PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN DAZORD
MICHEL JOURLIN

Une topologie mixte sur l'espace L^∞

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 2 , p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t.11.2

UNE TOPOLOGIE MIXTE SUR L'ESPACE L^{∞}

par Jean DAZORD et Michel JOURLIN

Etant donné l'espace $C^{\infty}(T)$ des fonctions numériques réelles continues et bornées sur T, la topologie stricte sur $C^{\infty}(T)$ - et nous entendons par là la plus fine topologie localement convexe coïncidant sur la boule unité de $C^{\infty}(T)$ avec celle de la convergence compacte sur T - entre à la fois dans le cadre des topologies mixtes étudiées par WIWEGER [W] et dans celui des limites inductives généralisées au sens de GARLING [G1]. L'origine de notre étude est alors double ; dans [C1] COLLINS considère de façon détaillée la topologie stricte lorsque l'espace T est discret ; $C^{\infty}(T)$ est, dans ce cas, l'espace $\ell^{\infty}(T)$ des familles réelles bornées $(x_t)_{t \in T}$; par ailleurs un résultat dû à DIEUDONNE et GROTHENDIECK ([G3], prop. 3, p. 139) affirme que sur la boule unité de $L^{\infty}(\mu)$, où μ est une mesure de Radon sur un espace localement compact, la topologie de la convergence en mesure coïncide avec la topologie de Mackey $\tau(L^{\infty},L^{1})$. Un des objets de notre étude est de préciser ce dernier résultat en prouvant que la topologie $\tau(L^{\infty},L^{1})$ est la plus fine topologie vectorielle qui coïncide sur la boule unité de L^{∞} avec celle de la convergence en mesure, ce qui met en évidence sur L^∞ une topologie mixte analogue à la topologie stricte sur $C^\infty(T)$. Lorsque T est discret, la topologie étudiée peut être considérée aussi bien comme la topologie stricte que comme la topologie mixte introduite ici d'une manière générale sur $L^\infty(\mu)$, μ étant, en l'occurrence, la mesure canonique de masse 1 en tout point de T.

Les notations et les résultats de théorie de la mesure que nous supposons connus proviennent de BOURBAKI ([B2], [B3], [B4]) ; on pourra également se référer à [DJ1]. Précisons cependant que s'il est vrai que par mesure nous entendons en général une mesure positive, pour des raisons de commodité, nous sommes conduits parfois à envisager des mesures signées ; il en est ainsi lorsqu'il s'agit d'espaces de mesures. Dans le même esprit ajoutons que, conformément à l'usage, nous assimilerons très souvent les classes de fonctions à des fonctions.

Etant donné un elc E, nous désignerons toujours par E' son dual topologique. Nous noterons E'_τ l'espace E' muni de la topologie de Mackey $\tau(E',E)$ et E'_p (resp. E'_c) l'espace E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles précompacts de E (resp. sur les disques compacts de E).

Il faut mentionner ici que des travaux récents annoncés dans Zentralblatt für Mathematik (t. 247, 11 juillet 1973, 46049) établissent le résultat central de cet article, à savoir que la topologie mixte de L^∞ est la topologie de Mackey $\tau(L^\infty,L^1)$. En termes d'analyse non standard, cela figure dans K.D. STROYAN, "*A characterization of the Mackey uniformity* $m(L^\infty,L^1)$ *for finite measures*", à paraître au Pacific Journal of

Mathematics. L'auteur signale que la version standard de ce résultat a été établie dans un texte non publié de J.B. COOPER. Il faut toutefois noter que Stroyan se limite au cas d'une mesure bornée. Ajoutons qu'une première version de notre article a paru dans la série de prépublications de l'Université de Saint-Etienne [DJ3].

Avant d'en venir à l'objet propre de notre étude, précisons que ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans les indications qui nous ont été données par le Professeur Z. SEMADENI à l'occasion d'un séjour à Lyon en juin 1971. Nous lui sommes, en particulier, redevables d'avoir attiré notre attention sur les travaux de l'Ecole polonaise et plus particulièrement sur les articles de Wiweger.

Dans la suite, T désigne un espace localement compact et μ une mesure strictement positive sur T. Nous désignons par $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou $\mathcal{L}^1$ l'espace des fonctions mesurables de T dans $\mathbb{R}$ telles que $\mu^{\bullet}(|f|) < +\infty$ (autrement dit, l'espace des fonctions essentiellement intégrables) muni de sa semi-norme $f \to \mu^{\bullet}(|f|)$ et par $L^1(\mu)$ ou L^1 son séparé associé. De même $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ou $\mathcal{L}^\infty$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées de T dans $\mathbb{R}$ et $L^\infty(\mu)$ ou L^∞ son séparé.

Nous rappelons tout d'abord deux résultats fondamentaux :

Nous dirons qu'une mesure ν sur T est de base μ si $\nu = \varphi.\mu$, où φ est une fonction de T dans $\mathbb{R}$ (qui n'est pas nécessairement positive) μ-intégrable sur tout ensemble compact. On établit alors le théorème de RADON-

NIKODYM, ([B3], th. 2, p. 52, et cor. 5, p. 55, [B4], prop. 3, p. 28).

(1) THEOREME (RADON-NIKODYM). - *Soit* T *un espace complètement régulier séparé et* μ *une mesure positive sur* T. *Pour une mesure positive* ν *sur* T, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) ν *est une mesure de base* μ ;

(b) tout ensemble compact μ*-négligeable est* ν*-négligeable ;*

(c) pour tout ensemble compact K *et tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\eta>0$ *tel que les relations* $A\subset K$ *et* $\mu^\bullet(A) \leqslant \eta$ *entraînent* $\nu^\bullet(A) \leqslant \varepsilon$.

Le théorème de DUNFORD-PETTIS met en jeu la notion de partie équi-intégrable qui joue un rôle essentiel dans notre étude ([B2], Déf. 10, p. 199) :

(2) DEFINITION. - *Une partie* Φ *de* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *est dite équiintégrable si elle satisfait aux conditions suivantes :*

(E_1) *pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\delta>0$ *tel que pour tout ensemble essentiellement intégrable* A *vérifiant* $\mu(A) \leqslant \delta$, *on ait :*

$$\sup_{\varphi\in\Phi} \int_A |\varphi|\, d\mu \leqslant \varepsilon \ ;$$

(E_2) *pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe un ensemble compact* K *de* T *tel que :*

$$\sup_{\varphi\in\Phi} \int_{T\setminus K} |\varphi|\, d\mu \leqslant \varepsilon \ .$$

(3) THEOREME (DUNFORD-PETTIS). - *Pour une partie bornée* Φ *de* $\mathcal{L}^1$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Φ *est équiintégrable ;*

(b) l'ensemble quotient $\tilde{\Phi}$ *de* Φ *dans* L^1 *est relativement faiblement compact.*

Nous avons déjà indiqué que la topologie mixte sur L^∞ envisagée ici est construite à l'aide d'une part de sa topologie d'espace de Banach et d'autre part de la topologie de la convergence en mesure. Le lemme suivant a, en partie, pour objet d'établir que ces deux topologies vérifient la condition de voisinages fermés (VF) qui joue un rôle important dans l'étude des ensembles bornés pour la topologie mixte ([W], 2.4.1, p. 56).

(4) LEMME. - *Pour la topologie de la convergence en mesure, la boule unité de* L^∞ *est l'adhérence de celle de* $C^\infty(T)$.

Preuve. - Soit Δ la boule unité de $C^\infty(T)$ et B celle de L^∞. Etablissons tout d'abord la densité de Δ dans B. Considérons un ensemble compact K de T et un réel $\varepsilon>0$ qui définissent un voisinage $V(K,\varepsilon)$ de zéro dans L^∞, à savoir ([DJ1], (1.1), p. 89) :

$$V(K,\varepsilon) = \{f\in L^\infty \ ; \ \exists K_f\in\mathcal{K}_f,\ K_f\subset K,\ \mu(K\setminus K_f)\leqslant\varepsilon,\ \|f\|_{K_f}\leqslant\varepsilon\}$$

où $\mathcal{K}_f$ désigne la compactologie sur T constituée des ensembles compacts K_f sur lesquels f est continue. Soit $f\in B$; f étant mesurable, il existe un ensemble compact $K'\in\mathcal{K}_f$ vérifiant $K'\subset K$ et $\mu(K\setminus K')\leqslant\varepsilon$. La restriction $f|_{K'}$ de f à K' est continue et admet un prolongement continu f' à l'espace T tout entier ; on peut supposer que l'on a $\|f'\|_T\leqslant 1$, c'est-à-dire $f'\in\Delta$. Il est alors immédiat qu'on a $f-f'\in V(K,\varepsilon)$. Prouvons maintenant que B est fermée. Pour cela, soit $f\notin B$. Posons : $A = \{x\in T \ ; \ |f(x)| > 1\}$. Nécessairement $\mu^\bullet(A) > 0$ et, A étant mesurable, il existe un ensemble compact K contenu dans A vérifiant $\mu(K) > 0$. Etant donné $\varepsilon>0$ tel que $0<\varepsilon<\mu(K)$, il existe un ensemble compact $K_\circ$ dans $\mathcal{K}_f$, contenu dans K, tel que l'on ait

$\mu(K \setminus K_o) \leqslant \varepsilon$, d'où $\mu(K_o) > 0$. Soit $m = \inf_{x \in K_o} |f(x)|$; par continuité de f sur K_o, on a $m>1$. Supposant alors que η est un nombre vérifiant $0<\eta<\inf(\mu(K_o), m-1)$ montrons que l'on a $(f+V(K_o,\eta)) \cap B = \emptyset$. Pour cela considérons $g \in f+V(K_o,\eta)$. Il existe $K_1 \in \mathfrak{K}_{f-g}$ tel que $K_1 \subset K_o$, $\mu(K_o \setminus K_1) \leqslant \eta$ et $\|g-f\|_{K_1} \leqslant \eta$. Ainsi $\mu(K_1)$ est strictement positif et on a : $\| |g|-|f| \|_{K_1} \leqslant \eta$, soit $|f(x)| - \eta \leqslant |g(x)| \leqslant |f(x)| + \eta$ pour tout $x \in K_1$. Or pour tout $x \in K_1$, on a $|f(x)| \geqslant m > 1+\eta$; finalement on a $|g(x)| > 1$ pour tout $x \in K_1$, avec $\mu(K_1) > 0$. C'est dire que g n'appartient pas à B.

Rappelons que pour une mesure bornée ν sur un espace T on appelle masse totale de ν le scalaire $|\nu|(T)$. On sait alors que, muni de la norme de la masse totale, l'espace des mesures bornées de base μ (ou de densité par rapport à μ) est isométrique à $L^1(\mu)$, la densité n'étant pas ici nécessairement positive. Avec cette interprétation de l'espace $L^1(\mu)$, la proposition qui suit est tout à fait analogue à la caractérisation des mesures bornées sur un espace T comme formes linéaires sur $C^{\infty}(T)$ continues sur sa boule unité pour la topologie de la convergence compacte sur T ([B4], prop. 12, p. 65) :

(5) <u>PROPOSITION</u>. - *L'espace L^1 s'identifie à l'espace des formes linéaires sur L^{∞} continues sur sa boule unité pour la topologie de la convergence en mesure.* [1]

---

[1] Une rédaction antérieure de ce travail ne mentionnait pas la densité de Δ dans B ; la preuve de la proposition était alors incomplète. Nous remercions D. GARLING de nous avoir indiqué cette omission.

Preuve. - Soit $\varphi \in L^1$ et soit ν la mesure de densité φ par rapport à μ. Nous supposons, ce qui est sans inconvénient, que φ est une fonction positive, ν étant alors une mesure positive. Puisque ν est une mesure bornée, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble compact K tel que $\nu(T\setminus K) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe un nombre $\eta>0$ tel que pour $A\subset K$ et $\mu^\bullet(A) \leqslant \eta$, on ait $\nu^\bullet(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Montrons qu'on peut trouver $\alpha>0$ pour lequel l'inégalité $|\nu(f)| \leqslant \varepsilon$ soit vérifiée pour toute fonction $f\in V(K,\alpha)\cap B$, $V(K,\alpha)$ étant un voisinage fondamental de zéro pour la topologie de la convergence en mesure. On peut supposer que l'on a $\|f\|_T \leqslant 1$.
Comme $f\in V(K,\alpha)$, il existe un ensemble K_f contenu dans K tel que l'on ait $\mu(K\setminus K_f) \leqslant \alpha$ et $\|f\|_{K_f} \leqslant \alpha$. En supposant $\alpha<\inf(\eta,\frac{\varepsilon}{3\nu(K)})$, on a alors : $\mu(K\setminus K_f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi

$$|\nu(f)| = \left|\int f d\nu\right| \leqslant \nu(K\setminus K_f)\|f\|_K + \nu(K)\|f\|_{K_f} + \nu(T\setminus K)\|f\|_T.$$

Soit $\quad |\nu(f)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \alpha\nu(K) \leqslant \varepsilon$.

Pour établir la réciproque, considérons une forme linéaire $\nu\geqslant 0$ sur L^∞ ([2]) continue sur sa boule unité B pour la topologie de la convergence en mesure. En raison de la densité de Δ dans B, ν s'identifie, par restriction à $C^\infty(T)$, à une forme linéaire sur $C^\infty(T)$ continue sur Δ pour la topologie de la convergence en mesure et, a fortiori, pour la topologie de la convergence compacte sur T. C'est dire que ν est une mesure bornée sur T. Comme L^∞ est le quotient de $\mathcal{L}^\infty$ par l'espace des fonctions localement μ-négligeables, il est clair que toute fonction localement μ-négligeable est localement ν-négligeable. Il résulte alors du théorème de Radon-Nikodym que ν est une mesure bornée de base μ.

([2]) On suppose $\nu\geqslant 0$ car la topologie de la convergence en mesure admet des voisinages de l'origine convexes pour l'ordre.

Nous pouvons maintenant formuler une caractérisation des mesures bornées similaire à la caractérisation classique :

(6) <u>COROLLAIRE</u>. - *Pour que* μ *soit une mesure bornée sur* T, *il faut et il suffit que* μ *soit une forme linéaire sur* $C^\infty(T)$ *continue sur sa boule unité* Δ *pour la topologie de la convergence en* μ*-mesure.*

Nous noterons dans la suite L^∞_m l'espace L^∞ muni de la topologie de la convergence en mesure. Conformément aux notations de Wiweger, nous désignerons par $\gamma(L^\infty,L^\infty_m)$ ou, plus simplement, par γ la topologie mixte sur L^∞, autrement dit la plus fine topologie vectorielle coïncidant sur la boule unité B de L^∞ avec la topologie de la convergence en mesure ; L^∞_γ désigne l'evt ainsi obtenu. Notons ici que puisqu'une forme linéaire continue sur L^∞_γ est une forme linéaire continue sur B pour la topologie de la convergence en mesure ([W], 2.2.3, p. 52), le théorème (5) exprime l'isomorphisme algébrique de L^1 avec le dual $(L^\infty_\gamma)'$.

Bien que l'espace L^∞ ne soit pas localement convexe, en général, pour la topologie de la convergence en mesure, on prouve cependant que $L^\infty_\gamma(T,\mu)$ est un elc ainsi : si T est compact, la boule unité B de L^∞ est équiintégrable et sur B les topologies de la convergence en mesure et de la convergence en moyenne coïncident ([B2], remarque p. 199 et prop. 21, p. 199) ; comme cette dernière topologie est localement convexe le résultat est acquis ([W] , remarque, p. 55). Dans le cas général, on considère un μ-concassage $(K_i)_I$ de T ([B4], déf. 10, p. 18) et on montre que la topologie de l'espace L^∞_γ coïncide sur la boule unité de L^∞ avec celle de l'elc $\prod_I L^\infty_\gamma(K_i)$.

La démonstration qui suit reprend en partie la preuve du théorème de Dieudonné-Grothendieck tout en établissant un résultat plus précis :

(7) <u>THEOREME</u>. - *Sur l'espace* L^∞ *la topologie mixte* γ *est identique à la topologie de Mackey* $\tau(L^\infty, L^1)$.

Preuve. - En vertu du théorème de Dunford-Pettis, il s'agit de prouver qu'une base d'ensembles équicontinus de $(L^\infty_\gamma)'$ est constituée des quotients dans L^1 des parties équiintégrables et bornées de $\mathcal{L}^1$. Notons C(B) l'espace des fonctions de B dans $\mathbb{R}$ continues pour la topologie de la convergence en mesure. Nous savons que pour qu'une partie H de $(L^\infty_\gamma)'$ soit équicontinue, il faut et il suffit que les restrictions à B des éléments de H forment une partie équicontinue de C(B) ([C3], prop. 1, p. 586). Soit Φ le quotient dans L^1 d'une partie équiintégrable et bornée de $\mathcal{L}^1$. Nous avons donc à prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V(K,\eta)$ dans L^∞_m tel que l'on ait $\sup_{\varphi\in\Phi} \left|\int \varphi f d\mu\right| \leq \varepsilon$ pour toute classe de fonction $f \in V(K,\eta) \cap B$. Or il existe un ensemble compact K de T tel que l'on ait : $\int_{T\setminus K} |\varphi| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Comme f appartient à $V(K,\eta)$, il existe un ensemble $K_f \in \mathcal{K}_f$, K_f étant contenu dans K, vérifiant $\mu(K\setminus K_f) \leq \eta$ et $\|f\|_{K_f} \leq \eta$. Or

$\left|\int f\varphi d\mu\right| \leq \int_{K_f} |f\varphi| d\mu + \int_{K\setminus K_f} |f\varphi| d\mu + \int_{T\setminus K} |f\varphi| d\mu$. Comme f appartient à la boule unité de L^∞, on a

$$\int_{T\setminus K} |f\varphi| d\mu \leq \int_{T\setminus K} |\varphi| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part

$$\int_{K_f} |f\varphi|\, d\mu \leqslant \eta \int_{K_f} |\varphi|\, d\mu \leqslant \eta \int_T |\varphi|\, d\mu \leqslant \eta M \quad ,$$

où $M = \sup_{\varphi\in\Phi} \int |\varphi|\, d\mu$ est fini puisque Φ est un ensemble borné de L^1. Supposons maintenant que, conformément à la condition d'équiintégrabilité (E_1), on ait choisi $\delta>0$ tel que, pour tout ensemble essentiellement intégrable A vérifiant $\mu(A) \leqslant \delta$, on ait $\sup_{\varphi\in\Phi} \int |\varphi f|\, d\mu \leqslant \varepsilon$. Alors en supposant $0<\eta\leqslant\delta$,

on peut écrire, puisque $\mu(K\setminus K_f) \leqslant \eta \leqslant \delta$,

$$\int_{K\setminus K_f} |\varphi f|\, d\mu \leqslant \int_{K\setminus K_f} |\varphi|\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{3} .$$

Finalement, en choisissant $\eta \leqslant \inf(\delta, \frac{\varepsilon}{3M})$, on obtient $\int |f\varphi|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varphi\in\Phi$ et tout $f\in V(K,\eta)\cap B$. Ainsi nous avons prouvé que toute partie faiblement compacte de L^1 est équicontinue dans $(L^\infty_\gamma)'$, ce qui termine la démonstration.

Le résultat précédent appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, la preuve que nous venons de donner montre qu'une partie faiblement compacte de L^1, disquée ou non, est équicontinue, autrement dit L^∞_γ est un espace de Mackey au sens fort ("Strong Mackey space" suivant la terminologie de CONWAY, [C2], p. 475). D'ailleurs dans L^1, comme dant tout elc E quasi-complet pour la topologie de Mackey $\tau(E,E')$, l'enveloppe disquée faiblement fermée d'une partie faiblement compacte est faiblement compacte, comme il résulte du théorème de KREIN ([E], 8.13.1, p. 553).

En ce qui concerne l'analogie que nous avons mentionnée entre la topologie mixte de L^∞ et la topologie stricte de $C^\infty(T)$, il faut noter que les parties équiintégrables de L^1 jouent, pour la dualité entre L^1 et L^∞, le même rôle que les parties de PROKHOROV ([B4], déf. 2, p. 63) de l'espace $M_b(T)$ des mesures bornées sur T pour la dualité $(C^\infty(T), M_b(T))$. On sait cependant que, pour la topologie stricte, $C^\infty(T)$ n'est pas en général un espace de Mackey ([C2], p. 481).

Nous disposons ainsi de trois topologies sur L^∞ à savoir, par ordre de finesse, sa topologie d'espace de Banach, la topologie mixte γ et la topologie de la convergence en mesure. La boule unité de L^∞ est évidemment bornée dans L^∞_γ. Comme les topologies de L^∞ et L^∞_m vérifient la condition (VF), il en résulte ([W], 2.4.1, p. 56) que L^∞ et L^∞_γ ont les mêmes ensembles bornés. Ainsi nous avons établi, ce qui précise la proposition (5) :

(8) PROPOSITION. - L^1 *est isomorphe au dual fort de* L^∞_γ.

Avant d'énoncer les principales propriétés de l'elc L^∞_γ, rappelons quelques définitions. Un elc E est dit hémiborné s'il possède une suite fondamentale de bornés. On dit que E est un $b_{\mathbb{R}}$-espace si toute forme linéaire sur E continue (ou faiblement continue) sur les ensembles bornés de E est continue sur E. On peut, dans cette dernière définition, utiliser indifféremment la topologie de E ou sa topologie faible puisque, d'une manière générale, une forme linéaire sur un elc continue sur un disque fermé est faiblement continue sur ce disque ([B1], exercice 3, p. 91). Alors :

(9) PROPOSITION. - L^∞ *est l'espace bornologique associé à* L^∞_γ *est c'est aussi le bidual fort de* L^∞_γ. *Tout disque bornivore de* L^∞_γ *contient un*

tonneau bornivore. L^∞_γ *est hémiborné et contient un tonneau borné bornivore. C'est un* $b_{\mathbb{R}}$*-espace semi-réflexif et complet.*

Preuve. - Montrons seulement que L^∞_γ est complet, les autres assertions étant évidentes. L^1 est un elc de Kelley et $(L^1)'_c$ est complet ([B7], 3.4.7, p. 32). Alors $(L^1)'_\tau$ est complet grâce à la condition (VF).

La caractérisation de la topologie mixte de L^∞ comme topologie de Mackey permet d'apporter une précision supplémentaire. On sait que le b-bidual d'un elc E est l'espace des formes linéaires sur son dual E' bornées sur les ensembles équicontinus de E' et que E est dit b-réflexif s'il est égal algébriquement à son b-bidual ([B6], p. 43-44). Or il est établi dans [B5] (th. 3, p. 105) que si E est ultrabornologique, E'_τ est b-réflexif. Ainsi, puisque $L^\infty_\gamma = (L^1)'_\tau$:

(10) <u>PROPOSITION</u>. - *L'elc* L^∞_γ *est* b-*réflexif.*

Notons ici qu'il résulte de sa b-réflexivité que l'elc L^∞_γ est semi-réflexif et complet ([B6], 4.5.2., p. 44), ce que nous savions déjà.

Lorsque la mesure μ est atomique, l'espace de Banach $L^1(\mu)$ est isomorphe à un espace $\ell^1(I)$. Il résulte alors de l'identité des parties faiblement compactes et des parties compactes de $\ell^1(I)$ que les elc L^∞_γ et $(\ell^1(I))'_c$ sont isomorphes. L'elc L^∞_γ est donc un espace de Schwartz. La proposition qui suit établit la réciproque :

(11) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L^∞_γ *est un espace de Schwartz ;*

(b) L^∞_γ *est un elc de type (*μ*) (i.e. les ensembles bornés de* L^∞_γ *sont*

relativement compacts) ;

(c) les parties faiblement compactes de L^1 *sont compactes ;*

(d) la mesure μ *est atomique.*

Preuve :

(a) => (b) : cela résulte de la complétude de L^∞_γ.

(b) => (c) : c'est évident.

(c) => (d) : cela provient d'une remarque de Grothendieck selon laquelle, si une mesure μ n'est pas atomique, il existe dans $L^1(\mu)$ une suite faiblement convergente non convergente ([G2], p. 60).

L'implication (d) => (a) a déjà été vue.

(12) COROLLAIRE. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L^∞_γ *est un elc nucléaire ;*

(b) la mesure μ *est à support fini.*

Preuve. - L'implication (b) => (a) étant évidente, prouvons (a) => (b). L'elc L^∞_γ étant un espace de Schwartz, nous savons que la mesure μ est atomique et L^∞_γ est isomorphe à un espace $(\ell^1(I))'_c$. Supposons que I est infini, ce qui revient à dire que le support de μ est infini. Alors ℓ^1 est isomorphe à un facteur direct de $\ell^1(I)$ et il en résulte que $(\ell^1)'_c$ est isomorphe à un sous-espace de $(\ell^1(I))'_c$. L'elc $(\ell^1)'_c$ est donc nucléaire. Or nous savons ([J]) que l'espace $(\ell^1)'_c$ est universel dans la classe des espaces de Schwartz. Il en résulte que tout espace de Schwartz est nucléaire, ce qui est absurde.

Nous terminerons ce travail en abordant diverses conditions de tonnelage sur l'espace L^{∞}_{γ}. Il faut tout d'abord noter que bien qu'il soit toujours un espace de Mackey, l'elc L^{∞}_{γ} n'est, en général, ni tonnelé, ni bornologique, ni par conséquent réflexif. Car si L^{∞}_{γ} est infratonnelé (donc tonnelé puisqu'il est complet), on en déduit l'identité topologique $L^{\infty} = L^{\infty}_{\gamma}$, puisque la boule unité fermée de L^{∞} est un tonneau bornivore de L^{∞}_{γ}. Ainsi L^{∞} est réflexif. Or cela n'est possible que dans le cas où la mesure μ est à support fini. D'une manière plus précise, sachant qu'un elc E est dit σ-infratonnelé (resp. σ-tonnelé) si toute suite fortement bornée (resp. faiblement bornée) de son dual E' est équicontinue, nous pouvons énoncer :

(13) <u>PROPOSITION</u>. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L^{∞}_{γ} *est infratonnelé (resp. tonnelé, bornologique, réflexif) ;*

(b) L^{∞}_{γ} *est un espace (DF) ;*

(c) L^{∞}_{γ} *est* σ*-infratonnelé (resp.* σ*-tonnelé) ;*

(d) toute suite bornée de $L^{1}(\mu)$ *est équiintégrable ;*

(e) la mesure μ *est à support fini.*

Preuve. - Nous venons de voir qu'on a l'implication (a) => (e) et il est clair qu'on a (e) => (a) ; du même coup les diverses formulations de l'assertion (a) deviennent équivalentes. On a (a) => (b), car L^{∞}_{γ} est hémiborné. Les implications (b) => (c) => (d) sont claires. L'implication (d) => (a) provient du fait qu'un espace de Banach dans lequel toute suite bornée est relativement faiblement compacte est réflexif, ainsi que cela résulte immédiatement du théorème d'EBERLEIN ([4], 8.12.7, p. 551). Il faut cependant noter que des propriétés de tonnelage moins restrictives que celles qui sont envisagées dans la proposition (11) peuvent être vérifiées par L^{∞}_{γ}. A titre d'exemple, il résulte de sa b-réflexivité que l'elc L^{∞}_{γ} est hypotonnelé au sens de [B5] (p. 95 et prop. 13, p. 103), c'est-à-dire que tout disque de $(L^{\infty}_{\gamma})'$ qui absorbe les ensembles équicontinus absorbe les parties faiblement bornées. Dans le même ordre d'idées, rappelons qu'un elc E est dit p-infratonnelé si toute partie précompacte de l'elc E'_p est équicontinue ([DJ2], Déf. 3.1., p. 47). La preuve du caractère p-infratonnelé de l'elc L^{∞}_{γ} nécessite alors quelques préliminaires. Rappelons qu'un espace topologique T est dit σ-compact s'il est réunion d'une suite d'ensembles compacts.

(14) LEMME. - *Si* T *est* σ*-compact, l'elc* $L^{\infty}_{\gamma}(T,\mu)$ *est* p*-infratonnelé.*

Preuve. - L'espace L^{∞} est métrisable pour la topologie de la convergence en mesure lorsque T est σ-compact ([B2], prop. 18, p. 196). Les ensembles bornés de L^{∞}_{γ} sont donc métrisables. Soit u une forme linéaire sur L^{∞}_{γ} continue sur les ensembles compacts ; u est continue sur les ensembles bornés de L^{∞}_{γ}, donc continue puisque L^{∞}_{γ} est un $b_{\mathbb{R}}$-espace. Ainsi l'elc $(L^{\infty}_{\gamma})'_c$ est complet et les ensembles précompacts de $(L^{\infty}_{\gamma})'_c$ sont relativement compacts, donc relativement compacts pour la topologie faible $\sigma(L^1,L^{\infty})$.

Nous établirons que L^{∞}_{γ} est p-infratonnelé en nous ramenant au cas où T est σ-compact. Pour cela, il faut noter que si une partie H de L^1 est équiintégrable, il existe un ensemble A qui est un K_{σ} de T (i.e. A est réunion d'une suite de compacts de T) tel que l'on ait

$$\operatorname*{Sup}_{f\in H} \int_{T\setminus A} |f|\,d\mu = 0,$$

ce qui résulte de la condition (E_2). Nous dirons dans ce cas que la partie

H de L^1 est portée par A. On obtient alors la proposition suivante, dont la preuve nous a été fournie par Rome :

(15) PROPOSITION. - *Tout ensemble précompact de* $(L^\infty_\gamma)'_c$ *est porté par un* K_σ *de* T.

Preuve. - Le principe de la preuve est de se ramener au cas où la mesure μ est atomique. Pour cela considérons un concassage $(K_i)_I$ de T ([B4], Déf. 10, p. 18) et définissons l'application linéaire continue $u : L^1(\mu) \to \ell^1(I)$ par

$$u(f) = \left(\int_{K_i} f d\mu\right)_I .$$

Par bitransposition, il est immédiat que l'application $u : ((L^1(\mu))'_\tau)'_c \to ((\ell^1(I))'_\tau)'_c$ est continue. Or l'espace $((\ell^1(I))'_\tau)'_c$ est isomorphe à $\ell^1(I)$. Ainsi l'application $u : (L^1)'_c \to \ell^1(I)$ est continue. Soit alors H un ensemble précompact de $(L^\infty_\gamma)'_c$; son image u(H) dans $\ell^1(I)$ est relativement compacte, donc équisommable. Il en résulte que l'ensemble u(H) est porté par une partie dénombrable J de I et H est porté par l'ensemble K_σ : $A = \bigcup_{i\in J} K_i$.

(16) PROPOSITION. - *L'elc* L^∞_γ *est* p-*infratonnelé.*

Preuve. - Soit H un ensemble précompact de $(L^\infty_\gamma)'_c$ et soit A un ensemble K_σ portant H. Désignons par $L^1(T)$ l'espace des classes de fonctions réelles μ-intégrables et par $L^1(A)$ le sous-espace de $L^1(T)$ constitué des classes de fonctions nulles en dehors de A. Comme précédemment, on déduit de la continuité de l'application de restriction $r : L^1(T) \to L^1(A)$ la continuité de l'application :

$$r : (L^{\infty}_{\gamma}(T))'_c \rightarrow (L^{\infty}_{\gamma}(A))'_c.$$

Ainsi r(H) est une partie précompacte de $(L^{\infty}_{\gamma}(A))'_c$ donc une partie de $L^1(A)$ qui est relativement compacte pour la topologie $\sigma(L^1(A), L^{\infty}(A))$. Comme cette topologie faible est induite sur $L^1(A)$ par la topologie faible $\sigma(L^1(T), L^{\infty}(T))$, il en résulte que r(H) est une partie relativement faiblement compacte de $L^1(T)$. Or H s'identifie à une partie de $L^1(A)$ et sur $L^1(A)$ l'application linéaire r est un isomorphisme d'espaces de Banach. Finalement H est une partie relativement faiblement compacte de $L^1(T)$.

Précisons pour terminer que nous ne connaissons pas de caractérisation des espaces de Banach X tels que X'_{τ} soit p-infratonnelé.

BIBLIOGRAPHIE.

[E1] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. 3 à 5, Hermann, Paris, 1967.

[B2] N. BOURBAKI, *Intégration*, Ch. 1 à 4, Hermann, Paris, 1967, 2e édition.

[B3] N. BOURBAKI, *Intégration*, Ch. 5, Hermann, Paris, 1967, 2e édition.

[B4] N. BOURBAKI, *Intégration*, Ch. 9, Hermann, Paris, 1969.

[B5] H. BUCHWALTER, *Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-1, (1971), 91-106.

[B6] H. BUCHWALTER, *Espaces vectoriels bornologiques*, Publ. Dép. Math. Lyon, 2-1, (1965), 1-53.

[B7] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, (1969), 1-74.

[C1] H.S. COLLINS, *On the space $\ell^{\infty}(S)$ with the strict topology*, Math. Zeit., 106, (1968), 361-373.

[C2] J.B. CONWAY, *The strict topology and compactness in the space of measures*, II, Trans. Amer. Math. Soc. 126, (1967), 474-486.

[C3] J.B. COOPER, *The strict topology and spaces with mixed topology*, Proc. Amer. Math. Soc., 30, (1971), 583-592.

[DJ1] J. DAZORD-M. JOURLIN, *Fonctions mesurables et convergence en mesure*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, (1972), 87-98.

[DJ2] J. DAZORD-M. JOURLIN, *Sur quelques classes d'espaces localement convexes*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-2, (1971), 39-69.

[DJ3] J. DAZORD-M. JOURLIN, *La dualité entre les espaces* L^1 *et* L^∞, Prépublication n° 10, (Août 1972), Département de Mathématiques, Université de Saint-Etienne.

[E] R.E. EDWARDS, *Functional Analysis*, Holt-Rinehart-Winston, New-York, 1965.

[G1] D.J.H. GARLING, *A generalized form of inductive limit topology for vector spaces*, Proc. London Math. Soc., 3, (1964), 1-28.

[G2] A. GROTHENDIECK, *Sur certains sous-espaces de* L^p, Cand. J. Math., 6, (1954), 158-160.

[G3] A. GROTHENDIECK, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* C(K), Canad. J. Math., 5, (1953), 129-173.

[J] H. JARCHOW, *Die Universalität des Raumes* c_0 *für die Klasse der Schwartz-Räume*, Math. Ann., 203, (1973), 211-214.

[W] A. WIWEGER, *Linear spaces with mixed topology*, Studia Math., 20, (1961), 47-68.

Manuscrit remis le 1er mars 1974

Jean DAZORD
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE

Michel JOURLIN
Département de Mathématiques
Université de St-Etienne
23, rue du Docteur P. Michelon
42100 ST ETIENNE