PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

VLAD BOICESCU

Sur les systèmes déductifs dans la logique Θ-valente

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 123-133

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_123_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t.8-1

SUR LES SYSTEMES DEDUCTIFS DANS LA LOGIQUE Θ-VALENTE

Vlad BOICESCU

En 1968, Gr. C. Moisil a généralisé la notion d'algèbre de Lukasiewicz, en définissant les algèbres Θ-valentes, où Θ est un type d'ordre quelconque (2).

Nous nous proposons de relier le point de vue logique au point de vue algébrique et de démontrer de manière algébrique le théorème de déduction en analysant aussi les systèmes déductifs de ce calcul.

Soit J un ensemble totalement ordonné ayant un plus petit et un plus grand élément et Θ le type d'ordre de J. Les symboles du calcul Θ-valent seront les suivants :

- variables propositionnelles : A,B,C,....
- connecteurs : $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}, \{\bar{\phi}_\alpha\}_{\alpha \in J}$.
  parenthèses : (,).

Les formules seront définies par récurrence ;

- les variables propositionnelles sont des formules.
- si $\mathcal{A}$ est une formule, alors $\phi_\alpha \mathcal{A}$, $\bar{\phi}_\alpha \mathcal{A}$ sont des formules aussi pour tout $\alpha \in J$.
- si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des formules, alors $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ sont des formules aussi.

On va écrire : $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \overset{\text{Def}}{\equiv} \bar{\phi}_1 \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ et

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \overset{\text{Def}}{\equiv} (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A}).$$

Les axiomes du calcul propositionnel Θ-valent seront les suivants :

1) $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$
2) $(A \to (B \to C)) \longrightarrow ((A \to B) \longrightarrow (A \to C))$.
3) $(A \wedge B) \longrightarrow A$
4) $(A \wedge B) \longrightarrow B$
5) $(C \longrightarrow A) \longrightarrow ((C \longrightarrow B) \longrightarrow (C \longrightarrow (A \wedge B)))$.
6) $A \longrightarrow (A \vee B)$
7) $B \longrightarrow (A \vee B)$
8) $(A \longrightarrow C) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow ((A \vee B) \longrightarrow C))$.
9) $\phi_\alpha (A \wedge B) \longleftrightarrow \phi_\alpha A \wedge \phi_\alpha B$. $\forall \alpha \in J$.
10) $\bar{\phi}_\alpha (A \vee B) \longleftrightarrow \bar{\phi}_\alpha A \wedge \bar{\phi}_\alpha B$. $\forall \alpha \in J$.
11) $\phi_\alpha A \vee \bar{\phi}_\alpha A$
12) $\phi_\alpha A \leftrightarrow \bar{\phi}_\beta \bar{\phi}_\alpha A$ $\quad \forall \alpha, \beta \in J$.
13) $\phi_\alpha A \leftrightarrow \phi_\beta \phi_\alpha A$ $\quad \forall \alpha\ \beta \in J$.
14) $\bar{\phi}_\alpha A \leftrightarrow \phi_\beta \bar{\phi}_\alpha A$ $\quad \forall \alpha\ \beta \in J$.
15) $\bar{\phi}_\alpha A \leftrightarrow \bar{\phi}_\beta \phi_\alpha A$ $\quad \forall \alpha\ \beta \in J$.
16) $\phi_\beta A \to \phi_\alpha A$ $\quad \forall \alpha, \beta$ et $\alpha \leqslant \beta$.

Les règles de déduction seront les deux règles habituelles.

Pour caractériser ce calcul du point de vue sémantique, on va prendre comme ensemble de valeurs l'algèbre de Lukasiewicz Θ-valente D L_2, définie par :

$$D\,L_2 = \{f : J \rightarrow L_2 \mid \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow f(\alpha) \supset f(\beta)\}.$$

Il est important de voir que D L_2 est une algèbre de Post Θ-valente, complète. Les notions d'interprétation et de formule universellement valide s'introduisent de manière analogue à la logique classique (4).

Notons avec T l'ensemble des formules démontrables.

Dans l'ensemble des formules on peut définir la relation d'analogie : $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \overset{Def}{\Longleftrightarrow} \phi_\alpha \mathcal{A} \leftrightarrow \phi_\alpha \mathcal{B} \in T$ pour tout $\alpha \in J$. On obtient ainsi l'algèbre de Lindenbaum-Tarski du calcul considéré. Nous avons alors :

THEOREME 1. L'algèbre de Lindenbaum-Tarski du calcul Θ-valente est une algèbre de Lukasiewicz Θ-valente.

Ce théorème permet de transférer les propriétés valables dans une algèbre de Lukasiewicz Θ-valente quelconque, dans l'algèbre adjacente au calcul Θ-valent. Soit alors L une algèbre de Lukasiewicz Θ-valente.

LEMME 1. Dans L *nous avons les propriétés :*

A 1) $x = y \Longleftrightarrow \phi_\alpha x \leftrightarrow \phi_\alpha y = 1$

A 2) $x \leftrightarrow \phi_1 x = 1$

A 3) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$.

A 4) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

A 5) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$.

A 6) $1 \rightarrow x = x$.

Démonstration.

A 1) Supposons $x = y$; alors $\phi_\alpha x \rightarrow \phi_\alpha y = \bar{\phi}_1 \phi_\alpha x \vee \phi_\alpha y = \bar{\phi}_\alpha x \vee \phi_\alpha y = \bar{\phi}_\alpha x \vee \phi_\alpha x = 1$.

Inversement si $\phi_\alpha x \rightarrow \phi_\alpha y = 1$, alors $\bar{\phi}_\alpha x \vee \phi_\alpha y = 1$.
Donc $\phi_\alpha x \wedge (\bar{\phi}_\alpha x \vee \phi_\alpha y) = \phi_\alpha x$ c'est-à-dire $\phi_\alpha x \wedge \phi_\alpha y = \phi_\alpha x$.
Donc $\phi_\alpha x \subset \phi_\alpha y$ et $\phi_\alpha y \rightarrow \phi_\alpha x = 1 \Rightarrow \phi_\alpha y \subset \phi_\alpha x$.

A 2) $x \leftrightarrow \phi_1 x = (\bar{\phi}_1 x \vee \phi_1 x) \wedge (\bar{\phi}_1 x \vee x) = 1 \wedge 1 = 1$.

A 3) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = \bar{\phi}_1 x \vee (y \rightarrow z) = \bar{\phi}_1 x \vee (\bar{\phi}_1 y \vee z)$;
et $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = (\bar{\phi}_1 x \vee y) \rightarrow (\bar{\phi}_1 x \vee z) =$
$= (\phi_1 x \wedge \bar{\phi}_1 y) \vee \bar{\phi}_1 x \vee z = \bar{\phi}_1 y \vee \bar{\phi}_1 x \vee z$.

A 4) $x \rightarrow (y \wedge z) = \bar{\phi}_1 x \vee (y \wedge z) = (\bar{\phi}_1 x \vee y) \wedge (\bar{\phi}_1 x \vee z) =$
$(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$.

A 5) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = \bar{\phi}_1 x \vee \bar{\phi}_1 y \vee z = \bar{\phi}_1 (x \wedge y) \vee z = (x \wedge y) \rightarrow z$.

A 6) $1 \rightarrow x = \bar{\phi}_1 1 \vee x = x$.

DEFINITION 1. Un sous-ensemble D *de* L *est appelé système déductif s'il possède les propriétés suivantes :*

- $1 \in D$
- *Si* $x \in D$ *et* $x \rightarrow y \in D$, *alors* $y \in D$.

On va noter par $D(J)$ le système déductif engendré par J.

LEMME 2. $D(\emptyset) = \{1\}$

Démonstration. Etant donné que 1 appartient à tout système déductif et $\emptyset$ est contenu dans tout système déductif, on obtient $1 \in D(\emptyset)$. D'autre part en appliquant A 6), il résulte que $\{1\}$ est un système déductif.

DEFINITION 2. *Si* $J \neq \emptyset$, *est un sous-ensemble d'une algèbre* L, *on dira que* t *est une conséquence de* J *s;il existe un ensemble fini* $\{x_1, x_2, - \dots x_n\} \subseteq J$ *tel que* $(x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n) \to t = 1$. *En appliquant* A 5) , *on a :* $(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \to t = x_1 \to (x_2 \to \dots (x_n \to t) \dots)$.

On va noter par $C(J)$ l'ensemble des conséquences de J et on va poser par définition $C(\emptyset) = \{1\}$

LEMME 3. *Pour tout* $J \subset L$, *on a* $D(J) = C(J)$.

Démonstration. Si $J = \emptyset$, on a $D(\emptyset) = C(\emptyset) = \{1\}$
Supposons donc que $J \neq \emptyset$. On voit que $1 \in C(J)$, parce qu'il existe un élément $x \in J$, et $x < 1 \Rightarrow x \to 1 = 1$ par A 1).
Supposons que $x \in C(J)$ et $x \to y \in C(J)$. Il existe alors les éléments $x_1, x_2 \dots x_p$ et x'_1 , x'_2 , ... x'_q appartenant à J tels que : $(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) \to x = 1$ et $(x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_q) \to (x \to y) = 1$.

En appliquant A 1) on trouve $(x'_1 \wedge x'_2 \wedge \longrightarrow \wedge x'_q) \longrightarrow ((x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_p) \longrightarrow x) = 1$ et $(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) \longrightarrow ((x'_1 \wedge x'_2 \wedge \ldots \wedge x'_q) \longrightarrow (x \longrightarrow y)) = 1$.

Mais conformément à A 5), on a $(x'_1 \wedge x'_2 \ldots \wedge x'_q \wedge x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_p) \longrightarrow x = 1$ et $(x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_p \wedge x'_1 \wedge x'_2 \ldots \wedge x'_q) \longrightarrow (x \longrightarrow y) = 1$. Alors $((x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge x'_1 \ldots \wedge x'_q) \longrightarrow x) \longrightarrow ((x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge \ldots \wedge x'_1 \ldots \wedge x'_q) \longrightarrow y) = 1$ (A 3)) ; Donc $(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge x'_1 \wedge x'_2 \ldots \wedge x'_q) \longrightarrow y = 1$, qui démontre que $y \in C(J)$.

On a obtenu donc que $C(J)$ est un système déductif.

Si $x \in J$, on a $x \longrightarrow x = 1$, qui montre que $J \subseteq C(J)$.

Il reste à prouver que $C(J)$ est le plus petit système déductif qui contient J. Soit alors D un système déductif, tel que $J \subset D$. Et soit $x \in C(J)$. Il existe alors les éléments $x_1\ x_2 \ldots x_p \in J$, tels que $x_1 \longrightarrow (x_2 \longrightarrow \ldots (x_p \longrightarrow x)) \ldots) = 1$. En appliquant la définition du système déductif, on trouve que $x \in D$. Donc $C(J) \subseteq D$.

THEOREME 2. (*Théorème de la déduction*). *Pour tout* $J \subseteq L$ *et pour tout* $x \in L$, *nous avons* $D(J \cup \{x\}) = C(J \cup \{x\}) = \{y \in L / x \longrightarrow y \in C(J)\}$.

<u>Démonstration</u>. Notons $D' = \{y \in L / x \longrightarrow y \in C(J)\}$.

- D' est un système déductif.

En effet $x \longrightarrow 1 = 1 = 1 \in C(J)$. Donc $1 \in D'$. Supposons que y et $y \longrightarrow z \in D'$. Nous avons alors : $x \longrightarrow y \in C(J)$ et $x \longrightarrow (y \longrightarrow z) \in C(J)$.

Par A 3) il résulte que $(x \to y) \to (x \to z) \in C(J)$. Conformément au lemme 3, il résulte que $x \to z \in C(J)$. Donc $z \in D'$.

- $J \cup \{x\} \subset D'$. En effet $x \to x = 1 \in C(J)$. Donc $x \in D'$. Si $y \in J$, on a $y \to (x \to y) = 1$ (axiome 1). Donc $x \to y \in C(J)$. Donc $y \in D'$.

- Supposons que D est un système déductif, tel que $J \cup \{x\} \subseteq D$. Autrement dit $J \subseteq D$ et $x \in D$. Alors $C(J) = D(J) \subseteq D$. Soit $y \in D'$; donc $x \to y \in C(J)$, il résulte que $x \to y \in D$, ce qui démontre que $y \in D$. Donc $D' \subset D$. On a démontré que $D' = D(J \cup \{x\})$.

On achève la démonstration en appliquant le lemme 3.

COROLLAIRE. $D(\{x\}) = \{y \in L / x \to y = 1\} = C(\{x\})$.

Démonstration. $D(\{x\}) = D(\emptyset \cup \{x\}) = \{y \in L / x \to y \in C(\emptyset)\} = \{y \in L / x \to y = 1.\}$.

On donnera maintenant une caractérisation des systèmes déductifs, en utilisant les filtres de l'algèbre.

DEFINITION 3. Un filtre F *de* L *sera appelé un Θ-filtre si pour tout* $x \in F$ *on a* $\phi_\alpha x \in F$, $\forall \alpha \in J$.

THEOREME 3. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) F *est un* Θ*-filtre.*

b) F *est un système déductif.*

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ b). Il est évident que $1 \in F$.

Soit $x \in F$ et $x \to y \in F$, alors $\phi_\alpha x \in F$ et $\phi_\alpha(x \to y) \in F$. $\forall \alpha \in J$. Mais $\phi_\alpha(x \to y) = \phi_\alpha(\bar{\phi}_1 x \vee y) = \bar{\phi}_1 x \vee \phi_\alpha y$.

Alors $\phi_1 x \wedge (\bar{\phi}_1 x \vee \phi_1 y) = \phi_1 x \wedge \phi_1 y \in F$.

Mais $\phi_1 x \wedge \phi_1 y \subset \phi_1 y \subset y$ Donc $y \in F$.

b) $\Rightarrow$ a) Soit x,y deux éléments de F. Nous avons alors $x \to (x \wedge y) = (x \to x) \wedge (x \to y) = x \to y$.

Mais $y \to (x \to y) = 1 \in F$, Donc $x \to y \in F$.

Il résulte que $x \wedge y \in F$.

Si $x \in F$, alors $x \vee y > x$, pour tout $y \in L$. Donc $x \to (x \vee y) = 1 \in F$.

La règle de modus ponens montre que $x \cup y \in F$.

En appliquant A 2) il résulte que F est Θ-filtre.

Ce résultat montre que l'analyse des systèmes déductifs revient à celle des Θ-filtres, dont la caractérisation est faite en [1].

Rappelons le résultat essentiel :

THEOREME 4. Si F *est un* Θ*-filtre propre de* L, *alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

a) F *est premier.*

b) $x \in CL \Rightarrow x \in F$ o $\bar{x} \in F$. *(où* CL *est l'algèbre de Boole des éléments chrysippiens).*

c) F est maximal.

Ce théorème montre que les systèmes déductifs complets coïncident avec les systèmes déductifs maximaux. Nous avons aussi la propriété suivante

A) $T = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D$, ou $\mathcal{D}$ est l'ensemble des systèmes déductifs complets (s.d.c.) (Un sdc est un système déductif D, tel que si $\mathcal{A} \longleftrightarrow \phi_\alpha \mathcal{A}, \forall \alpha \in J$ est une formule démontrable, alors ou bien $\mathcal{A} \in D$, ou bien $\bar{\phi}_\alpha \mathcal{A} \in D$).

Une classe importante de sdc est donnée par les validations, c'est-à-dire par les $V_h = \tilde{h}^{-1}(1)$, h étant des systèmes de valeurs de vérité. Il est facile de voir qu'un V_h est un sdc. Les seuls éléments chrysippiens de D L_2 sont les fonctions 0 et 1. Donc $\phi_\alpha \tilde{h}(\mathcal{A})$ est 0 ou 1. Si $\phi_\alpha \tilde{h}(\mathcal{A}) = 1$, alors $\phi_\alpha \mathcal{A} \in V_h$; Dans le cas contraire on obtient $\bar{\phi}_\alpha \mathcal{A} \in V_h$.

LEMME 4. Tout sdc est une validation.

Démonstration. En effet si D est un sdc, il est facile de voir que les propriétés ci-dessous sont vérifiées :

a) $\phi_\alpha \mathcal{A} \in D \longleftrightarrow \bar{\phi}_\alpha \mathcal{A} \notin D$

b) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \in D \Longleftrightarrow \mathcal{A} \in D$ et $\mathcal{B} \in D$

c) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in D \Longleftrightarrow \mathcal{A} \in D$ ou $\mathcal{B} \in D$.

On n'a qu'à utiliser la bijection entre l'ensemble des sdc de E (l'ensemble des formules) et l'ensemble des Θ-filtres maximaux de $E/\equiv$.

Soit H la fonction, définie de la manière suivante :
- si $\mathcal{A} \in D$, $H(\mathcal{A})(\alpha) = 1$, $\forall\, \alpha \in J$.
- si $\mathcal{A} \notin D$, on a $H(\mathcal{A})(\alpha) = 1$, si $\phi_\alpha \mathcal{A} \in D$. et
$H(\mathcal{A})(\alpha) = 0$, si $\phi_\alpha \mathcal{A} \notin D$

Les propriétés soulignées se traduisent alors par :

$$H(\phi_\alpha \mathcal{A}) = \phi_\alpha\, H(\mathcal{A})$$
$$H(\bar{\phi}_\alpha \mathcal{A}) = \bar{\phi}_\alpha\, H(\mathcal{A})$$
$$H(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) \wedge H(\mathcal{B}).$$
$$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) \vee H(\mathcal{B}).$$
$$H(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{B}).$$
$$H(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) \leftrightarrow H(\mathcal{B}).$$

Si on prend la restriction de H à l'ensemble des formules élémentaires on obtient un système de valeurs de vérité h, tel que $D = V_h$.

On obtient alors :

THEOREME 5. Théorème de complétude sémantique). Le calcul Θ-valent est complet du point de vue sémantique.

Démonstration. En effet le lemme 4, montre qu'il y a identité entre les systèmes déductifs complets et les validations. Mais d'après A) on obtient alors :

$T = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D = \bigcap_{h \in \mathcal{H}} V_h$; $\mathcal{H}$ étant l'ensemble des interprétations, il y a donc identité entre les formules démontrables et celles universellement valides.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. GEORGESCU — *Les algèbres de Lukasiewicz θ-valentes, "Logique, automatique, informatique".* (sous presse).

[2] Gr. C. MOISIL — *Lukasiewiczian algebras* (mimeographed notes), 1968.

[3] A. MONTEIRO — *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques.* Math. Japon, 12, 1-23 (1967).

[4] D. PONASSE — *Logique mathématique,* O.C.D.L. Paris, 1967.
