PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN BOUZON

Essai de clarification des notions d'épreuve aléatoire et d'algèbre d'évènements

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t. 8-1

ESSAI DE CLARIFICATION DES NOTIONS D' EPREUVE ALEATOIRE ET D' ALGEBRE D' EVENEMENTS

Jean BOUZON

Ayant à enseigner les Probabilités dans le Second cycle d'Enseignement Supérieur, je me suis aperçu, dans les divers ouvrages que j'ai consultés, que la question de la définition des évènements aléatoires et de leur représentation par des parties d'un ensemble, était très obscure, parfois compliquée et en tout cas peu compréhensible pour les non-initiés. Pour arriver à la comprendre et à la faire comprendre aux étudiants, j'ai mis au point la présentation suivante qui me semble à la fois claire et rigoureuse, plus simple et plus naturelle. Elle comporte quelques aspects nouveaux qui peuvent être intéressants. Elle est prolongée par une définition d'espaces probabilisables séparables qui permet d'associer à chaque algèbre d'évènements un ensemble minimal tel que l'ensemble de ses parties contienne une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre donnée. Elle est suivie aussi par une définition d'image-réciproque d'une loi de probabilité par une application presque surjective quelconque : Cette notion permet en particulier de déterminer toutes les variables aléatoires réelles admettant une loi de probabilité donnée sur l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

Ces questions ont fait l'objet d'un exposé au Séminaire de Probabilités de la faculté des sciences de Lyon le 10 décembre 1970.

Définition et étude des évènements aléatoires et de leurs opérations.

On peut dire qu'une épreuve aléatoire est une expérience qui, si on la répète plusieurs fois dans des circonstances apparemment identiques , peut cependant se réaliser, ou s'accomplir, de plusieurs façons différentes.

Les évènements liés à une épreuve aléatoire sont des pronostics c'est-à-dire des propositions gratuites, qui dans tout accomplissement de l'épreuve se révèlent nécessairement comme vrais ou faux, avec tiers exclu. On rejette donc les propositions qui après certains accomplissements de l'épreuve ne deviendraient ni vraies ni fausses , soit par ambiguïté, soit par non-sens. Autrement dit un évènement lié à une épreuve aléatoire est une affirmation qui comporte un élément inconnu, lequel doit être précisé par chaque accomplissement de l'épreuve.

La non-réalisation d'un évènement s'appelle évènement contraire du premier ou négation du premier. La réalisation de l'un au moins des évènements d'un système quelconque d'évènements s'appelle somme ou disjonction de ces évènements. Leur réalisation simultanée s'appelle évènement produit ou conjonction de ces évènements.

On dit qu'un évènement en implique un autre si tout accomplissement de l'épreuve aléatoire qui réalise le premier réalise aussi le second. Deux évènements sont équivalents pour l'épreuve aléatoire si chacun implique l'autre pour cette épreuve. C'est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence sera appelée évènement réduit relatif à cette épreuve aléatoire.

Les évènements qui ne peuvent se réaliser dans aucun des accomplissements de l'épreuve forment une classe d'équivalence appelée l'évènement impossible, ou évènement nul, relatif à cette épreuve. On le représente par le chiffre 0 . Les évènements qui se trouvent réalisés dans tout accomplissement possible de l'épreuve forment aussi une classe d'équivalence appelée l'évènement certain relatif à cette épreuve. On le désigne par le chiffre 1.

La relation d'équivalence est compatible avec la négation, l'addition, la multiplication et l'implication. Ces quatre notions peuvent donc, par passage au quotient, s'appliquer aux classes d'équivalences, c'est-à-dire aux évènements réduits relatifs à l'épreuve aléatoire considérée. En particulier l'implication si on l'applique aux évènements réduits, devient une relation d'ordre. Alors que pour les évènements non réduits elle est seulement une relation de préordre.

Pour cette implication (réduite) , tout système d'évènements réduits admet une borne supérieure qui est sa somme (réduite) et une borne inférieure qui est son produit (réduit). On voit aisément qu'il y a distributivité de cette multiplication infinie par rapport à cette addition infinie. En effet pour que se réalise le produit de plusieurs sommes d'évènements il faut et il suffit que se réalisent simultanément un évènement de chaque somme, c'est-à-dire que doit se réaliser l'un au moins des produits obtenus en prenant un évènement arbitraire dans chacune des sommes. Ceci exprime exactement la distributivité de la multiplication d'ordre quelconque, fini ou infini, dénombrable ou non, par rapport à l'addition d'ordre quelconque (si on appelle ordre le nombre des termes ou des facteurs).

Les évènements réduits relatifs à une épreuve aléatoire forment donc une algèbre de Boole avec addition et multiplication d'ordre quelconque (fini ou infini, dénombrable ou non) : on dit pour cela qu'elle est complète. Désignons la par A_c . Mais généralement on ne s'intéresse pas à tous les évènements possibles : on se contente alors de considérer une sous-algèbre-de-Boole A ou une σ-sous-algèbre-de-Boole A_σ contenant les évènements intéressants (i.e. que A est un sous-ensemble stable pour la négation et pour l'addition d'ordre fini ; A_σ est stable aussi pour l'addition d'ordre dénombrable). Le sous-ensemble ainsi considéré est appelé une algèbre d'évènements.

Ainsi de par nature une algèbre d'évènements est toujours plongée dans une algèbre-de-Boole complète. Remarquons d'ailleurs que toute algèbre-de-Boole finie est complète, ainsi que toute σ-algèbre-de-Boole dénombrable.

Représentation des accomplissements d'une épreuve aléatoire par des ultra-filtres spéciaux.

Soit A_c une algèbre d'évènements complète contenant la sous-algèbre d'évènements A à laquelle on s'intéresse. A chaque accomplissement possible de l'épreuve aléatoire associée $\mathcal{E}$, faisons correspondre l'ensemble V des évènements de A_c qui se trouvent réalisés. D'après les définitions précédentes, cet ensemble V vérifie

1. L'évènement impossible n'appartient pas à V : $0 \notin V$
2. $(x \in V \text{ et } x \Rightarrow y) \Longrightarrow (y \in V)$
3. Le produit de tous les éléments de V appartient à V
4. Si un évènement n'appartient pas à V, son contraire appartient à V : $(x \notin V) \Longrightarrow (\bar{x} \in V)$.

Les trois premières propriétés prouvent que V est un filtre dans l'ensemble ordonné A_c. Il possède la propriété spéciale d'être stable pour la multiplication d'ordre quelconque, fini ou infini, dénombrable ou non. La propriété n° 4 prouve que V est un filtre maximal, c'est-à-dire un ultrafiltre.

Réciproquement si un ensemble V d'évènements de $\mathcal{A}_c$ vérifie ces quatre conditions il correspond à un accomplissement possible de l'épreuve aléatoire. En effet le produit de tous les éléments de V appartient à V (condition n° 3) donc il n'est pas nul (condition n° 1), ce qui veut dire qu'il existe au moins un accomplissement de l'épreuve qui réalise ce produit : il réalise donc tous les évènements de V (d'après la définition d'un produit) et aucun autre (conditions n° 4,3,1).

On peut donc identifier les accomplissements de l'épreuve aux sous-ensembles V de $\mathcal{A}_c$ qui vérifient les quatre conditions ci-dessus. En même temps cela identifie entre eux les accomplissements de l'épreuve qui réalisent les mêmes évènements dans $\mathcal{A}_c$

On peut aussi remarquer que la condition n° 2 est superflue car elle résulte des trois autres.

Correspondance entre les accomplissements d'une épreuve et les évènements élémentaires.

Soit a le produit de tous les évènements de l'ensemble V considéré tout-à-l'heure. Il vérifie les deux conditions suivantes :

$a \neq 0 \qquad (x \in \mathcal{A}_c \text{ et } a \not\Rightarrow x) \Rightarrow (a \Rightarrow \bar{x})$

Il en résulte que a n'a que deux impliquants, lui-même et l'évènement nul. On exprime cela en disant que a est un évènement élémentaire ou un atome de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_c$.

Réciproquement à tout évènement élémentaire b faisons correspondre l'ensemble V_b des éléments de $\mathcal{A}_c$ qui sont impliqués par b. On constate aisément que V_b vérifie les quatre conditions d'un ultrafiltre d'accomplissement. Ainsi il y a correspondance bijective entre les accomplissements d'une épreuve aléatoire et les évènements élémentaires relatifs à cette épreuve.

D'après la définition de l'évènement nul comme classe d'équivalence, c'est le seul évènement qui ne soit réalisé dans aucun accomplissement de l'épreuve. Donc tout évènement non nul est impliqué par un évènement élémentaire au moins. On en déduit que chaque évènement de $\mathcal{A}_c$ est la somme, c'est-à-dire le P.P.C. Maj. ou la borne supérieure, des atomes qui impliquent cet évènement.

En effet soit $A \in \mathcal{A}_c$ et soit S_A la somme des atomes qui impliquent A ; on a donc $S_A \Rightarrow A$. L'évènement $A\bar{S}_A$ représenté aussi par $A - S_A$ n'est impliqué par aucun atome, donc il est nul, c'est-à-dire $A \Rightarrow S_A$ d'où $A = S_A$.

En particulier la somme de tous les atomes est l'évènement certain : $S_1 = 1$. De plus les atomes sont deux à deux incompatibles (i.e. que leurs produits deux à deux sont nuls). On exprime cela en disant que les évènements élémentaires forment un système complet d'évènements dans $\mathcal{A}_c$.

Représentation d'une algèbre d'évènements $\mathcal{A}$ par une algèbre booléenne de parties d'un ensemble.

Soit $\mathcal{A}_c$ une algèbre d'évènements complète contenant $\mathcal{A}$ comme sous-algèbre de Boole, et soit E l'ensemble des atomes de $\mathcal{A}_c$. A chaque évènement A de $\mathcal{A}_c$ faisons correspondre l'ensemble $\varphi(A)$ des atomes qui impliquent A.

Les autres atomes impliquent $\bar{A}$, d'où $\varphi(\bar{A}) = E - \varphi(A)$.

Pour une famille quelconque d'évènements $A_i \in \mathcal{A}_c$, $i \in I$, on a

$$\varphi(\sum_i A_i) = \{x \in E \,;\, x \Rightarrow \text{l'un au moins des } A_i\} = \bigcup_i \{x \in E \,;\, x \Rightarrow A_i\} = \bigcup_i \varphi(A_i).$$

Cette application φ de $\mathcal{A}_c$ vers $\mathcal{P}(E)$ transforme donc la négation en complémentarité et l'addition en réunion. Il en résulte par dualité que la multiplication est transformée en intersection. Donc φ est un morphisme d'algèbres de Boole complètes.

Or chaque évènement est la somme des atomes qui l'impliquent. Il en résulte que φ est injective. Inversement si $X \subset E$, soit B la somme des éléments de X, on a alors $B \in \mathcal{A}_c$ et $\varphi(B) = X$. Donc φ est surjective. Finalement φ est un morphisme bijectif de $\mathcal{A}_c$ sur $\mathcal{P}(E)$.

Conclusion : Toute algèbre d'évènements $\mathcal{A}$ est isomorphe à une sous-algèbre-booléenne de parties de l'ensemble des atomes d'une algèbre d'évènements complète $\mathcal{A}_c$ contenant $\mathcal{A}$.

On arrive ainsi au même résultat que par le théorème correspondant de M.H. Stone. Ce dernier revient à dire que toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre d'évènements.

Dorénavant nous considérerons toute algèbre d'évènements comme algèbre booléenne de parties d'un ensemble. Cherchons maintenant à réduire le plus possible un tel ensemble pour une algèbre booléenne donnée.

Espace probabilisable séparable.

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{T}$ une algèbre booléenne de parties de E. On dira qu'un couple de points a et b de E est séparable pour cette algèbre booléenne si :

$$\exists X \in \mathcal{T} \quad \text{tel que} \quad a \in X \quad \text{et} \quad b \in \overline{X} \quad \text{(complémentaire de X)}$$

Si tout couple de points distincts est séparable on dira que l'ensemble E est séparable pour l'algèbre booléenne $\mathcal{T}$, ou que cette algèbre booléenne $\mathcal{T}$ est séparante pour l'ensemble E. Dans le cas où $\mathcal{T}$ est une tribu (σ-algèbre-booléenne) on dira aussi, dans les mêmes conditions, que l'espace probabilisable $(E,\mathcal{T})$ est séparable.

La relation « x est inséparable de y pour l'algèbre booléenne T » est une relation d'équivalence dans E : cela se vérifie aisément. Soit E_1 l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation : E_1 est donc une partition de E.

Si une telle classe d'équivalence appartient à l'algèbre booléenne T, elle est évidemment un atome de cette algèbre de Boole T. Réciproquement tout atome de T (s'il y en a) constitue une classe d'équivalence pour cette relation d'inséparabilité.

Si une partie $X \in T$ contient un point d'une classe d'équivalence elle la contient entièrement. Donc toute partie X appartenant à T est une réunion de classes d'équivalence. A chaque partie $X \in T$ on fera correspondre l'ensemble des classes d'équivalence dont X est la réunion. On obtient ainsi une application injective de T dans $P(E_1)$ qui respecte la complémentarité et la réunion. T est donc isomorphe à une algèbre booléenne T_1 dans $P(E_1)$.

L'ensemble E_1 muni de l'algèbre booléenne T_1 est séparable, puisque ses éléments sont les classes d'inséparabilité de E.

Conclusion . Toute algèbre booléenne de parties d'un ensemble E est isomorphe à une algèbre booléenne séparante sur un ensemble E_1 qui est une partition de E.

Remarque. Si un ensemble E est séparable pour une algèbre booléenne T, chaque classe d'équivalence de E pour T se réduit à un seul point. En particulier si T a des atomes, chacun d'eux se réduit à un seul point de E.

Proposition. *Soit un ensemble* E *muni d'une tribu T. Si l'ensemble* E_1 *des classes d'équivalence de* E *pour T est dénombrable, chaque classe appartient à la tribu. De plus T est isomorphe à* $P(E_1)$.

En effet soit $A \in E_1$. Les autres classes d'équivalence peuvent être rangées en une suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ finie ou infinie. Pour chaque classe B_n il y a au moins une partie $X_n \in \mathcal{T}$ telle que $A \subset X_n$ et $B_n \cap X_n = \emptyset$. Alors $\bigcap_{n \geqslant 1} X_n = A$, donc $A \in \mathcal{T}$ puisque $\mathcal{T}$ est stable pour l'intersection d'ordre dénombrable.

Corollaire. *Si $\mathcal{T}$ est une tribu séparante sur un ensemble dénombrable* E *alors*

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E) .$$

Ces propriétés justifient dans le cas des ensembles dénombrables, l'hypothèse usuelle implicite selon laquelle la tribu des parties mesurables possède toutes les parties réduites à un point.

Image réciproque d'une mesure par une application.

En calcul des Probabilités, après avoir défini la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle on pose la question : étant donné une loi de probabilité sur l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, existe-t-il des variables aléatoires réelles admettant cette loi comme distribution de probabilité ? A cela les manuels répondent généralement : il y en a toujours au moins une, la variable identité sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x$.

La réponse est un peu courte et très décevante quoiqu'exacte: Voici maintenant une réponse complète à cette question, généralisée à une mesure.

Soit un ensemble F muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ.

Soit $\mathcal{T}^c$ la tribu complétée de $\mathcal{T}$ pour cette mesure μ. Appelons encore μ le prolongement unique de μ à $\mathcal{T}^c$.

Soit E un ensemble quelconque et f une application de E dans F, telle que $f(E) \in \mathcal{T}^c$. Prenons sur E la tribu $f^{-1}(\mathcal{T})$ image réciproque de $\mathcal{T}$ par f.

Remarquons d'abord que $\forall X \in f^{-1}(\mathcal{T})$ on a $f(X) \in \mathcal{T}^c$ et $f^{-1}(f(X)) = X$.
En effet $\exists Y \in \mathcal{T}$ $f^{-1}(Y) = X$, alors $f(X) = Y \cap f(E) \in \mathcal{T}^c$ et
$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(Y) = X$.

Posons $\lambda(X) = \mu(f(X))$, soit $\lambda = \mu \circ f$. Montrons que cette fonction λ vérifie les axiomes d'une mesure sur $(E, f^{-1}(\mathcal{T}))$:

$$\lambda(X) \geqslant 0 \qquad\qquad \lambda(\emptyset) = \mu(f(\emptyset)) = 0$$

Soit une suite de parties deux à deux disjointes $A_n \in f^{-1}(\mathcal{T})$, $n \in \mathbb{N}$.
Les parties $f(A_n)$ appartiennent à $\mathcal{T}^c$ et $f^{-1}(f(A_n)) = A_n$ donc
$f^{-1}(f(A_n) \cap f(A_p)) = A_n \cap A_p = \emptyset_E$ si $n \neq p$
d'où $f(A_n) \cap f(A_p) \subset F - f(E)$ or $f(A_n) \cap f(A_p) \subset f(E)$
donc $f(A_n) \cap f(A_p) = \emptyset_F$ or si $Y \subset f(E)$ $f(f^{-1}(Y)) = Y$

$$\lambda(\bigcup_n A_n) = \lambda(\bigcup_n f^{-1} f(A_n)) = \lambda(f^{-1}(\bigcup_n f(A_n))) = \mu[f\, f^{-1}(\bigcup_n f(A_n))] = \mu(\bigcup_n f(A_n)) = \sum_n \lambda(A_n)$$

Cette fonction $\lambda = \mu \circ f$ est donc une mesure. Or f est une application mesurable de l'espace mesuré $(E, f^{-1}(\mathcal{T}), \lambda)$ dans l'espace mesurable $(F, \mathcal{T})$. Il y a donc une mesure image λ_f de λ par f :

$$\forall Y \in \mathcal{T} \qquad \lambda_f(Y) = \lambda(f^{-1}(Y)) = \mu(f\, f^{-1}(Y)) = \mu(Y \cap f(E))$$

Cette mesure image λ_f s'identifie donc avec la trace de μ sur f(E). On aura $\lambda_f = \mu$ si f est surjective ou presque-surjective (i.e. si $\mu(F - f(E)) = 0$).

Par exemple si E est une partie mesurable de F, l'image réciproque de μ par l'injection canonique de E est la trace de μ sur E.

Cas particulier. si μ est une loi de probabilité et si f est surjective ou presque-surjective (i.e. si $\exists B \in \mathcal{T}$ $B \subset f(E)$ $\mu(B) = 1$) alors la mesure $\lambda = \mu \circ f$ est aussi une loi de probabilité e t son image par f est μ c'est-à-dire $\lambda \circ f^{-1} = \mu$.

Par ce procédé on obtient en particulier toutes les variables aléatoires réelles admettant une distribution de probabilité donnée sur l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

J. BOUZON
U.E.R. de Sciences
SAINT-ETIENNE (42)