z : L \to L'$ une application symétrique ($L' \xrightarrow{\sigma} L^*$) i.e. : pour tout couple $(x,y)$ d'éléments de $L$ :

$$\sigma(Z.x,y) + \sigma(x,Z.y) = 0$$

on a alors, en prenant le graphe de L :

$$L'' = \{x+Zx \; ; x \in L\} ,$$

un sous-espace de V = L x L' de même dimension que L, évidemment transverse à L' et

$$\sigma(x + Zx, y + Z.y) = \sigma(x,Z.y) = o \; .$$

Réciproquement, si L" est un lagrangien de V transverse à $\mathfrak{L}$', on définit une application linéaire de L dans L' en relevant dans L" tout élément de L parallèlement à L puis en projetant ce relevé sur L' dans la direction L et il est clair que L" est le graphe de cette application linéaire. Cette application est σ-symétrique du fait que L" est σ-isotrope.

**THEOREME :** *Soient* (V,σ) *un espace symplectique réel de dimension finie et* L *un sous-espace lagrangien de* V(σ). *Il existe alors une correspondance biunivoque canonique entre les* ***sous-espaces lagrangiens de Siegel*** *de* ($C^{\mathbb{C}}$ ,$\sigma^{\mathbb{C}}$ ) ***et les formes quadratiques complexes*** *sur* $L^{\mathbb{C}}$ ***à partie imaginaire définie positive.***

**PREUVE :** Utilisons un lagrangien L' transverse à L et une base symplectique adaptée à la décomposition lagrangienne V = L+L'. Une application $\mathbb{C}$ -linéaire quelconque de $L^{\mathbb{C}}$ dans $L^{\mathbb{C}}$ s'écrit alors sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} o & o \\ Z & o \end{pmatrix}$$

et, pour tout couple (x,y) d'éléments de L, on a :

$$\sigma^{\mathbb{C}}(x,Z.y) = {}^{t}x.Zy$$

d'où :

$$\sigma^{\mathbb{C}}(Zx,y) = -{}^{t}(Zx).y \; ,$$

de sorte que la condition de σ-symétrie de Z se traduit par :

$$Z = {}^{t}Z.$$

On a alors, pour tout élément y x + Zx du graphe Z :

$$i\sigma^{\mathbb{C}}(y,\bar{y}) = i\sigma^{\mathbb{C}}(x + Zx, \bar{x}+\bar{Z}\,\bar{x})$$

$$= i(-{}^t(Zx)x + {}^t x.\bar{Z}.\bar{x})$$

$$= 2({}^t x.\mathrm{Im}Z.\bar{x})$$

et les deux lemmes précédents permettent de conclure.

## (5.3). Retour au modèle canonique :

Le théorème précédent va permettre de transporter l'action de Sp($\sigma$) des lagrangiens complexes $\mathfrak{Z}$ définis positifs aux matrices symétriques de Siegel Z. Pour cela, il suffit de revenir au modèle standard $\mathbb{C}^{\ell} \times \mathbb{C}^{\ell}$ muni du lagrangien réel $\{o\} \times \mathbb{C}^{\ell} = L^{\mathbb{C}}$.

Pour tout automorphisme symplectique réel :

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(\ell, \mathbb{R})$$

et tout lagrangien de Siegel :

$$\mathfrak{Z} = \{x+Zx;\ x \in L^{\mathbb{C}}\} ,$$

le transformé de $\mathfrak{Z}$ par g est donné par :

$$g\mathfrak{Z} = \{ (AZ+B)x + (CZ+D)x\ ;\ x \in L^{\mathbb{C}}\} .$$

La matrice CZ+D est **inversible** ; en effet, la transversalité de $\mathfrak{Z}$ et $L^{\sigma}$ se traduit par :

$$(CZ+D)x = o \Rightarrow (AZ+B)x = o$$

d'où g.(x=Zx) = o et, par conséquent x+Zx = o d'où x = o.

Il résulte de ceci que la matrice de Siegel associée à $g\mathfrak{Z}$ est :

$$gZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

**THEOREME** : *L'action de* Sp($\ell$) *sur* $\mathcal{H}_{\ell}$ *est* ***transitive*** *et les stabilisateurs de points sont* ***isomorphes*** *à* U($\ell$).

**PREUVE** : Nous allons montrer que le sous-groupe de $Sp(\ell)$ laissant stable $\mathbb{C}^{\ell} \times \{o\}$ i.e. le groupe :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ o & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \quad . \quad B\,{}^tA = A\,{}^tB$$

opère déjà transitivement sur l'espace de Siegel.

En effet, toute matrice de Siegel est de la forme

$$S = U + iA\,{}^tA \quad , \quad U = {}^tU$$

d'où :

$$S = \begin{pmatrix} A & U.{}^tA^{-1} \\ o & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \quad iI_\ell$$

Le stabilisateur de $iI_\ell$ est le sous-groupe

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

de $Sp(\ell)$.

# II. INDICE DE MASLOV

## 1. QUELQUES PROPRIETES DES TRIPLES DE SOUS-ESPACES.

Pour tout triple $(L_1, L_2, L_3)$ de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel V nous poserons :

$$S_i = L_i \cap (L_j + L_k) \ ,$$

pour tout triple (i,j,k) d'indices distincts (i.e. de nombres entiers de 1 à 3), puis :

$$L_{ij} = L_i \cap L_j \qquad\qquad L^{(i)} = L_{ij} + L_{ik}$$

et :

$$L = L_1 \cap L_2 \cap L_3$$
$$S = L_1 + L_2 + L_3$$

Il est aisé de s'assurer que $S_i \cap S_j = L_{ij}$ et que :

1°) Si $M_i$ est un supplémentaikre de $L^{(i)}$ dans $S_i$, on a $M_i \cap L_j = \{o\}$ pour tout couple (i,j) d'indices distincts.

2°) Si $L = \{o\}$ , alors :

a) $L_{12}$ , $L_{23}$ et $L_{31}$ sont en somme directe.

b) Si pour chaque indice i de 1 à 3 on choisit un syupplémentaire $M_i$ de $L^{(i)}$ dans $S_i$ et un supplémentaire $N_i$ de $S_i$ dans $L_i$ on a alors, pour tout triple (i,j,k) d'indices distincts :

$$L_i = L_{ij} \oplus L_{ik} \oplus M_i \oplus N_i$$

et

**LEMME 1 :**

$$S = L_{12} \oplus L_{23} \oplus L_{31} \oplus M_i \oplus M_j \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$$

**PREUVE :** Du fait que

$$N_j \cap (L_i+S_j) \subset L_j \cap (L_i+S_j) = L_{ij} + S_j = S_j$$

implique :

$$N_j \cap (L_i+S_j) = N_j \cap S_j \cap (L_i+S_j) = \{o\}$$

on déduit de :

$$S = (L_i+L_j) \oplus N_k = (L_i + (S_j \oplus N_j)) \oplus N_k$$

que :

$$S = (L_i+S_j) \oplus N_j \oplus N_k$$

Or :

$$\begin{aligned} S_j + L_i &= S_j + (S_i \oplus N_i) \\ &= (S_j+S_i) \oplus N_i \end{aligned}$$

du fait que :

$$N_i \cap (S_i+S_j) \subset L_i \cap (S_i+S_j) = S_i$$

Mais, comme a) et b) donnent :

$$S_i + S_j = L_{ij} \oplus L_{ik} \oplus M_i \oplus L_{jk} \oplus M_j \ ,$$

c'est terminé.

**PROPOSITION :** *Les espaces quotients* $S_i/L^{(i)}$ *sont tous isomorphes.*

**PREUVE :** Sous réserve de passer au quotient par L, on peut supposer $L = \{o\}$, grâce au, théorème de NOETHER :

$$L \subset N \subset M \Rightarrow M/N \;-\; M/L \,\big/\, N/L$$

Soit $M_1$ un supplémentaire de $L^{(1)}$ dans $S_1$. En associant à tout $m_1 \in M_1$ la classe $(m_1 + L_3) \cap L_2$ modulo $L_3 \cap L_2$ on définit une application linéaire surjective de $M_1$ sur $(M_1+L_3) \cap L_2 \big/ L_3 \cap L_2$. Cette application linéaire est injective du fait que $M_1 \cap L_3 = o$ (Remarque 1) de sorte qu'il suffit de montrer que

$$(1) \qquad S_2 = L_1 \cap L_2 \oplus (M_1+L_3) \cap L_2$$

pour conclure que $M_1 \simeq S_2/L^{(2)}$. Or, si $x \in L_2 \cap (L_1+L_3)$ on a :

$$x = x_3+x_1 \qquad x_3 \in L_3 \qquad \text{et} \quad x_1 \in S_1$$

d'où une décomposition :

$$x = x_3 + m_1 + x_{1,2} + x_{1,3} \;, \quad x_{1,2} \in L_{1,2} \text{ et } x_{1,3} \in L_{1,3}$$

et $m_1 \in M_1$ ; mais alors :

$$m_1 + x_3 + x_{1,3} \in (M_1+L_3) \cap L_2$$

**COROLLAIRE** : *Si* $L_3$ *est de dimension finie et si l'on choisit un supplémentaire* $M_1$ (resp. $M_2$) *de* $L^{(1)}$ *dans* $S_1$ *(resp. de* $L^{(2)}$ *dans* $S_2$*), alors la trace de* $M_1 \oplus M_2$ *dans* $L_2$ *est un supplémentaire* $M_3$ *de* $L^{(3)}$ *dans* $S_3$.

**PREUVE** : Il est clair que $(M_1+M_2 \cap L_3 \subset S_3$ , comme $M_2 \cap L_3 = \{o\}$, cet ensemble $M_3$ est la projection de $M_1$ sur $L_3$ parallèlement à $M_2$ et comme $M_1 \cap M_2 = \{o\}$ , il s'ensuit que $M_3$ est isomorphe à $M_1$ et $M_2$. Compte-tenu de $S_{3/L} \simeq M_1 \simeq M_2$ il reste à prouver que $M_3 \cap L^{(3)} = \{o\}$ ; or cette intersection est égale à $(M_1 \oplus M_2) \cap L^{(3)}$ est réduite à o grâce au lemme 1.

**COROLLAIRE** : *Si* $L_1,L_2,L_3$ *ont même dimension* $\ell$ *et si cette dimension est égale à* 1/2 (dim L + dim S), *alors :*

$$\dim (L_i/S_i) = \dim(L_{jk/L})$$

*pour tout triple* (i,j,k) *d'indices distincts.*

**PREUVE** : Il est clair qu'on peut supposer $L = \{o\}$ et $S = V$ ; on a alors en prenant $M_3$ comme dans le corollaire 1 et en posant :

$a = \dim L_{2,3}$ $\quad b = \dim l_{3,1}$ $\quad , \quad c = \dim L_{1,2}$

$a' = \dim L_1/S_1$ , $\quad b' = \dim L_2/S_2$ , $\quad c' = \dim L_3/S_3$

et

$d = \dim M_i$ , $\quad i = 1,2$ ou 3.

$$\ell = a'bcd$$
$$= a+b'+c+d$$
$$= a+b+c'+d$$

et

$$2\ell = a+b+c+2d+a'+b'+c' \qquad \text{(lemme 1)}$$

d'où

$$\ell = a+b+c+d$$

et, par conséquent :

$$a = a' \quad , \quad b = b' \quad , \quad c = c'.$$

Nota-bene. Ces résultats m'ont été communiqués par J. HELMSTETTER .

## 2. DECOMPOSITIONS DE SOUS-ESPACES LAGRANGIENS :

### (2.1) Espaces symplectiques-Produits.

Etant donnée une suite finie $(V_1,\sigma_1)\dots.(V_n,\sigma_n)$ d'espaces vectoriels symplectiques sur un même corps commutatif K, il est clair que

$$(V,\sigma) = (V_1 x \dots x V_n \, , \, \sigma_1 x \; \dots . x\sigma_1)$$

est un espace symplectique et que si, pour tout indice i, on se donne un sous-espace lagrangien $L_i$ de $(V,\sigma)$ Réciproquement, si on se donne un sous-espace lagrangien L de $(V,\sigma)$ sa trace $L_i = L \cap V_i$ est, pour chaque indice i, un sous-espace isotrope de $(V,\sigma_i)$ et L est homogène pour cette décomposition) si, et seulement si, $L_i$ est isotrope maximal dans chaque $(V_i,,\sigma_i)$, ce qui, en dimension finie, a lieu dès que

$$\dim L_i = 1/2 \dim V_i$$

(Il suffit de vérifier ceci pour tous les indices sauf un)

Le lemme qui voici va permettre de s'assurer que, pour toute suite finie $(L_1,...,L_n)$ de sous-espaces lagrangiens d'un même espace vectoriel symplectique $(V,\sigma)$,il existe une décomposition symplectique $V = V' \times V''$ (i.e. V' et V" sont deux supplémentaires $\sigma$-orthogonaux de V') qui fait éclater tous les lagrangiens $L_i$, en :

$$L_i = L^{',i,} \times L^{'',i}$$

de telle sorte que :

i) $L^{'',1,} \cap ... \cap L^{',n,} \{o\}$

ii) $L^{'',1,} = ...= L^{'',n,} = L_1 \cap ... \cap L_n$

***LEMME*** *: Soit* C *un sous-espace coïsotrope d'un espace vectoriel symplectique* $(V,\sigma)$ (*i.e.* C *contient son orthogonal symplectique* $C^{\sigma}$).
*Alors :*

*i) Pour tout élément maximal* M *de l'ensemble des sous-espaces isotropes de* $V,\sigma)$ *transverses à* C, *on a une décomposition symplectique*

$$V = V' \oplus V'' \quad \textit{avec} \quad V' = C \subset M^{\sigma} \quad \textit{et} \quad V'' = C^{\sigma} + M$$

*telle que*

*a)* $C = V' \oplus C^{\sigma}$

*b)* $C^{\sigma}$ *soit un lagrangien de* V" .

*ii) Pour* $C = L_1 +...+L_n$ , *on a les éclatements lagrangiens :*

$$L_i = L_i \cap V' \oplus (L_1 \cap ... \cap L_n)$$

**PREUVE :**

i) La maximalité de M assure que :

$$M^\sigma \subset C + M$$

or, de $C \cap M = \{o\}$ , on déduit que $C^\sigma + M^\sigma = V$ d'où :

$$(1) \qquad V = C^\sigma + C + M = C \oplus M$$

Montrons maintenant que $V'' = C^\sigma + M$ est un sous-espace non dégénéré de $(V,\sigma)$. En effet, (1) assure que $C^\sigma \cap M^\sigma = \{o\}$

d'où :

$$V'' \cap (V'')^\sigma = (C^\sigma + M) \cap C \cap M^\sigma = o \ ,$$

de sorte que, en posant $V' = (V'')^\sigma (C \cap M^\sigma)$ , on a bien une décomposition symplectique :

$$V = V' \oplus V''$$

et, comme $V' \cap C^\sigma = C^\sigma \cap M^\sigma = \{o\}$ et :

$$C = C \cap (V' + C^\sigma + M) = C \cap (V'+M) + C^\sigma = V'+C^\sigma \ ,$$

on a

$$C = V' \oplus C^\sigma .$$

Par ailleurs l'orthogonal symplectique de $C^\sigma$ dans $V''$ est égal à

$$(C^\sigma + M) \cap C = C^\sigma \qquad \text{d'où b)}$$

ii) Compte-tenu de i), ceci résulte aisément du fait que

$$C^\sigma = L_1 \cap \ldots \cap L_n .$$

**(2.2) Triples discrets ; Triples grossiers :**

Si $(L_1,L_2,L_3)$ est un triple de sous-espaces vectoriels lagrangiens d'un espace symplectique $(V,\sigma)$ de dimension finie $2\ell$ , le sous-espace

$$L_{1,2,3} = L_1 \cap L_2 + L_2 \cap L_3 + L_3 \cap L_1$$

est isotrope du fait que son orthogonal symplectique est :

$$(L_1+L_2) \cap (L_2+L_3) \cap (L_3+L_1) .$$

**DEFINITION :** *Ce triple lagrangien sera dit* ***discret*** *(resp.* ***grossier****) si* $L_{1,2,3}$ *est réduit à* $0$ *(resp. est de dimension* $\ell$ *, i.e. lagrangien).*

En d'autres termes, dire que le triple $(L_1,L_2,L_3)$ est discret c'est-à-dire qu'il est composé de lagrangiens deux à deux transverses.

Grâces aux résultats du paragraphe 1, on peut affirmer qu'un triple lagrangien $(L_1,L_2,L_3)$ est grossier si, et seulement si :

$$L_1 \cap (L_2+L_3) = L_1 \cap L_2 + L_2 \cap L_3$$

et alors, grâce à la proposition de ce paragraphe, on obtient deux autres égalités par permutation circulaire.

**REMARQUE :** Ces notions qui viennent d'être définies sont compatibles avec l'éclatement des lagrangiens ; de façon précise si un triple lagrangien $(L_1,L_2,L_3)$ se décompose en le produit de deux triples lagrangiens $(L'_1,L'_2,L'_3)$ et $(L''_1,L''_2,L''_3)$, le triple décomposé est discret (resp. grossier) si, et seulement si, ses composantes le sont.

**EXEMPLES :**

1/ Si deux des trois lagrangiens $(L_1,L_2,L_3)$ sont identiques , ce triple est évidemment grossier (c'est ce que nous appellerons **grossier de type 1**).

2/ Si deux des trois lagrangiens $(L_1,L_2,L_3)$ sont transverses, (e.g. $L_1$ et $L_3$) , dire que le triple est grossier c'est dire que le troisième lagrangien est homogène dans la décomposition lagrangienne constituée par les deux premiers lagrangiens

$$(\text{i.e. } L_2 = (L_1 \cap L_2) \oplus (L_2 \cap L_3))$$

un tel type lagrangien sera dit **grossier de type 2.**

**LEMME 1 :** *Pour tout triple lagrangien grossier* $(L_1, L_2, L_3)$ *de* $(V, \sigma)$ *il existe une* ***décomposition symplectique*** *:*

$$V = V' \times V''$$

*faisant éclater ce triple en un triple* $(L'_1, L'_2, L'_3)$ *du* ***premier*** *type dans* V' *et un triple* $(L''_1, L''_2, L''_3)$ *du* ***second*** *type dans* V''.

**PREUVE :** Le lemme (2.1) permet de se limiter au cas $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{o\}$ . Les sous-espaces $L_1 \cap L_2$ , $L_2 \cap L_3$ , $L_3 \cap L_1$ sont alors en somme directe. Soit N un supplémentaire de $(L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3)$ dans $L_1$ ; posons

$$V' = N + (L_2 \cap L_3)$$

Comme N et $L_2 \cap L_3$ sont des sous-espaces isotropes transverses, il suffit de montrer que tout $x \in L_2 \cap L_3$ orthogonal à N ; or, cette condition d'orthogonalité implique

$x \in (L_2+L_3) \cap L_1 = (L_2 \cap L_1) + (L_3 \cap L_1)$, d'où $x=o$, et $y \in L_1$ , d'où $y = o$.

Désignons par V'' l'orthogonal $V'^{\sigma}$ de V'. On a alors $L_1 \cap V' = N$ et, pour i = 2 ou 3 :

$$L_i \cap V' = L_i \cap N + L_2 \cap L_3$$

$$= L_2 \cap L_3$$

d'où , compte-tenu du corollaire 2 de la proposition du paragraphe 1 :

$$\dim(L_1 \cap V') = \dim N = 1/2 \ \dim V'$$

et, pour i = 2 ou 3 :

$$\dim(L_i \cap V') = \dim(L_2 \cap {}_3) = 1/2 \dim V'$$

ce qui assure que les $L_i \cap V'$ sont des sous-espaces lagrangiens de V'. Or, de ceci il résulte que ce sont alors les projections des $L_i$ sur V' dans la direction V" de sorte que les $L_i \cap V''$ deviennent alors les projections des $L_i$ sur V" dans la direction V'. Ainsi $(L_1, L_2, L_3)$ éclate dans cette décomposition et $(L_1 \cap V', L_2 \cap V', L_3 \cap V')$ est grossier du premier type dans V'. Comme $L_2 \cap L_3 V'$ implique $L_2 \cap L_3 \cap V'' = \{o\}$ , c'est terminé.

**LEMME 2** : *Pour tout triple lagrangien* $(L_1, L_2, L_3)$ *de* $(V,\sigma)$ *il existe une décomposition symplectique* $V' \times V''$ *de* $(V, \sigma)$ *faisant éclater ce triple et telle que*

$$L_1 \cap L_2 + L_2 \cap L_3 + L_3 \cap L_1$$

*soit un* ***lagrangien*** *de* V".

**PREUVE** : Il est clair qu'on peut encore se limiter au cas où $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{o\}$ . Soit $M_1$ (resp. $M_2$) un supplémentaire de $L_1 \cap L_2 + L_1 \cap L_3$ dans $L_1 \cap (L_2+L_3)$ (resp. de $L_2 \cap L_1 + L_2 \cap L_3$ dans $L_2 \cap (L_1+L_3)$). Posons

$$V' = M_1 + M_2 \;;$$

on a :

$V' \cap L_1 = M_1$ , $V' \cap L_2 = L_2 = M_2$ et (1. prop. cor. 1) on sait que $V' \cap L_3$ est un supplémentaire de $L_3 \cap L_1 + L_3 \cap L_2$ dans $L_3 \cap (L_1+L_2)$.

Comme $M_1$ et $M_2$ sont isotropes pour s'assurer que V' est non dégénérée il suffit de savoir que tout $x_1 \in M_1$ (resp. $x_2 \in M_2$) orthogonal à $L_2 \cap (L_1 + L_3)$ et appartient donc à $L_2 + (L_1 \cap L_3)$ ; mais alors $x_1 \in (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3)$ d'où $x_1 = o$. De même $x_2 = o$ par interversion des indices.

Pour s'assurer que les $L_i$ sont homogènes pour cette décomposition $V = V' \oplus V''$ il suffit de constater que :

$$\mathrm{Dim}\ M_i = 1/2 \dim V' .$$

Pour s'assurer que $L_1 \cap L_2 + L_2 \cap L_3 + L_3 \cap L_1$ est un sous-espace lagrangien de V", il suffit de vérifier, avec les notations de la fin du paragraphe 1 que la dimension de ce sous-espace est :

$$a + b + c = \ell - d = 1/2 \dim V'$$

du fait que les $L_i \cap L_j$, $i \neq j$, sont en somme directe.

**REMARQUE :** La dernière condition du lemme assure que la trace de $(L_1,L_2,L_3)$ dans V' est **discrète** et que sa trace dans V" est **grossière.**

**LEMME 3 :** *Pour un triple lagrangien* $(L_1,L_2,L_3)$ *donné dans* $(V,\sigma)$, *deux décompositions symplectiques de* $(V,\sigma)$ *satisfaisant aux conditions du lemme 2 sont* ***symplectiquement isomorphes*** *dans un automorphisme de* $(V,\sigma)$ *préservant ces lagrangiens.*

**PREUVE :** On peut encore se limiter au cas $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{o\}$ . Si V est une telle décomposition, on a, avec les notations de la fin du paragraphe 1 :

$$\dim V'' = 2(a+b+c)$$

d'où

$$\dim V' = 2\ell - 2(a+b+c) = 2d$$

de sorte que, si l'on démontre que la trace de V' sur chaque $L_i$ est un supplémentaire de $L_i \cap L_j + L_i \cap L_k$ dans $L_i \cap (L_j+L_k)$ pour toute permutation (i,j,k) de (1.2.3) , on retombera sur le procédé utilisé dans la démonstration du lemme 2. Or :

$$V' \cap L_i \subset (L_j \cap L_k + L_i)^\sigma = (L_j + L_k) \cap L_i$$

et, puisque V' est transverse aux $L_i \cap L_j$ et que :

$$\begin{aligned} \dim(V' \cap L_i) &= \dim L_i' \\ &= \ell - \dim L_i'' \end{aligned}$$

$$= \ell - (a+b+c)$$

$$= d$$

c'est terminé.

### (2.3) Théorème de décomposition :

**LEMME 1 :** *Pour tout triple lagrangier* ***grossier*** $(L_1,L_2,L_3)$ *de* $(V,\sigma)$ *il existe une décomposition de* $(V,\sigma)$ *en* ***plans*** $\sigma$***-orthogonaux*** *qui coupent chaque lagrangien* $L_i$ *suivant une droite.*

**PREUVE :** Le cas du type 1 (i.e. celui où le triple se réduit à un couple) se ramène au cas de deux lagrangiens transverses grâce au lemme (2.1) : il suffit d'utiliser une base symplectique se séparant en deux bases duales dans ces lagrangiens transverses.

Le lemme 1 de (2.2) permet de se ramener au type 2, par exemple :

$$L_2 = L_1 \cap L_2 \oplus L_2 \cap L_3 \quad ;$$

il suffit alors d'utiliser l'argument des bases duales dans $L_1$ et $L_3$ en prenant la précaution de prolonger une base de $L_1 \cap L_2$ en une base de $L_1$.

**LEMME 2 :** *Si le corps de scalaires* K *est de* ***caractéristique différente de deux,*** *le résultat qui précède reste valable pour tout triple* ***discret*** $(L_1,L_2,L_3)$.

**PREUVE :** Le cas du type 1 (i.e. celui où le triple se réduit à un couple) se ramène au cas de deux lagrangiens transverses grâce au lemme (2.1) : il suffit d'utiliser une base symplectique se séparant en deux bases duales dans ces lagrangiens transverses.

Le lemme 1 de (2.2) permet de se ramener au type 2, par exemple :

$$L_2 = L_1 \cap L_2 \oplus L_2 \cap L_3 \quad ;$$

il suffit alors d'utiliser l'argument des bases duales dans $L_1$ et $L_3$ en prenant la précaution de prolonger une base de $L_1 \cap L_2$ en une base de $L_1$.

**LEMME 2 :** *Si le corps de scalaires* K *est de caractéristique différente de deux, le résultat qui précède reste valable pour tout triple discret* $(L_1,L_2,L_3)$.

**PREUVE :** Désignons par $p_1$ et $p_3$ les projecteurs symplectiques complémentaires définis par la décomposition $V = L_1 \oplus L_3$, on a alors pour tout couple (x,y) d'éléments de V :

$$\sigma(x,p_3,y) = \sigma(p_1x,p_3y) = \sigma(p_1x,y) .$$

Or, si x et y sont $\sigma$-orthogonaux :

$$\sigma(x,p_3y) = \sigma(y,p_3x) ,$$

ce qui assure que $(x,y) \to \sigma(p.x,p.y)$ est une forme bilinéaire symétrique pour tout sous-espace isotrope W de $(V,\sigma)$ et les égalités qui précédent assurent que le noyau de cette forme est $L_1 \cap W^\sigma + L_3 \cap W^\sigma$. On obtient ainsi sur $L_2$ une forme quadratique $\mathcal{q}$ non dégénérée et il est aisé alors, en exhibant une base $\mathcal{q}$-orthogonale $(b_1,\ldots,b_\ell)$ de $L_2$ de vérifier que les plans $K.p_1(b_i) + K.p_3(b_i)$, $1<i<\ell$, répondent à la question.

**NOTA BENE.** A quelques détails près, cette démonstration m'a été communiquée par J. HELMTETTER.

**THEOREME :** **$(\chi(K) \neq 2)$ :** *Pour* ***tout*** *triple lagrangien* $(L_1,L_2,L_3)$ *de* $(V,\sigma)$ *il existe une décomposition* ***symplectique*** *de* $(V,\sigma)$ *en* ***plans*** *faisant* ***éclater*** *chaque lagrangien* $L_i$.

(Compte-tenu du lemme 2 de (2.2), c'est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents).

**REMARQUE** : Du lemme 1 il résulte clairement que, pour tout triple **lagrangien grossier**, il existe des éclatements en **trois** triples du premier type (ceci peut se retrouver à partir du lemme 1 de (2.1) et du fait que tout triple lagrangien grossier du second type éclate en deux triples du **premier type**). Deux telles décompositions ne sont pas nécessairement symplec-tiquement isomorphes, mais ceci ne nous gênera pas pour la théorie de l'indice de Maslov. A l'énoncé de cette situation :

**PROPOSITION** : *Deux éclatements en droites d'un même triple lagrangien **discret** $(L_1,L_2,L_3)$ de $(V,\sigma)$ sont isomorphes suivant un **automorphisme** de $(V,\sigma)$ **préservant** $(L_1,L_2,L_3)$.*

**PREUVE** : Il convient de remarquer tout d'abord que, dans un éclatement en droites $(L_1^i,L_2^i,L_3^i)$, $1\leq i\leq \ell$ , les $L_2^i$ sont orthogonales suivant la forme quadratique définie canoniquement sur $L_2$ par la décomposition $V = L_1 \oplus L_3$ ; en d'autres termes, un tel éclatement est toujours obtenu par le procédé de la démonstration du lemme 2. Mais alors, si $u_2$ est un opérateur du changement de base orthogonale sur $L_2$ , le transmué $u_1$ de $u_2$ par projection sur $L_1$ et le transmué $u_3$ de $u_2$ par projection sur $L_3$ définissent un automorphisme symplectique $u = u_1 \oplus u_2$ de $(V,\sigma)$ remplissant les conditions requises.

## 3. INVARIANTS SYMPLECTIQUES ALTERNES, DECOMPOSABLES :

### (3.1). Généralités :

Une fonction $\gamma\ell\ (L_1,\dots,L_n)$, à valeurs dans G et définie sur un n-uple de lagrangiens d'un même espace symplectique $(V,\sigma)$ de dimension $2\ell$ , est dite **alternée** si elle prend la valeur 1 lorsque deux de ses arguments coïncident.

Pour ce qui suit, il sera important d'étudier les fonctions alternées $\gamma\ell$ **symplectiquement invariantes** i.e. pour tout isomorphisme symplectique g de $(V,\sigma)$.

$$\gamma_\ell(gL_1,...,gL_n) = \gamma_\ell(L_1,...,L_n)$$

Dans le cas de couples lagrangiens (i.e. n=2), cette étude est aisée. En effet, d'après le lemme (2.1), on est ramené au cas de deux lagrangiens transverses d'un $(V,\sigma)$ ; or, le groupe symplectique $Sp(\sigma)$ opère transitivement sur ces couples (ch. I), ce qui permet d'affirmer que, pour $(G,.) = \mathbf{Z},+)$, toute fonction alternée de $(L_1,L_2)$, symplectiquement invariante est de la forme :

$$(L_1,L_2) = C(\ell - \dim(L_1 \cap L_2)) \ , \ \ell = \dim L_i$$

C étant une constante dépendant de la dimension $2\ell$ de l'espace symplectique considéré.

Si l'on suppose donnée une telle fonction $\gamma_\ell$ en toute dimension ($\dim V = 2\ell$ , $\ell$ variant de 1 à $\infty$ ) et si on suppose $\gamma_\ell$ **décomposable**, i.e. pour un couple $(L_1',L_2')$ de lagrangien d'un $(V',\sigma')$ et un couple $(L_1'',L_2'')$ de lagrangien d'un $(V'',\sigma'')$, on a :

$$\gamma(L_1' \times L_1'', L_1' \times L_2'') = \gamma(L_1',L_2') \ \gamma(L_1'',L_2''),$$

alors, cette constante C **ne dépend pas** de $\ell$ .

(La notion de décomposabilité se définit de la même façon pour une fonction de n-uples lagrangiens).

**DEFINITION :** *Un indice de Maslov consiste en la donnée d'une fonction* ***alternée*** $\gamma_E(L_1,L_2,L_3) \in G$ *pour tout espace symplectique* E *de dimension finie sur un corps* K *cette fonction étant de plus* ***symplectiquement invariante*** *et* ***décomposable***.

**REMARQUES :** Du théorème de décomposition (2.3) il résulte aisément que :

1) Une fonction alternée décomposable $\gamma_\ell(L_1,L_2,L_3)$ est un indice de Maslov dès que, pour $\ell = 1$, $\gamma_1(L_1,L_2,L_3)$ en est un.

2) Un indice de Maslov $\gamma_\ell$ est symétrique (resp. antisymétrique) pour tout $\ell$ dès qu'il l'est pour $\ell = 1$.

### (3.2) - INDICES DE TRIPLES DE DROITES.

Nous nous limiterons aux cas $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(V,\sigma)$ un K-espace sylmplectique de dimension 2.

**LEMME** : *Le nombre de classes de transitivité de* $Sp(\sigma)$ *sur les triples de droites homogènes,* ***deux à deux distinctes de*** $V$, *est* 1 *pour* $K = \mathbb{C}$ *et* 2 *pour* $K = \mathbb{R}$.

**PREUVE** : Compte-tenu de la transitivitré du groupe symplectique sur les couples lagrangiens transverses on peut se limiter au cas où les droites extrêmes d'un tel triple sont les axes de coordonnées de $K^2$. Or dans $Sp(1,K) = SL(2,K)$ le sous-groupe des matrices diagonales $(k,k^{-1})$ préserve chaque hyperbole $xy = c$. Les points d'intersection d'une droite $y = mx$, $m \neq o$, avec cette hyperbole étant donnés par l'équation

$$x^2 = - m^{-1}.c,$$

on se rend compte que, pour $K = \mathbb{C}$, se sous-groupe diagonal est transitif sur les triplés ($y=o$ , $y=mx$ , $x=o$) et que, dans le cas $K = \mathbb{R}$, il faut se limiter à des droites $y = mx$ à pente de même signe pour avoir cette transitivité.

**COROLLAIRE :**

*i) Pour* $K = \mathbb{C}$ , *une fonction alternée de droites* $\gamma(L_1,L_2,L_3)$, *symplectiquement invariante, ne prend que deux valeurs* $(1,a)$ ; *elle est toujours* ***symétrique.***

*ii) Pour* $K = \mathbb{R}$ , *une fonction alternée de droites* $\gamma(L_1,L_2,L_3)$, *symplectiquement invariante et* ***antisymétrique*** *ne prend que trois valeurs* $(1,a,a^{-1})$.

(3.2) **Cas général.**

**LEMME 1** : *Toute indice de Maslov s'annule sur tout triple lagrangien grossier.*

(Ceci résulte immédiatement de la remarque qui suit la démonstration du théorème (2.3) de décomposition).

De ce théorème, des lemmes 2 et 3 de (2.2) et de la proposition qui suit le théorème (2.3) on déduit aisément le théorème fondamental que voici :

**THEOREME** : *Toute application alternée* $\gamma_1(L_1,L_2,L_3)$ *de droites, et qui est* ***symplectiquement invariante,*** *se prolonge canoniquement en un indice de Maslov* $\gamma_\ell$ .

**Convention.**

Pour $K = \mathbb{R}$ , l'indice de Maslov défini à partir de la fonction **alternée antisymétrique** $\tau_1$ telle que :

$$\tau_1(y=o\ , y=x, x=o) = 1 \in \mathbb{Z}$$

et dont la définition se complète par **invariance symplectique** sera appelé l'**indice de Maslov, réel, canonique.**

Voici deux formulations explicites de cet indice de Maslov traditionnel.

<u>1) (Leray-Souriau)</u>

Pour tout triple discret $(L_1,L_2,L_3)$ de lagrangiens d'un espacesymplectique réel $(V,\sigma)$, l'indice de Maslov est la **signature** de la forme quadratique définie canoniquement sur $L_2$ par $\sigma$ et le couple transverse $(L_1,L_3)$. On se ramène au cas général grâce au théorème de décomposition discret-grossier (2.2 lemme 2). Il est à noter que, en dimension $\ell = 1$, la forme quadratique de Leray-Souriau sur la droite $y = x\mathrm{tg}\Theta$ s'identifie au nombre réel $\cos\Theta \,.\, \sin\Theta$, ce qui fait que ql'indice de Maslov-Leray-Souriau, prend bien la valeur 1 sur le triple ($y = o$ , $y = x.\mathrm{tg}\Theta, x = o$) lorsque $o < \Theta < \frac{\pi}{2}$ , mod $\pi$ , et la valeur -1 lorsque $\frac{\pi}{2} < \Theta < \pi$ , mod $\pi$.

2 ) (DAZORD-KASHIWARA)

Si l'on désigne par $\tau(L_1, L_2, L_3)$ la signature de la forme quadratique définie sur $L_1 \times L_2 \times L_3$ par :

$$\sigma L_1, L_2, L_3(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, x_3) + \sigma(x_3, x_1)$$

on vérifie aisément l'invariance symplectique et la décomposabilité de cette fonction. En dimension lagrangienne $\ell = 1$ on s'assure aisément que, pour un triple ($\mathbb{R} \times o$, $z = x.\mathrm{tg}\,\Theta$ , $o \times \mathbb{R}$), cette forme quadratique vaut

$$\sigma(x,y,z) = xy \sin\Theta + yz \cos\Theta - zx$$

$$= -(x - y.\sin\Theta)(z - y.\cos\Theta) + \cos\Theta.\sin\Theta.y^2$$

i.e. , elle est de même signature que $y\cos\Theta.\sin\Theta\; y^2$.

**REMARQUES.**

1/ Dans le cas complexe ($K = \mathbb{C}$), tout indice de Maslov est symétrique et prend pour valeurs $1, z, \ldots, z^n, \ldots$; c'est ainsi que pour $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , les indices de Maslov sont de la forme

$$(L_1, L_2, L_3)_\ell \longrightarrow e^{2\pi\, i\, \alpha(\ell - \dim(L_1 \cap L_2 + L_2 \cap L_3 + L_3 \cap L_1)}$$

$\alpha$ étant une constante indépendante du degré de liberté $\ell$ .

2/ dans le cas d'un corps quelconque K de caractéristique différente de 2, on peut encore utiliser la forme quadratique de Kashiwara lorsqu'on dispose d'un morphisme canonique du groupe de Witt W(K) dans le groupe abélien G considéré (c'est le cas de $W(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ et $W(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2 \simeq \{-1,+1\}$ lorsqu'on prend, $G = \mathbb{T}$).

3/ La théorie de la décomposition "discret-grossier" permet de s'assurer que la classe de transitivité symplectique d'un triple lagrangien quelconque $(L_1,L_2,L_3)$ ne dépend que de l'indice de Maslov $\tau(L_1,L_2,L_3)$ et de la dimension des espaces isotropes $L_i \cap L_j$, $i < j$, et $L_1 \cap L_2 \cap L_3$, ce qui généralise un résultat de Souriau.

## 4. FORMULE CYCLIQUE DE KASHIWARA :

### (4.1) Retour à la grassmannienne lagrangienne :

Soit $(V,\sigma)$, un espace symplectique de dimension finie $2\ell$ sur un corps commutatif quelconque K. Notons $\mathcal{L}(\sigma)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de $(V,\sigma)$ et, pour tout $L \in \mathcal{L}(\sigma)$, notons $\mathcal{L}_L(\sigma)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\sigma)$ transverses à L. Nous allons voir que ces $\mathcal{L}_L(\sigma)$ sont des espaces affines et, comme ils se coupent tous deux à deux, ils constituent donc un atlas de $\mathcal{L}(V)$ pour une structure de K-**variété algébrique** (irréductible).

**PROPOSITION** : *Pour tout couple* $(L_1,L_2)$ *d'éléments* ***transverses*** *de* $\mathcal{L}(V)$, *il existe une correspondance biunivoque canonique entre les* ***projecteurs lagrangiens*** p *de* V *de* ***noyau*** $L_1$ *et les* ***formes bilinéaires symétriques*** $\beta$ de $L_2$ ; *cette correspondance est définie par*

$$\beta(x,y) = \sigma(x,py)$$

***Le noyau*** *de* $\beta$ *est égal à* $L_2 \cap \mathrm{Im}\,p$.

**PREUVE** : Si $L_3$ est l'image d'un projecteur lagrangien p de noyau $L_1$, on a ddéjà vu (2.3 lemme 2) que la décomposition $=V = L_1 \oplus L_3$ définit canoniquement une forme bilinéaire symétrique sur $L_2$ :

$$(x,y) \to \sigma((1-p)x,py) = \sigma(x,py) = ((1-p)x,y).$$

Réciproquement, la donnée d'une forme bilinéaire symétrique sur $L_2$ équivaut, compte-tenu de la dualité établie entre $L_1$ et $L_2$ par $\sigma$ , la donnée d'une application linéaire $u : L_2 \to L_1$ vérifiant l'identité en $(x,y) \in L_2 \times L_2$ :

(1) $$\sigma(ux,y) + \sigma(x;uy) = o.$$

On a donc $\beta(x,y) = \sigma(ux,y)$ et il est aisé de s'assurer que, en posant $p(x) = o$ si $x \in L_2$ et $p(y) = y - u(y)$ si $y \in L_2$, on définit un projecteur lagrangien de noyau $L_2$ vérifiant sur $L_1 \times L_2$ l'identité $\sigma(x,py) = \beta(x,y)$. Considérons un $x \in L_2$ tel que $\sigma(x,py) = o$, pour tout $y \in L_2$ ; alors $\sigma(x,py) = o$ pourf tout $y \in V$ du fait que $\mathrm{Ker}p = L_1$ et que $V = L_1 \oplus L_2$ , on déduit alors, de l'identité

$$\sigma(x,py) + \sigma(px,y) = \sigma(x,y)$$

des projecteurs lagrangiens, que $\sigma((1-p)x,y) = o$ pour tout $y \in V$ d'où $x \in L_2 \cap \mathrm{Im}p$.

**COROLLAIRE 1** : $\mathfrak{L}_L(V)$ *est un espace affine admettant pour espace vectoriel directeur* ***l'espace des formes bilinéaires symétriques*** *sur* L.

**COROLLAIRE 2** : $\mathfrak{L}(V)$ *est une* ***variété algébrique*** *de dimension* $\frac{\ell(\ell+1)}{2}$.

**COROLLAIRE 3 (K infini)** : *Pour toute suite finie* $(L_1,\dots,L_n)$ *d'éléments de* $\mathfrak{L}(V)$ *il existe un élément de* $\mathfrak{L}(V)$ ***transverse*** *à chaque* $L_i$.

## (4.2) Classe de Witt de la forme quadratique de Kashiwara :

**LEMME 1** : *Pour tout couple* (L,M) *d'éléments de* $\mathfrak{L}(\sigma)$, *la forme quadratique définie sur* $L \times M$ *par*

$$\sigma_{L,M} : (x,y) \to \sigma(x,y)$$

*est* ***neutre.***

**PREUVE :** La forme bilinéaire associée à $\sigma_{L,M}$ étant :

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \to \sigma(x_1,y_2) + \sigma(x_2,y_1),$$

il est clair que le noyau de cette forme quadratique est :

$$N = (L \cap M) \times (M \cap L)$$

et, comme

$$L / L \cap M \times M / M \cap L$$

est une décomposition de Witt de l'espace quadratique régulier $(L \times M/N , \sigma_{L,M})$, c'est terminé.

**LEMME 2 :** *Pour tout triple* $(L_1,L_2,L_3)$ *d'éléments de* $\mathfrak{L}(\sigma)$ *où* $L_1$ *et* $L_3$ *sont* ***transverses,*** *la forme quadratique de Kashiwara :*

$$\sigma L_1,L_2,L_3 = \sigma L_1L_2 + \sigma L_2,L_3 + \sigma L_3L_1$$

*et la forme mquadratique* $\sigma^{L_2,L_1L_3}$ *, définie canoniquement sur* $L_2$ *par* $(L_1,L_3)$*, sont dans* ***la même classe*** *de Witt.*

**PREUVE :** Notons $p_{13}$ (resp. $p_{31}$) la projection sur $L_1$ (resp. $L_3$) dans la direction $L_3$ (resp. $L_1$) . De la formule évidente :

$$\sigma L_1L_2L_3(x_1,x_2,x_3) = \sigma^{L_2}_{L_1L_3}(x_2) - \sigma(x_1-p_{13}x_2,x_3-p_{31}x_2)$$

on déduit que $\sigma L_1L_2L_3$ est la somme directe de (resp. $\tilde{\sigma}_{L_1L_3}$) est l'image réciproque de $\sigma^{L_2}_{L_1L_3}$ (resp. $\sigma_{L_1L_3}$) par l'application linéaire composée :

$$L_1 \times L_2 \times L_3 \xrightarrow{\Phi} L_1 \times L_2 \times L_3 \xrightarrow{pr} L_2$$

(resp. $L_1 \times L_2 \times L_3 \xrightarrow{\Phi} L_1 \times L_2 \times L_3 \xrightarrow{pr} L_1 \times L_3$)

où $\Phi$ est la bijection linéaire $(x_1,x_2,x_3) \to (y_1,y_2,y_3)$ définie par :

$$y_1 = x_1 - p_{13}x_2 \ , \quad y_2 = x_2 \ , \quad y_3 = x_3 - p_{31}x_2 \, .$$

Comme $q_{L_1L_3}$ est neutre (lemme 1), c'est terminé.

**LEMME 3** : *Soient* $(L_1,L_2,L_3)$ *un triple d'éléments de* $\mathfrak{L}(\sigma)$ *et* M *un élément de* $\mathfrak{L}(\sigma)$ ***transverse*** *à chaque* $L_i$. *Alors la forme quadratique de Kashiwara* $q_{L_1L_2L_3}$ *est isomorphe à la somme directe des formes quadratiques*

$$\sigma^{L_1}_{L_3M} \ , \quad \sigma^{L_2}_{L_1M} \ , \quad \sigma^{L_3}_{L_2M}$$

**PREUVE** : Cette somme directe vaut

$$q(x_1,x_2,x_3) = \sigma(p_3x_1,x_1) + \sigma(p_1x_2,x_2) + \sigma(p_2x_3,x_3)$$

où $p_1,p_2,p_3$ sont les projections sur $L_1,L_2,L_3$ dans la direction M. Or :

$$\sigma(p_1x_2,x_2) - \sigma(x_1+p_1x_2,x_2 \ , \ x_2+p_2x_3) = (\sigma(x_1,x_2) + \sigma(x_1,p_2x_3) + \sigma(p_1x_2,p_2x_3))$$

et, des deux relations obtenues par permutation circulaire sur (1,2,3) on déduit, par addition parallèlement à la diagonale des seconds membres, que la somme circulaire de

$$\sigma(p_1x_2,x_2) - \sigma(x_1+p_1,x_2 \ , \ x_2+p_2x_3) - (\sigma(x_1,x_2) + \sigma(x_2,p_3x_1) + \sigma(p_3x_1,p_1x_2))$$

est nulle. Mais :

$$\sigma(x_1,x_2) + \sigma(x_2,p_3x_1) + \sigma(p_3x_1,p_1x_2) =$$

$$= \sigma(x_1,p_3x_2) + \sigma(p_3x_1,p_1x_2) =$$

$$= \sigma(x_1,p_3x_2) + \sigma(x_1,p_1x_2) - \sigma(x_1,p_3p_1x_2)$$

$$= \sigma(x_1,p_3x_2) - \sigma(x_1,p_3x_2) = o \ .$$

Or l'application linéaire $(x_1,x_2,x_3) \to (y_1,y_2,y_3)$ définie par :

$$y_1 = x_1+p_1x_2 \ , \quad y_2 = x_2 + p_2x_3 \ , \quad y_3 = x_3 + p_3x_1$$

est bijective car on en tire :

$$p_1y_2 = p_1x_2 + p_1x_3 \quad , \quad p_1y_3 = p_1x_3 + x_1 \ .$$

d'où : $2x_1 = y_1 - p_1y_2 + p_1y_3$

et, par permutation circulaire :

$$2x_2 = y_2 - p_2y_3 + p_2y_1$$

$$2x_3 = y_3 - p_3y_1 + p_3y_2.$$

**THEOREME** : *Pour tout indice de Maslov* $\tau$ , ***antisymétrique***, *à valeurs dans un groupe abélien* (G,+), *via le groupe de Witt du corps de scalaires, on a, pour tout quadruple* $(L_1,L_2,L_3,L_4)$ *de* $\mathfrak{L}(\sigma)$ :

$$\tau(L_1,L_2,L_3) = \tau(L_2,L_3,L_4) - \tau(L_1,L_3,L_4) + \tau(L_1,L_2,L_4)$$

**PREUVE** : Les lemmes 2 et 3 donnent, pour tout lagrangien M transverse à $(L_1,L_2,L_3,L_4)$ :

$$\tau(L_2,L_3,L_4) = \tau(L_2,L_3,M) + \tau(L_3,L_4,M) + \tau(L_4,L_2,M)$$

$$\tau(L_1,L_3,L_4) = \tau(L_1,L_3,M) + \tau(L_3,L_4,M) + \tau(L_4,L_1,M)$$

$$\tau(L_1,L_2,L_4) = \tau(L_1,L_2,M) + \tau(L_2,L_4,M) + \tau(L_4,L_1,M)$$

d'où , par addition, après multiplication de la seconde égalité par -1, compte-tenu de l'antisymétrie de $\tau$ , la formule prévue.

# III. REPRESENTATION METAPLECTIQUE

## 1. EXTENSIONS CENTRALES D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE.

### (1.1) Généralités :

Une extension d'un groupe topologique H par un groupe topologique K consiste en la donnée d'un groupe topologique G et de deux morphismes de groupes topologiques.

$$(1) \qquad K \xrightarrow{\quad i \quad} G \xrightarrow{\quad p \quad} H$$

tels que :

i) $i(K) = p^{-1}(e)$, i.e. **l'image** de i est identique **au noyau** de p.

ii) i est une injection **fermée** et p une surjection **ouverte** si :

$$(1') \qquad K \xrightarrow{\quad i' \quad} G' \xrightarrow{\quad p' \quad} H$$

est une autre extension de H par K et s'il existe un morphisme de groupes $u : G' \longrightarrow G$ compatible avec ces deux extensions i.e. $u \cdot i' = i$ et $p \cdot u = p'$ alors u est bijectif. (Démonstration malaisée que le lecteur consciencieux aura soin dje faire). Si u est un homéomorphisme, on dit alors que c'est un **isomorphisme** de l'extension (1') vers l'extension (1).

Une extension (1) est dite **triviale** (ou fissible) si elle est isomorphe à l'extension canonique :

$$K \longrightarrow K \times H \longrightarrow H$$

Une extension (1) est dite **centrale** si i(K) appartient au centre de G.

**LEMME :** *Pour une extension d'un groupe topologique* H :

$$K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H$$

*les assertions suivantes sont équivalentes :*

*i)* p *admet une* ***section continue***

*ii)* i *admet une* ***rétraction continue***

*iii) il existe un* ***homéomorphisme*** $\Phi$ *de* G *sur* K×H *tel que* $\Phi . i$ *coïncide avec l'injection canonique* $k \to (k,e)$ *de* K *dans* K × H *et* $p . \Phi^{-1}$ *coïncide avec la projection canonique* $(k,h) \to h$ *de* K×H *sur* H.

**PREUVE :** Il est clair que ii) implique i et i'). Réciproquement, si p admet une section continue s, alors :

$$\Psi : (k,h) \longrightarrow i(k).s(h)$$

est une application bijective dont la réciproque est :

$$\Phi : g \quad (i_{-1}(g.(s.p)(g)^{-1} \text{ , } p(g)$$

(ceci est cohérent du fait que

$$p(g.(s.p(g)^{-1}) = p(g).p(g)^{-1} = e \text{ d'où } g.(s.p)(g)^{-1} \in i(K)).$$

Et il est clair que :

$$(p.\Psi)(k,h) = e.(p.s)(h) = h$$

et que :

$$(\Phi.i)(k) = (k.i^{-1}(s(e)^{-1}),e).$$

Or, sous réserve de multiplier (à gauche ou à droite) la section s par $s(e)^{-1}$, on peut supposer que s(e) = e, ce qui donne bien :

$(\Phi.i)(k) = (k,e)$.

L'implication i') $\longrightarrow$ ii) se fait de la même façon : à l'aide d'une rétraction continue r de i, on obtient deux bijections réciproques :

$$g \longrightarrow (r(g);p(g)) \quad , \quad (k,h) \longrightarrow i(k)s(h)$$

où s est la section continue de p obtenue par la formule :

$$s(p(g)) = (i.r)(g)^{-1}.g.$$

**REMARQUE** : Si cette rétraction r est un morphisme de groupes, alors il en est de même de la section s ainsi construite à partir de r.

**COROLLAIRE** : *Une extension* $K \longrightarrow G \longrightarrow H$ *est **triviale** si, et seulement si,* i *admet une **rétraction continue** qui est un morphisme de groupes.*

**DEFINITION** : *Une extension de groupe topologique sera dite **bonne** (ou semi-fissible) si elle satisfait aux conditions équivalentes du lemme qui précède.*

Un **contre-exemple** : Si $K \longrightarrow G \longrightarrow H$ est une bonne extension alors G est connexe si, et seulement si, K et H le sont, de sorte que les extensions connexes d'un groupe (connexe) par un groupe discret ne sont pas bonnes ; c'est le cas de l'extension bien connue :

$$O \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 1 \ ;$$

en d'autres termes, l'application exponentielle $t \to e^{2i\pi t}$ de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique $\mathbb{T}$ n'a pas de section continue.

## (1.2) Cocycles attachés à une extension centrale :

Soient H et K deux groupes topologiques ; on suppose K abélien. Pour tout entier $n \geq o$, on désigne par $C^n(H,K)$ l'ensemble des applications continues de $H^n$ danK (en particulier $C°(H,K) = K$) et on définit sur ces groupes abéliens un complexe (le complexe de Hochschilf pour l'action triviale de H sur K) en posant :

$$d^{(1)}f(x,y) = f(y).f(xy)^{-1}.f(x)$$

$$d^{(2)}f(x,y,z) = f(y,z).f(xy,z)^{-1}.f(x,yz).f(x,y)^{-1}$$

....

Les éléments du noyau $Z^2(H,K)$ de $d^{(2)}$ sont les **cocycles** d'ordre 2, ceux de l'image $B^2(H,K)$ de $d^{(1)}$ sont les **cobords** d'ordre 2. Le groupe-quotient

$$H^2(H,K) = Z^2(H,K) / B^2(H,K)$$

est le groupe de **cohomologie** d'ordre 2 de H à valeurs dans K.

**REMARQUE :** Tout cocycle c(x,y) est cohomologue à un cocycle normal c'(i.e.. c'(i.e)= e) ; en effet, pour tout cobord $d^{(1)}f$, on a :

$$(d^{(1)}f)(e,e) = f(e)$$

et il suffit de prendre $c' = c.(d^{(1)}f)^{-1}$ avec tout $f \in c^1(H,K)$ telle que f(e) = c(e,e).

**COCYCLE ASSOCIE A UNE SECTION CONTINUE :**

Soient $K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H$ une bonne extension centrale de groupe topologique et $s : H \to G$ une section continue de p ; on définit alors en 2-cocycles $c_s$ de H dans K en posant, pour tout couple $(x,;y) \in H \times H$ :

$$c_s(x,y) = i^{-1}(s(x)s(y)s(xy)^{-1})$$

Enfin, il est clair que $p(s(x).s(y).s(xy)^{-1} = e$ et que pour tout triple $(x,y,z)$ d'éléments de H :

$$i(c_s(xy,z).c_s(x,yz)^{-1}) = s(xy)s(z).s(yz)^{-1}.s(x)^{-1}$$

et :

$$i(c_s(y,z)c_s(x,y)^{-1}) = s(y).s(z)s(yz)^{-1}.s(xy)s(y)^{-1}.s(x)^{-1}$$

$$= s(xy).s(z).s(yz)^{-1}.s(x)^{-1}$$

du fait que $s(y)s(z).s(yz)^{-1}$ est central dans G.

Le changement de section continue s de p ne modifie pas la classe de cohomologie de s. En effet, si s' est une autre section continue de p, des produits $s(x)^{-1}.s'(x)$ et $s'(x).s(x)^{-1}$, $x \in H$ , sont centraux dans G d'où $\tau(x) \in K$ défini par :

$$s(x)^{-1}.s'(x)(=i\tau(x) = )s'(x).s(x)^{-1}$$

et alors :

$$i_0(c_s.d)(x,y) = s(x).s(y).s(xy)^{-1}.s(xy)^{-1}(i\tau)(x)(i\tau)(y)$$

$$= s(x)(i\tau)(x).s(y).(i\tau)(y).s'(xy)^{-1}$$

$$= s'(x).s'(y).s'(xy)^{-1}$$

Par ailleurs, l'homéomorphisme canonique $\Phi$ de G sur $K \times H$ défini par s (Preuve du lemme (1.1)) :

$$\Phi(g) = (i^{-1}(g.sp(g)^{-1}),p(g))$$

donne, avec la décomposition canonique $g = i(k).s(h)$ :

$$\Phi(g_1g_2) = (i^{-1}(g_1g_2.sp(g_1g_2)^{-1} ,h_1h_2)$$

$$= (i^{-1}(i(k_1)i(k_2)s(h_1)s(h_2)s(h_1h_2)^{-1}\ , h_1h_2)$$

$$= (k_1k_2c_s(h_1,h_2),h_1h_2)$$

d'où, par transport de structure, la loi de groupe sur $K\times H$ :

$$(k_1,h_1).(k_2,h_2) = (k_1k_2.c_s(h_1,h_2),h_1h_2).$$

In abstract, ceci invite à associer à tout cocycle **normal** $c \in Z^2(H,K)$ la loi interne sur $K\times H$ :

$$(k_1,h_1)(k_2,h_2) = (k_1.k_2.c(h_1,h_2),h_1h_2).$$

On définit ainsi une loi associative (par la cocyclicité de c) à élément neutre (e,e) (car $c(e,e) = e \Rightarrow c(e,h) = c(e,h) = c(h,e) = e$) et pour laquelle tout élément est inversible.

$$(k,h)^{-1} = (k^{-1}c(h,h^{-1})^{-1},h^{-1})$$

(le lecteur pourra vérifier, avec $x = z = h$ et $y = h^{-1}$, que

$$c(h,h^{-1}) = c(h^{-1},h)\ .$$

D'où une extension centrale de K par H : $K \to K \underset{c}{\times} H \to H$

Deux cocycles **cohomologues** c et c' définissent deux extensions **isomorphes** de K par H. En effet, si

$$c' = c.df$$

alors

$\Theta : (k,h) \longrightarrow (kf(h),h)$ est un isomorphisme de $K \underset{c}{\times} H$ sur $K \underset{c}{\times} H$ :

$$\Theta((k_1,h_1).(k_2,h_2)) = (k_1.k_2.c'(h_1,h_2).b(h_1,h_2),h_1.h_2)$$

alors que :

$$\Theta(k_1,h_1).\Theta(k_2,h_2) = (k_1.k_2.c(h_1,h_2).f(h_1).f(h_2),h_1.h_2).$$

En résumé, on a le :

**THEOREME** : *Il existe une correspondance biunivoque canonique entre* $\mathcal{H}^2(H,K)$ *et les classes d'isomorphisme des* ***bonnes extensions centrales*** *de* k *par* H :

**EXTENSION CENTRALE ASSOCIEE A UNE FORME BI-ADDITIVE CONTINUE :**

Soient H et K deux groupes topologiques commutatifs notés additivement. Si $\gamma : H \times H \to K$ est une application bi-additive continue, il est aisé de vérifier que c'est un 2-cocycle de H dans K. Si tout élément de K est divisible par 2 et si $\gamma$ est **symétrique** on a alors, avec :

$$\hat{\gamma}(x) = \gamma(x,x) \ , \quad \gamma = d^1(\frac{1}{2}\hat{\gamma})$$

de sorte que $\gamma$ définit alors une extension triviale de H par K. On peut donc affirmer que toute application bi-additive continue $\gamma : H \times H \to K$ définit **la même classe d'extension** de H par k que son **antisymétrisée** :

$$(x,y) \to \frac{1}{2}(\gamma(x,y) - \gamma(y,x)).$$

## 2. REPRESENTATIONS DU GROUPE DE HEISENBERG.

### (2.1) Algèbre et groupe de Heisenberg.

Etant donné un K-espace symplectique $(V,\sigma)$, on définit sur $K \times V$ une structure d'algèbre de Lie 2-nilpotente en prenant pour crochet :

$$(1) \qquad [(\xi,x),(\eta,y)] = (\sigma(x,y),o)$$

Cette algèbre de Lie sera notée $\underline{n}(\sigma)$. Son centre est de dimension 1 c'est la droite $K\varepsilon$ engendré par $\varepsilon = (1,o)$.

Si $K = \mathbb{R}$ , on définit une application exp : $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{T} \times V$ ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1$) en posant :

(2) $\qquad \exp(\xi,x) = (e^{2\pi i\xi},x).$

En conformité avec las règle de Campbell-Hausdorff :

exp a.exp b = exp(a+b+ \F(1,2) [a,b]+...)

on définit sur $\mathbb{T} \times V$ une unique structure de groupe de Lie admettant $\underline{n}(\sigma)$ pour algèbre de Lie associée et l'application (2) pour exponentielle. Ce groupe de Lie, noté $N(\sigma)$, a pour loi :

$$(a,x).(b,y) = (abc^{\pi i\sigma(x,y)},x+y)$$

i.e. le 2-**cocycle** de V à valeurs dans $\mathbb{T}$ :

$$(x,y) \to e^{\pi i\sigma(x,y)}$$

définit une **extension centrale** :

$$\mathbb{T} \xrightarrow{i} N(\sigma) \xrightarrow{p} V$$

Le centre du **groupe de Heisenberg** $N(\sigma)$ est exactement $i(\mathbb{T})$ ; c'est donc le sous-groupe à un paramètre exp $t\xi$ engendré par $\xi = (1,o)$.

Si $(V_1,\sigma_1)$ et $(V_2,\sigma_2)$ sont deux espaces symplectiques réels, le groupe de Heisenberg $N(\sigma_1 \times \sigma_2)$ de l'espace symplectique-produit $(V_1 \times V_2,\sigma_1 \times \sigma_2)$ est isomorphe au quotient du groupe-produit $N(\sigma_1) \times N(\sigma_2)$ par le sous-groupe central des $(z,z^{-1})$, $z \in r(\mathbb{T})$.

## (2.2) Représentations unitaires normales.

Une représentation unitaire U d'un groupe de Heisenberg $N(\sigma)$ dans un espace de Hilbert **complexe** H sera dite **normale** si :

$$U(z,o) = z.id_H \quad , \quad z \in \mathbb{T}$$

On démontre (cf. Lyon-Vergne, p. 19 à 29) que les classes d'équivalence des représentations unitaires normales de $N(\sigma)$ sont **toutes multiples** d'une classe irréductible. (La classe des représentations de **Schrödinger** de $N(\sigma)$). Une telle représentation irréductible est obtenue par la méthode d'induction de **MACKEY** à partir d'un espace lagrangien $\ell \in \mathfrak{L}(\sigma)$.

Si on considère le sous-groupe abélien

$$L = \mathbb{T} \times \ell$$

(c'est un sous-groupe de Lie abélien de $N(\sigma)$), la représentation de Schrödinger définie par $\ell$ est

$$U_\ell = \mathrm{Ind}\overset{N}{\underset{L}{\uparrow}}(\chi)$$

où $\chi$ est le caractère de L qui prolonge canoniquement l'identité de $\mathbb{T}$. De façon précise, l'espace de Hilbert $H_\ell$ de cette représentation est le completé, pour la norme hilbertienne :

$$\phi \longrightarrow \int_{N/L} |\phi(\dot{x})|^2 d\dot{x})^{1/2} \quad ,$$

de l'espace $c_\ell$ des fonctions continues, à support compact $\phi : N \to \mathbb{C}$ vérifiant la condition de $\chi$-semi-invariance :

$$\phi(xy) = \chi(y)^{-1}\phi(x) \quad ; \quad x \in N \text{ et } y \in L$$

($d\dot{x}$ est une mesure N-invariante sur N/L). La représentation $U_\ell$ est définie par translation à gauche

$$(U_\ell(x_0)(\phi)(x) = \phi(x^{-1,o}.x)$$

et on a bien, pour une telle représentation :

$$(U(z,o)\phi)(x) = \phi(z^{-1},o).x) = \phi(x.(o,z^{-1})) = \chi(z^{-1},o)^{-1}.\phi(x)$$

$= z.\phi(x).$

Pour avoir explicitement une telle mesure $\dot{dx}$ on fait appel à un lagrangien $\ell'$ transverse à $\ell$. Comme tout élément n de N se décompose canoniquement en :

$$n = \exp x.y \quad , \quad x \in \ell' \text{ et } y \in L,$$

on voit que les fonctions $\phi : N \to \mathbb{C}$ , $\chi$-semi-invariantes, sont déterminées par leur restriction à $\ell'$. Par ailleurs $\exp : \ell' \to N$ donne, par passage au quotient, un homéomorphisme de $\ell'$ sur N/L et, du fait que sur $\ell'$ :

$$\exp(a+b) = \exp a.\exp b \quad ,$$

on voit alors que la donnée d'une mesure N-invariante sur N/L équivaut à celle d'une mesure de Lebesgue sur L' d'où :

$$H_\ell \simeq L^2(\ell')$$

Lorsqu'on change de lagrangien $\ell'$ transverse à $\ell$ , il suffit de prendre la mesure image de $d\ell'$ par la projection de direction $\ell$ pour conserver la mesure invariante choisie sur N/L.

Par cette lecture dans $L^2(\ell')$ la représentation de Schrödinger retrouve sa forme traditionnelle :

$$(U(y_o)\phi(y) = \phi(y-y_o) \qquad ; \quad y \in \ell' \text{ et } y_o \in \ell'$$

$$(U(x)\phi)(y) = e^{2\pi i\sigma(x,y)}\phi(y) \qquad x \in \ell$$

Le produit tensoriel des représentations de Schrödinger de deux groupes de Heisenberg $N(\sigma_1)$ et $N(\sigma_2)$ étant trivial sur la seconde diagonale $(z,z^{-1})$ de $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ , on obtient, par passage au quotient une représentation isomorphe à la représentation de Schrödinger de $N(\sigma_1 \times \sigma_2)$ du fait que, pour tout éclatement lagrangien $\ell = \ell_1 \times \ell_2$,

on a :

$$N/L = N_1/L_1 \times N_2/L_2 \qquad (L_i = \mathbb{T} \times \ell_i)$$

**(2.3) Action du groupe symplectique :**

On fait opérer le groupe symplectique $Sp(\sigma)$ sur $N(\sigma)$ par prolongement trivial sur $\mathbb{T}$ , i.e. pour tout $g \in Sp(\sigma)$ :

$$g(\alpha,x) = (\alpha,g.x) \qquad ; \qquad (\alpha,x) \in \mathbb{T} \times V)$$

On obtient ainsi un morphisme du groupe $Sp(\sigma)$ dans celui des **automorphismes** de $N(\sigma)$. De plus, cette action du groupe symplectique est compatible avec la représentation de Schrödinger en ce sens que, pour tout lagranmgien $\ell \in \mathfrak{L}(\sigma)$ et toute fonction $\phi : N \to \mathbb{C}$ , $\ell$-semi-invariante, la fonction $A(g)\phi$, $y \in Sp(\sigma)$, définie par :

$$(A(g)\phi)(x) = \phi(g^{-1}.x)$$

est $g(\ell)$-semi-invariante. Le choix d'une mesure de Lebesgue sur un lagrangien transverse à $\ell$ et $g(\ell)$ assure alors que :

**PROPOSITION :**

i) $A(g)$ est une **isométrie** de $H_\ell$ sur $H_{g(\ell)}$.

i)) Pour tout $n \in N(\sigma)$ on a :

$$A(g) \cdot U_\ell(n) = U_{g(\ell)}(g.n) \cdot A(g).$$

**3. ENTRELACEMENTS DES $H_\ell$ :**

Le fait que toutes les représentations de Schrodinger $U_\ell$ , $\ell \in \mathfrak{L}(\sigma)$ soient équivalentes assure, pour tout couple $(\ell_1,\ell_2)$ de lagrangiens de $(V,\sigma)$, l'existence d'un opérateur d'entrelacement $\mathcal{F}_{\ell_2\ell_1} : H_{\ell_1} \longrightarrow H_{\ell_2}$ , i.e. pour tout $n \in N(\sigma)$ :

$$U_{\ell_2}(x) \cdot \mathcal{F}_{\ell_2,\ell_1} = \mathcal{F}_{\ell_2\ell_1} \cdot U_{\ell_1}(x)$$

L'irréductibilité des représentations de Schrodinger assure (lemme de Schur) que $\mathcal{F}_{\ell_2 \ell_1}$ est défini à un facteur scalaire près.

Pour expliciter un tel opérateur d'entrelacement, on est amené à chercher une transformation qui fasse passer des fonctions $\ell_1$-semi-invariantes aux fonctions $\ell_2$-semi-invariantes : la formule intégrale :

$$(1) \qquad (\mathcal{F}_{\ell_2 \ell_1} \varphi)(n) = \int_{L_2/L_1 \cap L_2} \phi(nx)dx \quad ,$$

où dx est une mesure invariante sur $L_2 / L_1 \cap L_2$ , répond à la question ($L_i = \mathbb{T} \times \ell_i$). On a donc dans le cas particulier de $\ell_1 = \ell_2 (=\ell)$ :

$$\mathcal{F}_{\ell\ell} = id_{H_\ell}$$

L'inconvénient (provisoire !) de (1) est que $\mathcal{F}_{\ell_2 \ell_1}$ n'est déterminé qu'à un **facteur positif** près, ce qui fait qu'on n'est pas assuré que $\mathcal{F}_{\ell_2 \ell_1}$ est une isométrie. En fait, il existe un choix permettant de mettre en concordance les mesures invariantes sur $N/L_1$ , $N/L_2$ , $L_1/L_1 \cap L_2$ , $L_2/L_1 \cap L_2$ au moyen d'une base canonique de $(V,\sigma)$ d'un certain type.

Etant donné un couple lagrangien $(\ell_1, \ell_2)$ dans un espace symplectique $(V,\sigma)$ de dimension finie, on sait (II,2.1) qu'il existe une décomposition symplectique $V = V' \oplus V''$ telle que :

i) il existe une décomposition lagrangienne $V' = \ell'^{,1} \oplus \ell'^{,2}$ constituée par un supplémentaire $\ell_1$ de $\ell_1 \cap \ell_2$ dans $\ell_1$ et un supplémentaire $\ell'^{,2}$ de $\ell_1 \cap \ell_2$ dans $\ell_2$.

ii) $\ell_1 \cap \ell_2$ est un sous-espace lagrangien de V".

**DEFINITION** : *Une base canonique* $(p_1,\dots,p_n, q_1,\dots,q_n)$ *de* $(V,\sigma)$ *est dite* ***subordonnée*** *au couple de lagragiens* $(\ell_1, \ell_2)$ *si* $(p_1,\dots,p_r)$ *et* $(q_1,\dots,q_r)$,

$r = n\text{-}\dim(\ell_1 \cap \ell_2)$, *sont deux bases duales de* $\ell'^{,1}$ et $\ell'^{,2}$ et $(q_{r+1},\dots,q_n)$ *une base de* $\ell_1 \cap \ell_2$.

Soit m un supplémentaire lagrangien de $\ell_1 \cap \ell_2$ dans V" (e.g. un élément maximal de l'ensemble des sous-espaces isotropes de V transverses à $\ell_1 + \ell_2$). Il est clair que :

$$N/L_1 \simeq \ell'^{,2} + m \quad , \quad N/L_2 \simeq \ell'^{,1} + m$$

$$L_1/L_1 \cap L_2 \simeq \ell'^{,1} \quad , \quad L_2/L_1 \cap L_2 \simeq \ell'^{,2}$$

et il suffit alors de choisir sur $\ell'^{,1}$ et $\ell'^{,2}$ deux mesures de Lebesgue en dualité et sur m une mesure de Lebesgue quelconque pour avoir :

$$(2) \qquad \mathcal{F}_{\ell_2\ell_1} = \mathcal{F}_{\ell'_2\ell'_1} \otimes \mathcal{F}_{mm}$$

ce qui amène à étudier de plus près le cas de deux lagrangiens transverses.

**PROPOSITION** : *Si* $\ell_1$ *et* $\ell_2$ *sont deux lagrangiens transverses de* $(V,\sigma)$ *et* $(p_1,\dots,p_n\,;\,q_1,\dots,q_n)$ *une base canonique qui leur est subordonnée, alors* $H\ell_1$ *et* $H\ell_2$ *s'identifient canoniquement à* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathcal{F}_{\ell_2\ell_1}$ , $\mathcal{F}_{\ell_1\ell_2}$ *sont deux transformations de Fourier réciproques.*

**PREUVE** : Posons $P = {}^t(p_1,\dots,p_n)$ , $Q = {}^t(q_1,\dots,q_n)$ et notons matriciellement x.P (resp. x.Q) un vecteur variable de $\ell_1$ (resp. $\ell_2$) .Alors $xP \longrightarrow x$ (resp. $yQ \longrightarrow y$) identifie $H\ell_1$ (resp. $H\ell_2$ ) à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et, pour toute fonction continue $\phi$ à un support compact

$$(\mathcal{F}_{\ell_2\ell_1}\phi)(\exp.xP) = \int_{\ell_2} \phi(\exp(xP)\exp(yQ)dy)$$

$$= \int_{\ell_2} \phi(\exp(xQ)\exp(xP)\exp(x.{}^ty)\varepsilon)dy$$

$$= \int_{\ell_2} e^{-2\pi i x.^t y}\, \phi(\exp\, yQ.\exp\, xP)dy$$

$$= \int_{\ell_2} e^{-2\pi i x.^t y}\, \phi(\exp\, yQ)dy$$

On obtient de même, pour $\psi \in \overset{o}{C}_{\ell_2}$ :

$$(\mathcal{F}_{\ell_2\ell_1}\psi)(\exp yQ) = \int_{\ell_1} e^{2\pi i y.^t x}\, \phi(\exp.xP)dx$$

**COROLLAIRE 1 :** *Pour tout couple lagrangien* $(\ell_1,\ell_2)$ *et tout choix de base canonique subordonnée à ce couple,* $\mathcal{F}_{\ell_1\ell_2}$ et $\mathcal{F}_{\ell_1\ell_2}$ *sont deux isométries réciproques.*

(Ceci résulte de (2) et de la formule de Plancherel).

**COROLLAIRE 2 :** *Pour tout couple* (V,V') *d'espaces symplectiques réels de dimension finie et pour tout couple lagrangien* $(\ell_1,\ell_2)$ *de* (V *(resp.* $(\ell'_1,\ell'_2)$ *de* V') *on a :*

$$\mathcal{F}_{\ell_1\times\ell'_1,\,\ell_2\times\ell'_2} = \mathcal{F}_{\ell_1,\ell_2}\otimes\mathcal{F}_{\ell'_1,\ell'_2}\,.$$

## 4. FACTEUR D'INTRANSITIVITE :

### (4.1) Définition de $a(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ :

Etant donnés trois sous-espaces lagrangiens $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ d'un même espace symplectique réel $(V,\sigma)$ de dimension finie la transformation composée $\mathcal{F}_{\ell_1\ell_2}\,.\,\mathcal{F}_{\ell_2\ell_3}\,.\,\mathcal{F}_{\ell_3\ell_1}$, qui est évidemment dans le commutant de $U_{\ell_1}$, est un scalaire ; il existe donc un nombre :

$$a(\ell_1,\ell_2,\ell_3) \in \mathbb{T}$$

tel que cette transformation composée soit égale à

$$a(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\mathrm{id}_{H_{\ell,1}}$$

**PROPOSITION 1 :**

*i)* $a(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ *est* ***alternée*** *et* ***antisymétrique.***

*ii)* a *est un* ***invariant*** ***symplectique.***

**PREUVE :**

i) a est alternée du fait que $\mathfrak{F}_{\ell\ell} = \mathrm{id}_{H_\ell}$ et que $(\mathfrak{F}_{\ell'\ell}, \mathfrak{F}_{\ell'\ell})$ est un couple de transformations réciproques. Le caractère anmmtisymétrique de a résulte du fait que si trois transformations composables (u,v,w), bijectives, sont telles que u . v . w est un scalaire alors u . v . w = w . u . v = v . w . u.

ii) Ceci résulte de la relation de commutation (2.3) qui implique

$$A(g) \,.\, \mathfrak{F}_{\ell',\ell} = \mathfrak{F}_{g\ell',g\ell} \,.\, A(g).$$

**PROPOSITION 2 (Multiplicité) :** *Pour tout couple* $((V,\sigma),(V',\sigma'))$ *d'espaces symplectiques réels de dimension finie et tout triple lagrangien* $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ de $(V',\sigma')$) *on a* :

$$a(\ell_1 \times \ell_2,\ell_3) = e^{i\frac{\pi}{4}\tau(\ell_1,\ell_2,\ell_3)}$$

*($\tau$ est l'indice de Kashiwara).*

**PREUVE** : La théorie développée au chapitre II permet de se ramener au cas d'un degré de liberté, i.e. $(V,\sigma) = (\mathbb{R}^2$, can.) ; on peut même prendre pour $\ell_1$ et $\ell_2$ les axes de coordonnées avec

$$P = {}^t(1,o) \quad , \quad Q = {}^t(o,1)$$

Soit $\ell_3$ la droite d'équation $y = \lambda x$, $\lambda \neq o$... øn a alors (les indices se rapportant aux droites $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ considérées) :

$$(F_{1,2}\phi)(\exp xQ) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\exp xQ.\exp \xi P)d\xi$$

et, pour réduire cette formule lorsque $\phi$ est $\ell_3$-semi-invariante, on utilise les formules évidentes, avec $E = (o,1)$

$$\exp(\xi-\lambda x)P.\exp x(\lambda P+Q) = \exp(xQ + \xi P + \frac{x}{2}(\xi-\lambda x)E)$$

$$\exp xQ.\exp \xi P = \exp(xQ) + \xi P - \frac{1}{2}\xi x E)$$

d'où , sous cette hypothèse sur $\phi$ :

$$(F_{1,3}\phi)(\exp xQ) = e^{-i\pi\lambda x^2} \int \phi(\exp(\xi-\lambda x)P)e^{2i\pi x \xi} d\xi \ ,$$

de sorte que, en identifiant respectivement $\mathcal{H}_{\ell_1}$ et $\mathcal{H}_{\ell_2}$ à $L^2(\mathbb{R})$ au moyen de $x \to xQ$ et $x \to xP$ :

$$(\mathcal{F}_{1,3}\phi)(x) = e^{-i\pi\lambda x^2,} \int \phi(\xi-\lambda x)e^{2i\pi x\xi,} d\xi$$

i.e., après changement de variable :

$$(1) \qquad \mathcal{F}_{1,3} = e^{i\pi\lambda x^2,} \ . \ \mathcal{F}^{-1} \ .$$

Par un calcul analogue :

$$(\mathcal{F}_{3,2}\phi)(\exp.xP) = \int \phi(\exp xP.\exp \xi(\lambda P+Q)d\xi$$

qui, après qu'on ait écrit l'intégrande sous la forme :

$$\phi(\exp(x+\lambda\xi)P.\exp\xi Q.\exp(-\tfrac{\lambda\xi^2}{2})\ E),$$

devient pour une fonction $\ell_2$-semi-invariante $\phi$ :

$$(\mathcal{F}_{3,2}\phi)(x) = \int \phi(x+\lambda\xi)e^{i\pi\lambda\xi^2}\, d\xi$$

d'où, pour $\lambda = 1$

$$(\mathcal{F}_{3,2} \cdot \mathcal{F}_{2,1}\, \phi)(x) = \int \mathcal{F}\phi(x+\xi)e^{i\pi\xi^2}\, d\xi$$

$$= \int e^{-2\pi i\xi x}\, \phi(\xi).\mathcal{F}(e^{i\pi\xi^2})\, d\xi\ .$$

Or, on sait (cf. IGUSA p. 5 ou LION-VERGNE p. 49) que :

$$\mathcal{F}(e^{i\pi\xi^2}) = e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\pi\xi^2}$$

d'où :

$$\mathcal{F}_{3,2} \cdot \mathcal{F}_{2,1} = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \mathcal{F} \cdot e^{-i\pi x^2}\ ,$$

ce qui, compte-tenu de (1), s'écrit :

$$\mathcal{F}_{1,3} \cdot \mathcal{F}_{3,2} \cdot \mathcal{F}_{2,1} = e^{i\frac{\pi}{4}} . \mathrm{id}\ ;$$

formule qui, en raison de l'invariance symplectique, reste valable pour $\lambda > o$. Pour $\lambda < o$ il suffit de changer i en -i. Or pour $\lambda > o$ (resp. $\lambda < o$), $\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ vaut 1 (resp. -1) d'où, dans tous les cas :

$$\mathcal{F}_{1,3} \cdot \mathcal{F}_{3,2} \cdot \mathcal{F}_{2,1} = e^{i\frac{\pi}{4}\tau(\ell_1,\ell_2,\ell_3)}$$

puisque le cas où deux des droites $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ coïncident est évident.

## 5. MESURES DE FOURIER DEFINIES PAR UN AUTOMORPHISME SYMPLECTIQUE

### (5.1) Multivecteurs de degré maximal :

Etant donné un espace vectoriel E de dimension finie on sait que les produits extérieurs $\Lambda^n E$ se réduisent à o pour n> dim E et que pour n = dim E, $\Lambda^n E$ est de dimension 1 ; cette droite sera notée $\Lambda^{max}(E)$.

**PROPOSITION :** *Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E, *il existe un isomorphisme canonique*

$$\Lambda^{max}(E/F) \otimes \Lambda^{max}(F) \simeq \Lambda^{max}(E)$$

**PREUVE :** Désignons par r (resp s) la codimension (resp. la dimension) de F ; alors, pour tout :

$$(x_1,\ldots,x_r ; y_1,\ldots,y_s) \in (E/F)^r \times F^s ,$$

on définit sans anbiguité un (r+s)-vecteur de E :

$$x^1 \wedge \ldots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_s$$

en choisissant arbitrairement $x_i \in x_i$ pour chaque indice $i \in \{1,\ldots r\}$ , d'où une application linéaire non triviale :

$$\phi : \Lambda^{max}(E/F) \otimes \Lambda^{max}(F) \longrightarrow \Lambda^{max}(E)$$

et, comme il s'agit d'espaces vectoriels de dimension 1, c'est terminé.

**REMARQUE :** L'isomorphisme réciproque est moins évident ; pour l'obtenir, on choisit une base $(e_1,\ldots,e_s, f_1,\ldots,f_s)$ de E ; avec des $f_i$ dans F ; alors

$$\phi^{-1}(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_s) = (\dot{e}_1 \wedge \dots \wedge \ddot{e}_r) \otimes (f_1 \wedge \dots \wedge f_s)$$

**COROLLAIRE 1 :** *Pour tout couple* $(F_1,F_2)$ *de sous-espacves vectoriels de* E, *on a des isomorphismes canoniques :*

*i)* $\Lambda^{max}(E/F_1 \cap F_2) = \Lambda^{max}(E/F_1 + F_2) \otimes \Lambda^{max}(F_1+F_2 / F_1 \cap F_2)$

*ii)* $\Lambda^{max}(E) = \Lambda^{max}(E/F_1) \otimes \Lambda^{max}(E/F_2)$

*si* $F_1$ *et* $F_2$ *sont supplémentaires.*

**COROLLAIRE 2 :**

$$\Lambda^{max}(E/F_1 \cap F_2) = \Lambda^{max}(E/F_1+F_2) \otimes \Lambda^{max}(F_1+F_2/F_1) \otimes \Lambda^{max}(F_1+F_2/F_2)$$

(Vérification aisée confiée au lecteur).

**Exemple canonique :** Si $(V,\sigma)$ est un espace symplectique de dimension 2n, alors pour toute base canonique $(p_1,\dots,p_n , q_1,\dots,q_n)$ de $(V,\sigma)$ on a :

$$< \Lambda^n\sigma, p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \dots \wedge q_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} ,$$

ce qui assure que le multi-vecteur $p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \dots \wedge q_n$ est indépendant de la base canonique choisie.

**(5.2) Densités) :**

Etant donné un nombre réel $\alpha$ , par densité d'ordre $\alpha$ sur un espace vectoriel réel E, de dimension finie, on entend une application :

$$\rho : \Lambda^{max}(E) \setminus \{o\} \longrightarrow e^{\mathbb{R}}, (=]o,+\infty[)$$

telle que :

$$\rho(\lambda v) = |\lambda|^{\alpha}\rho(v) \quad ; \quad \lambda \neq o , v \in \Lambda^{max}E \setminus \{o\} .$$

A tout élément $u \in \Lambda^{max}(E) \setminus \{o\}$ on associe une $\alpha$-densité $|u|^{\alpha} : \lambda u \to |\lambda|^{a}$. On définit ainsi une bijection canonique

$$|.|^{\alpha} : \Lambda^{max}(E) \setminus \{o\} / \{-1,+1\} = \Omega_{\alpha}(E),$$

(cette dernière notation désignant l'ensemble des $\alpha$-densités sur E).

Il est à noter que les 1-densités s'identifient canoniquement aux mesures de Lebesgue sur E (i./e. mesures invariantes par translations); la mesure de Lebesgue définie par une 1-densité $\rho$ confère à un parrélotope défini par les vecteurs $v_1,\dots,v_n$ la valeur $\rho(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$.

**PRODUITS PSEUDO-TENSORIELS :**

Il est clair que le groupe multiplicatif $e^{\mathbb{R}}$, opère transitivement et fidèlement sur les $\Omega_{\alpha}(E)$, ce qui permet de définir le produit pseudo-tensoriel :

$$\Omega_{\alpha}(E) \otimes \Omega_{\beta}(F)$$

de deux telles demi-droites - c'est le quotient du produit cartésien $\Omega_{\alpha}(E) \times \Omega_{\beta}(F)$ par l'action bilatère de $e^{\mathbb{R}}$ :

$$\lambda(u,v) = (u\lambda^{-1},\lambda v)$$

On peut retrouver ce produit pseudo-tensoriel à partir de $\Lambda^{max}(E) \otimes \Lambda^{max}(F)$, via les isomorphismes canoniques définis par $\alpha$ et $\beta$.

**PROPOSITION** : *Pour tout couple* $(F_1,F_2)$ *de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie on a un isomorphisme canonique de*

$$\Omega_{1/2}(F_1+F_2 / F_1 \cap F_2) \otimes \Omega_{1/2}(E/F_2) \otimes \Omega_{1/2}(E/F_1) \text{ sur } \Omega_1(E/F_1 \cap F_2).$$

**PREUVE** : Soit $u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$ un élément du double produit tensoriel

$$\Lambda^{max}(E/F_1+F_2) \otimes \Lambda^{max}(F_1+F_2 / F_1) \otimes \Lambda^{max}(F_1+F_2 / F_2).$$

Alors $u_1 \otimes u_2 \in \Lambda^{max}(E/F_1)$, $u_2 \otimes u_3 \in \Lambda^{max}(F_1+F_2 / F_1 \cap F_2)$ et $u_3 \otimes u_1 \in \Lambda^{max}(E/F_2)$ de sorte que, pour

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3 \in \Omega_{1/1}(F_1+F_2 / F_1 \cap F_2) \otimes \Omega_{1/2}(E/F_2) \oplus \Omega_{1/2}(E/F_1),$$

on définit une 1-densité sur $\Lambda^{max}(E/F_1 \cap F_2)$ §cf. 4.1. cor. 2) en posant :

$$(\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3)(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) = \rho_1(u_2 \otimes u_3).\rho_2(u_3 \otimes u_1)\rho_3(u_1 \otimes u_2).$$

**COROLLAIRE 1 :** *Pour tout couple* $(\ell_1,\ell_2)$ *de lagrangiens d'un espace vectoriel réel symplectique* $(V,\sigma)$ *on a un isomorphisme canonique :*

$$\Omega_{1/2}(V/\ell_2) \otimes \Omega_{1/2}(V/\ell_1) = \Omega_1(V/\ell_1 \cap \ell_2).$$

**PREUVE :** On dispose sur l'espace symplectique

$$\ell_1 + \ell_2 / \ell_1 \cap \ell_2$$

d'une 1-densité canonique $|p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \dots \wedge \dots \wedge q_n| = |\sigma^n|$.

**COROLLAIRE 2 :**

$$\Omega_{1/2}(V,\ell_1) \otimes \Omega_{1/2}(V/\ell_2) = \Omega_1(V/\ell_2) \otimes \Omega_1(\ell_2 / \ell_1 \cap \ell_2)$$

*i.e. pour tout* $e_1 \in \Lambda^n\ell_1$ *et tout* $e_2 \in \Lambda^n\ell_2$ *il existe une unique* $\delta \in \Omega_1(\ell_2 / \ell_1 \cap \ell_2)$ *telle que :*

$$|e_1|^{1/2} \otimes |e_2|^{1/2} = |e_2| \otimes \delta .$$

**PREUVE :** Il suffit de remarquer que :

$$\Omega_1(V/\ell_1 \cap \ell_2) = \Omega_1(V/\ell_2) \otimes \Omega_1(\ell_2 \backslash \ell_1 \cap \ell_2).$$

**Notations :** Cette densité $\delta$ est notée abusivement

$$\delta = |e_1|^{1/2} \otimes |e_2|^{-1/2}$$

Les physiciens vont encore plus loin dans l'abus de la notation :

si $\mu_1$ (resp. $\mu_2$) est la mesure de Lebesgue définie sur $V/\ell_1$ par $e_1$ (sur $V/\ell_2$ par $e_2$), grâce à l'isomorphisme canonique via $\tilde{\sigma}$ :

$$(V/\ell)^* = \ell$$

pour tout lagrangien $\ell$ de $(V,\sigma)$, on pose :

$$\delta = \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}}$$

**EXEMPLES :**

1/ Si $\ell_1$ et $\ell_2$ sont transverses alors, pour

$$e_1 \wedge e_2 = c.\Lambda^n\sigma$$

on a :

$$\delta = |c|^{-1/2}.|e_1|,$$

de sorte que, si $e_1$ et $e_2$ constituent une base canonique, $\delta = |e_1|$ ; or, on peut toujours se ramener à ce cas en multipliant ces deux multi-vecteurs par une même constante positive convenable et la normalisation de mesures pratiquées par décomposition au paragraphe 3 permet de s'assurer que, pour le choix de densités :

$$\delta = |e_1|^{1/2} \otimes |e_2|^{-1/2} \qquad \delta' = |e_2|^{1/2} \otimes |e_1|^{-1/2},$$

les transformées de Fourier généralisées :

$$F^{\delta}_{\ell_2,\ell_1} \qquad F^{\delta}_{\ell_1,\ell_2}$$

sont réciproques l'une de l'autre :

2/ Transformées $\mathcal{F}_{\ell,g,\ell}$

$\ell$ est un lagrangien de $(V,\sigma)$ et $g \in Sp(\sigma)$ un automorphisme symplectique. La 1-densité sur $\ell / \ell \cap g.\ell$ qui s'écrit, avec les notations précédentes :

$$\delta_g^{\ell} = |g.e|^{1/2} \otimes |e|^{-1/2}$$

est indépendante du choix de e dans $\Lambda^{max}(\ell)$.

## 6. COCYCLE METAPLECTIQUE :

### (6.1). Rappels sur les représentations projectives :

Une représentation projective unitaire d'un groupe topologique G consiste en une application $R : G \to U(H)$ (H : espace de Hilbert) telle que, pour tout couple $(g_1,g_2)$ d'éléments de G il existe une constante $c(g_1,g_2)$ telle que :

$$R(g_1.g_2) = c(g_1,g_2)\, R(g_1) . R(g_2).$$

Cette constante appartient à $\mathbb{T}$ et vérifie

$$c(e,c) = 1$$

$$c(g_1.g_2,g_3).c(g_1,g_2) = c(g_1,g_2.g_3)c(g_2,g_3)$$

i.e. c'est un 2-cocycle de G à valeurs dans $\mathbb{T}$.

De ces égalités on déduit que :

$$c(e,g) = c(g,e) = 1 \qquad ; \quad g \in G$$

et

$$c(g,g^{-1}) = c(g^{-1},g)$$

Il est aisé de vérifier que, si R est fortement continue, (i.e. pour tout $h \in H$, $g \to R(g)h$ est continue de G dans H), c est continue.

Rappelons que la donnée d'un co-cycle continue $c : G \to \mathbb{T}$ définit une extension $G_c$ de G par $\mathbb{T}$ : on munit $G \times \mathbb{T}$ de la loi interne :

$$(g_1,t_1).(g_2,t_2) = (g_1.g_2,\ t_1t_2c^{-1}(g_1,g_2)).$$

Ceci permet de mettre en correspondance biunivoque les représentations projectives unitaires R de G de cocycle c et les représentations unitaires normales $R_c$ de $G_c$ ; au moyen de la formule :

$$R_c(g,t) = tR(g).$$

**EXEMPLES :** Soit $(V,\sigma)$ un espace symplectique réel de dimension finie :

1/ Les représentations unitaires normales du groupe de Heisenberg de $\sigma$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les représentations unitaires de V de cocycle $e^{-i\pi\sigma}$.

2/ Si $\ell$ est un lagrangien de $(V,\sigma)$, pour tout couple $(g_1,g_2)$ du groupe symplectique $Sp(\sigma)$ on pose :

$$\tau_\ell(g_1,g_2) = \tau(\ell,g_1.\ell,G_1g_2.\ell)$$

où $\tau$ est l'indice de Maslov.

De l'invariance symplectique de $\tau$ et de sa propriété de cocycle :

$$\tau(\ell_1,\ell_2,\ell_3) = \tau(\ell_1,\ell_2,\ell) + \tau(\ell_1,\ell_3,\ell) + \tau(\ell_3,\ell_1,\ell)$$

on déduit aisément que $\tau_\ell$ est un 2-cocycle de $G = Sp(\sigma)$.

Nous verrons que $\exp i \frac{\pi}{4} \tau_\ell$ peut s'interpréter comme le cocycle d'une représentation projective unitaire $R_\ell$ de G.

## (6.2) Représentation métaplectique définie par un Lagrangien :

Soit N (resp. G) le groupe de Heisenberg (resp. groupe symplectique d'un espace vectoriel symplectique $(V,\sigma)$ de dimension finie. On sait que, pour tout lagrangien $\ell$ de $(V,\sigma)$ on dispose d'une représentation unitaire irréductible $U_\ell$ de N dans un espace de Hilbert complexe $H_\ell$. Par ailleurs, G opère sur N canoniquement et ceci permet de définir, pour tout $g \in G$ une nouvelle r.u.i. de N :

$$U_\ell^g \; : n \to U_\ell(g.n)$$

de sorte que, en vertu du théorème de Stone-Von Neumann, il existe un opérateur d'entrelacement $R_\ell(g)$ entre $U_\ell$ et $U_\ell^g$, i.e. , pour tout $(g,n) \in G{\times}N)$

$$(1)\quad R_\ell(g) \,.\, U_\ell(n) \,.\, R_\ell(g)^{-1} = U_\ell(g.n) \;.$$

Cet opérateur est, en vertu du lemme de Schur défini à une constante multiplicative près $c \in \mathbb{T}$ , ce qui assure que $g \to R_\ell(g)$ est une représentation projective unitaire de G dans $H_\ell$.

A cette théorie abstraite de la représentation métaplectique G. Lion a apporté un modèle explicite parmticulièrement efficicace. Si l'on désigne par A(g) l'action d'un $g \in G$ sur les espaces $H_\ell$ , i.e. A(g) est la bijection linéaire de $H_\ell$ sur $H_{g.\ell}$ définie par :

$$(A(g)\phi)n) = \phi(g^{-1}.n)$$

il est aisé de vérifier que, pour tout lagrangien $\ell$ de $(V,\sigma)$ et tout couple $(g,n) \in G \times N$ :

$$(2)\qquad A(g) \,.\, U_\ell(n) \,.\, A(g)^{-1} = U_{g.\ell}(g.n)$$

Cette action A est aussi compatible avec la transformation de Fourier généralisée en ce sens que :

$$(3) \qquad A(g) \cdot \mathcal{F}^{\delta}_{\ell,\ell'} = \mathcal{F}^{g.\delta}_{g.\ell,g.\ell'} \cdot A(g)$$

($\delta$ est définie, conformément à 4.1.2. cor. 2 par l'écriture symbolique $\delta = \sqrt{\frac{d}{,d\mu}}$) où $\mu$ (resp. $\mu'$) est une mesure invariante sur $V/\ell$ (resp. $V/\ell'$). Ceci se vérifie aisément sur la formule intégrale donnant $\mathcal{F}$.

De (2) on déduit aisément (1), si l'on prend :

$$(4) \qquad R_\ell(g) = \mathcal{F}_{\ell,g.\ell} \cdot A(g)$$

(la mesure $\delta = \sqrt{\frac{d(g.\mu)}{d\mu}}$ est sous-entendue du fait qu'elle ne dépend que de f et g) et de (3) on déduit que, pour tout couple $(g_1,g_2)$ d'éléments de G

$$R_\ell(g_1) \cdot R_\ell(g_2) = e^{i\frac{\pi}{4}\tau(\ell.g_1.\ell,g_1g_2.\ell)} R_\ell(g_1g_2)$$

i.e. R est, pour le choix (4), une représentation projective de cocycle $e^{-i\frac{\pi}{4}\tau_{\ell'}}$.

## (6.3) CALCUL EXPLICITE AU MOYEN D'UN LAGRANGIEN TRANSVERSE

Si $\ell'$ est un lagrangien transverse à $\ell$, un calcul relativement simple (cf. (I.V), p. 61) assure que, pour $g \in G$ écrit sous forme :

$$(a, b,c, d,)$$

$a : \ell \to \ell$, $c : \ell \to \ell'$, $b : \ell' \to \ell$, $d : \ell' \to \ell'$, on a, compte-tenu des relations évidentes :

$$g^{-1}.x = {}^t d.x - {}^t c.x \qquad , x \in \ell$$

$$g^{-1}.y = {}^t b.y + {}^t a.y \qquad , y \in \ell ,$$

à partir de la formule générale :

$$(R_\ell(g)\phi(y) = \int_{\ell / g\ell \cap \ell} \phi(\exp g^{-1}.y.\exp g^{-1}x)\delta(dx)$$

la formule explicite :

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = e^{i\pi\sigma(a^t b.y,y)}, \int_{\ell / \ker {}^t c} \phi({}^t ay + {}^t cx)e^{i\pi\sigma_g(y,x)}\,\delta(dx)$$

avec $\sigma_g(y,x) = 2\sigma({}^t b.y, {}^t cx) - \sigma(d^t cx,x)$

ce qui, pour $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\ell = \mathbb{R}^n \times \{o\}$ et $\ell' = \{o\} \times \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$e^{i\pi<a^t b.y \atop y>} \int_{\ell / \ker {}^t c} \phi({}^t ay + {}^t cx)e^{i\pi(2<{}^t by;{}^t cx> + <d^t cx,x>)}\,\delta(dx)$$

Pour exploiter une telle formule, il est plus prudent de commencer à éclaircir quelques cas particuliers.

***(6.3.1).** Si g laisse $\ell$ invariant (i.e. c = o), alors l'espace d'intégration est réduit à un point, i.e. $\delta$ est proportionnelle à une mesure de Dirac ; pour avoir une représentation unitaire il faut prendre $|\det a|^{1/2}$ comme facteur constant d'intégration, i.e. :

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = |\det a|^{1/2}\, e^{i\pi<a^t by \atop y>}\, \phi({}^t ay)$$

***(6.3.2).** Si g échange $\ell$ et $\ell'$ (i.e. a=o=d) alors, du fait que ${}^t c.b = -I_n$, on a :

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = \int_\ell \phi({}^t cx)e^{-2i\pi<c^{-1}y\,{}^t cx>} \delta(dx)$$

d'où, après un changement de variable évident :

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = |\det c|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)e^{-2i\pi<c^{-1}y,x>} dx$$

pour avoir encore une transformation unitaire qui se trouve être, dans ce cas partiiculier, celle de Fourier-Plancherel.

***(6.3.3).** De façon plus générale supposons que g décrit l'ensemble de transversalité $\Omega(\ell)$ (cf. I), i.e. :

$$c \in G\ell(n,\mathbb{R})$$

g se décompose alors en $g = g_1 g_2 g_3$ avec

$$g_1 = \left(1,\ ac^{-1},\ O,\ 1\right)\ ,\ g_2 = \left(o,\ -{}^t c^{-1},\ c,\ o\right)\ ,\ g_3 = \left(1,\ c^{-1}d,\ o,\ 1\right)$$

Comme $g_1\ell = \ell$ , on a $c_\ell(g_1,g_2,g_3) = 1$ d'où :

$$R_\ell(g_1,g_2,g_3) = R_{\ell_1}(g_1)R_\ell(g_2,g_3)$$

et de $g_2g_3\ell = \ell = g_2\ell$ , on déduit $c_\ell(g_1,g_2,g_3) = 1$

d'où

$$R_\ell(g) = R_\ell(g_1)R_\ell(g_2)R_\ell(g_3)\ ,$$

ce qui, compte-tenu, des deux cas particuliers précédents donne alors :

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = |\det c|^{-1/2}\, e^{i\pi<ac^{-1}y,y>} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)c^{\sigma_g(y,x)} dx$$

avec $\sigma_g(y,x) = e^{-i\pi(2<c^{-1}y,x> - <c^{-1}dx,x>)}$ .

## 7. NORMALISATEURS DU GROUPE DE HEISENBERG :

Comme première application de la représentation métaplectique, nous nous proposons de retrouver sans peine les résultats de Igusa (I.7).

**NOTATION** : $\ell$ étant un lagrangien de $(V,\sigma)$, notons $B_\ell$ le normalisateur de la représentation de Schrodinger $U_\ell$ dans le groupe unitaire de $H_\ell$ i.e. l'ensemble des s de ce groupe unitaire tels que, pour tout $H_\ell$ $n \in N$ il existe $n_s \in N$ tel que :

$$s \,.\, U_\ell(n) \,.\, s^{-1} = U_\ell(n_s)$$

Cet élément $n_s$ du groupe de Heisenberg N ne dépend que de n et s et $n \to n_s$ est un automorphisme de N qui préserve chaque élément du centre de N.

Pour $x \in V$, $(\exp.x)_s$ s'écrit canoniquement :

$$(\exp\ x)_s = (\exp\ x_s)\ f_s(x)$$

où $x_s \in V$ et $f_s(x) \in \mathbb{T}$ ; on a donc :

$$(1) \qquad s \,.\, U_\ell(\exp\ x) \,.\, s^{-1} = f_s(y) U_\ell(\exp\ x_s)$$

et de la formule de Campbell-Hausdorff, on déduit :

i) $P_\ell(s) : x \to x_s$ appartient au groupe symplectique G.

ii) $f_s$ est un caractère de V.

Et, comme on a évidemment :

$$x^{,s_2} \,.\, {}^{,s_1} = (x^{,s_1})^{,s_2}$$

on voit que $P_\ell$ est un **morphisme** du groupe $B_\ell$ dans le groupe $G = Sp(\sigma)$.

Ce morphisme est surjectif ; plus pécisément :

**PROPOSITION 1 :** $R_\ell$ *prend ses valeurs dans* $B_\ell$ *et c'est une section continue de* $P_\ell$.

**PREUVE :** De $R_\ell(g).U_\ell(n).R_\ell^{-1}(g) = U_\ell(g.n)$ on déduit que

$$n_{R_\ell(g)} = g.n, \text{ i.e. } P_\ell(R_\ell(g)) = g.$$

La continuité de $R_\ell$ est évidente sur la formule explicitée précédemment sur l'ouvert dense de transversalité $\Omega(\ell)$.

**PROPOSITION 2 :** *Le noyau de la surjection* $P_\ell$ *est l'image de la représentation de Schrödinger.*

**PREUVE :**

$x_s = x$ si, et seulement si :

$$s \cdot U_\ell(\exp x) \cdot s^{-1} = f_s(x)U_\ell(\exp x).$$

Or, $f_s$ étant un caractère du groupe additif V, il existe $\overline{s} \in V$ tel que

$$f_s(x) = e^{2i\pi\sigma(\overline{s},x)},$$

et de la formule de commutation

$$U_\ell(\exp \overline{s}).U_\ell(\exp x) = f_s(x).U_\ell(\exp x).U_\ell(\exp \overline{s})$$

on déduit alors que $s^{-1} \cdot U_\ell(\exp \overline{s})$ est dans le commutant de $U_\ell$, c'est donc un scalaire d'où $s \in U_\ell(N)$ si $P_\ell(s) = id_V$.

**COROLLAIRE :** $B_\ell$ *s'identifie à l'extension du groupe symplectique* G *de* $(V,\sigma)$ *par le groupe de Heisenberg* N *de* $(V,\sigma)$ *qu'on définit au moyen* *du cocycle métaplectique* $C_\ell : G \to \mathbb{T}$ *et de la représentation canonique de* G *dans* V.

## 8. SOUS-ESPACES LAGRANGIENS ORIENTES :

### (8.1). Espaces vectoriels orientés :

Rappelons qu'un espace vectoriel orienté consiste en la donnée d'un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \geq 1$ et d'une composante connexe de $\Lambda^n E \setminus \{o\}$ (i.e. d'une orbite de $\Lambda^n E \setminus \{o\}$ pour exp $\mathbb{R}$).

Il est aisé de s'assurer que, si dans une suite exacte d'espaces vectoriels réels

$$o \to F \to E \to G \to o$$

deux d'entre eux sont orientés, le troisième l'est canoniquement en raison de l'isomorphisme canonique

$$\Lambda^{max}(E) = \Lambda^{max}(F) \otimes \Lambda^{max}(G)$$

Le dual d'un espace vectoriel orienté E est canoniquement orienté car la composante connexe dans $\Lambda^{max}(E') \setminus \{o\}$ du dual e' d'une base e de $\Lambda^{max}(E)$ ne dépend que de la composante connexe de e dans $\Lambda^{max}(E) \setminus \{o\}$. Cette notion d'orientation duale est symétrique.

Etant donnés deux espaces vectoriels orientés $E_1$ et $E_2$ et une application linéaire u, bijective de $E_1$ sur $E_2$, on définit la signature $\varepsilon(u)$ comme étant égale à 1 si u préserve l'orientation et à -1 sinon. On démontre aisément que :

$$\varepsilon({}^t u) = \varepsilon(u)\ ,\ \ \varepsilon(u) = (-1)^{\dim E_i}\ \varepsilon(u)$$

et, pour deux isomorphismes linéaires composables :

$$\varepsilon(v \,.\, u) = \varepsilon(v)\ .\ \varepsilon(u)$$

**(8.2). Signature d'un couple lagrangien orienté :**

Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux sous-espaces lagrangiens orientés dans un même espace vectoriel symplectique $(V,\sigma)$ au-dessus de deux lagrangiens $\ell_1$ et $\ell_2$.

Si $\ell_1$ et $\ell_2$ sont transverses, on sait que la restriction de $\tilde{\sigma}$ à $\ell_1$ est une bijection $\sigma_{\ell_2,\ell_1}$ de $\ell_1$ sur le dual $\ell_2'$ de $\ell_2$. La signature $\varepsilon(\sigma_{\ell_2,\ell_1})$ de cette bijection est notée $\varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)$.

Si $\ell_1$ et $\ell_2$ ne sont pas transverses, on peut encore définir la signature $\varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)$ ; pour cela on utilise l'espace symplectique $m^\sigma/m$ défini par $m = \ell_1 \cap \ell_2$. On sait, en effet, que $\ell_{1/m}$ et $\ell_{2/m}$ sont deux lagrangiens transverses de cet espace-quotient et, si l'on oriente ces deux lagrangiens quotients au moyen d'une orientation $\tilde{}$ de m, on constate aisément que $\varepsilon(\widetilde{\ell_{1/\tilde{m}}},\widetilde{\ell_{2/\tilde{m}}})$ ne dépend pas du choix de cette orientation, ce qui amène à poser :

$$\varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)=\varepsilon(\tilde{\ell}_{1/\tilde{m}},\tilde{\ell}_{2/\tilde{m}})$$

Il est à noter que ceci ne concerne pas le cas particulier $\ell_1 = \ell_2$ où l'on convient de poser :

$$\varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)=1 \text{ si } \tilde{\ell}_1=\tilde{\ell}_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)=-1 \text{ si } \tilde{\ell}_1=\tilde{\ell}_2^{\,op}.$$

Il est clair qu'on définit ainsi une fonction $\varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)$ à valeurs dans $\{-1,+1\}$, alternée, invariante par le groupe symplectique ; mais cette fonction n'est pas antisymétrique car, en raison de la relation évidente :

$$ {}^t\sigma_{\ell_1,\ell_2} = -\sigma_{\ell_2,\ell_1} $$

on montre aisément que :

$$ \varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2).\ \varepsilon(\tilde{\ell}_2,\tilde{\ell}_1) = (-1)^{n-\dim(\ell_1 \cap \ell_2)} $$

où

$$ \dim \ell_1 = n = \dim \ell_2 $$

Pour rétablir l'antisymétrie on utilise un multiplicateur alterné invariant et l'on pose :

$$ s(\tilde{\ell}_1;\tilde{\ell}_2) = i^{(n-\dim \ell_1 \cap \ell_2)}\ \varepsilon(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2). $$

Cette fonction s est entièrement définie par la valeur qu'elle prend pour $\ell_1 = \mathbb{R}\times\{o\}$ et $\ell_2 = \{o\}\times\mathbb{R}$ , où on a alors :

$$ s(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2) = i $$

pour les orientations canoniques ; on montre, en effet, par la méthode axiomatique de (II,5) que :

**PROPOSITION :** *Si à tout couple* $(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)$ *de sous-espaces lagrangiens orientés de tout espace symplectique* $(V,\sigma)$ *de dimension finie, on attribue un nombre* $s'(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2) \in \mathbb{T}$ *tel que :*

*i)* s' *soit une fonction alternée, ansitymétrique symplectiquement invariante, décomposable.*

*ii)* $s'(\tilde{\ell}^{op,1},\tilde{\ell}_2) = -s'(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2)$

*iii)* $s'(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2) = i$ *si* $\tilde{\ell}_1 = \mathbb{R}\times\{o\}$ *et* $\tilde{\ell}_2 = \{o\}\times\mathbb{R}$ *alors* $s' = s$.

**(8.3) Lien avec l'indice de Maslov :**

On reprend les notations de (6.2) et (II.5).

**THEOREME :** *Pour tout triple* $(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3)$ *les sous-espaces lagrangiens, orientés d'un même* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel symplectique de dimension finie, on a :*

$$s(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) s.(\tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3).s(\tilde{\ell}_3, \tilde{\ell}_1) = e^{i\frac{\pi}{2}\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}.$$

**PREUVE :** La fonction définie par le premier membre ne change pas lorsqu'on change l'orientation de l'un de ses arguments, on définit ainsi une fonction de trois arguments qui est alternée, antisymétrique symplectiquement invariante, et vérifie l'axiome de composition. Le fait que cette fonction soit un 3-cocycle à valeurs dans $\mathbb{T}$ résulte de la commutativité de $\mathbb{T}$ et de l'antisymétrie de s. Il reste donc à varifier la formule dans le cas particulier :

$$\ell_1 = \{(x,o)\}, \ell_3 = \{(o,x)\} \quad , \ \ell_2 = \{(x,x)\}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ , ce qui résulte trivialement de :

$$i.\ i.\ (-i) = e^{i\frac{\pi}{2}} .$$

**(8.4) Application à la représentation métaplectique :**

Le 2-cocycle $c_\ell(g_1, g_2)$ de la représentation métaplectique $R_\ell$ définie par un lagrangien $\ell$ n'est pas un cobord sur le groupe symplectique $Sp(\sigma)$. Nous allons voir que la fonction s précédemment définie va permettre d'en faire un cobord sur le revêtement à deux feuillets de $Sp(\sigma)$.

Avec les notations du paragraphe 5, on a :

$$c_\ell^2(g_1, g_2) = e^{-i\frac{\pi}{2}\tau(\ell, g_1\ell, g_1 g_2 \ell)},$$

et, après s'être assuré que, pour tout lagrangien $\tilde{\ell}$ orienté $s(\tilde{\ell}, g\tilde{\ell})$ ne change pas lorsqu'on change l'orientation de $\tilde{\ell}$, on a, à partir de (6.3), en posant

$$s_\ell(g) = s(\tilde{\ell}, g\tilde{\ell}),$$

pour tout couple $(g_1, g_2)$ de $Sp(\sigma)$ :

$$c_\ell^2\,(g_1, g_2) = s_\ell(g_1)^{-1} s_\ell(g_2)^{-1} s_\ell(g_1, g_2)$$

et ceci permet de vérifier aisément que :

**THEOREME :**

$$Mp(\sigma) = \{(g, \tau) \; ; \; \tau^2 = s_\ell(g)^{-1}\}$$

*est un sous-groupe fermé de l'extension de* $Sp(\sigma)$ *définie sur* $Sp(\sigma) \times \mathbb{T}$ *par* $c_\ell$.

**COROLLAIRE :** *La représentation métaplectique* $R_\ell$ *de* $Sp(\sigma)$ *se relève suivant une vraie représentation de* $Mp(\sigma)$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] **P. DAZORD,** *Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques* , Ann. Inst. Fourier. Grenoble 29 - 1979.

[2] **J.I. IGUSA,** *Theta fonctions,* Springer Verlag - 1972.

[3] **G. LION & M. VERGNE,** *The Weil representation, Maslov index and theta series.* Progression Math. Birkauser 1980.

[4] **J.M. SOURIAU,** *Construction explicite de l'indice de Maslov et applications.* (Fourth Intern. Coll. on Group theor. Methods in Physics. Nijmegen 1975) Lectures notes in Physics. 50. Springer Verlag.

et celle des pères fondateurs de la théorie,

**I. SEGAL,** *Transforms for operators and symplectic automorphisms over a locally compact group.* Math. Scand. Vol. 13 (1973) pp. 31-43.

**D. SHALE,** *Linear symmetries of free Boson fields,* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 103 (1962), pp. 149-167.

**A. WEIL,** *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* , Acta Math. 111. 1964. p. 143-211.


---


Je remercie également Monsieur J. HELMSTETTER dont les indications m'ont permis d'améliorer substantiellement la rédaction du chapitre III.