PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

E. OUDIN

Demi-groupes commutatifs réticulés résidués intégralement clos

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 1
, p. 83-112
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_1_83_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1963 t. 5-1

DEMI-GROUPES COMMUTATIFS RETICULES

RESIDUES INTEGRALEMENT CLOS

E. CUDIN

On connait trois caractérisations des anneaux commutatifs noethèriens intégralement clos, énoncées respectivement par Van der Waerden - Artin [9], Krull - Nagata [7] . Yoshida [10] . Les deux dernières caractérisations ont été étendues par G. Maury [6] aux demi-groupes commutatifs noethériens à élément unité en particulier.

Or, seule la première caractérisation à été étendue par Madame Dubreil-Jacotin [3] aux gerbiers commutatifs résidués. Le but que nous nous proposons est de définir dans le cas d'un demi-groupe commutatif à élément unité, réticulé, résidué, une condition permettant de généraliser la deuxième caractérisation précédente.

Soit D un demi-groupe commutatif, à élément unité e, demi-réticulé (appelé encore gerbier commutatif [3]), c'est - à -dire que D est aussi un demi-treillis tel que la multiplication soit isotone par rapport à l'union, et soit D' le sous-demi-groupe des éléments entiers, c'est-à-dire inférieurs ou égaux à e. Si de plus, D est résidué, D est dit intégralement clos si l'on a : $\forall\, a \in D$, $a : a = e$.

L'équivalence d'Artin $\mathcal{A}$ étant définie par : $a, b \in D$, $a\ \mathcal{A}\ b \Longleftrightarrow e : a = e : b$, la première caractérisation s'énonce alors ([3] p 243) :

> Le gerbier commutatif à élément unité résidué D est intégralement clos si et seulement s'il vérifie la condition (A) suivante :
>
> $D/_{\mathcal{A}}$ est un groupe

La deuxième caractérisation faisant intervenir la notion d'anneau des fractions $A_{\mathfrak{P}}$ d'un anneau commutatif A relativement à la partie multiplicative $A - \mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de A, nous avons défini tout d'abord une relation d'équivalence R_S, S désignant un sous-demi-groupe de D' contenant l'élément unité. Cette relation R_S généralise la relation d'équivalence comme dans le cas du gerbier résidué des idéaux fractionnaires d'un domaine d'intégrité noethérien ([2] p. 28). Cette relation R_S étant définie, nous avons remarqué que si D est l'ensemble des idéaux fractionnaires d'un domaine d'intégrité noethèrien A, alors $D_S = D/_{R_S}$ avec $S = \{\mathfrak{Q} \subseteq A\ ;\ \mathfrak{Q} \not\subseteq \mathfrak{P}\}$ coïncide avec l'ensemble des idéaux fractionnaires de $A_{\mathfrak{P}}$.

Après avoir introduit la définition d'un élément principal dans le demi-groupe réticulé résidué D, nous avons étudié les propriétés des décompositions en intersection d'éléments primaires et nous énonçons une condition (B) vérifiée si D est intégralement clos ou bien si D vérifie la condition (A), sous l'hypothèse que le sous-demi-groupe D' soit noethérien. Toutefois, cette condition (B) n'étant pas suffisante pour que D soit intégralement clos, nous pouvons finalement énoncer une caractérisation valable sous la condition suivante : tout élément entier est supérieur ou égal à un élément principal.

En supposant de plus l'existence d'une décomposition primaire pour tout élément entier, on définit la notion de puissance symbolique d'un élément premier et il est alors possible d'énoncer une caractérisation généralisant la troisième caractérisation, sous certaines hypothèses supplémentaires qui sont vérifiées dans le cas où D est le demi-groupe des idéaux fractionnaires d'un domaine d'intégrité noethérien [12] . La thèorie développée redonne alors les propriétés connues des anneaux et demi-groupes commutatifs noethériens intégralement clos.

CHAPITRE I

- ETUDE DE D_S -

§ 1 - Hypothèses de structure.

Soit D un demi-groupe commutatif à élément unité réticulé résidué, c'est à dire :

1) D est un demi-groupe commutatif à élément unité e :

. D est muni d'une loi : $\forall a,b \in D \quad (a,b) \longrightarrow ab$

telle que : $\forall a,b \in D \quad ab = ba$

$\forall a \in D \quad ae = ea = a$

. Si D possède un zéro, $D^* = D - \{0\}$ est un sous-demi-groupe de D.

2) D est un treillis :

. D est muni de deux lois :

$$\forall a,b \in D \qquad (a,b) \longrightarrow a \vee b$$
$$(a,b) \longrightarrow a \wedge b$$

telles que : $\forall a,b,c \in D$

$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a$

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

$a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$

. D est ordonné par la relation d'ordre : $a,b \in D$

$a \leqslant b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

. la multiplication est isotone par rapport à l'union :

$\forall a,b,c \in D \qquad a(b \vee c) = (ab) \vee (ac)$

. si D possède un zéro, 0 est le plus petit élément de D.

On a alors les propriétés :

. $\forall a,b,c \in D \quad , \quad a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$

. $\forall a,b,c \in D \quad , \quad a(b \wedge c) \leqslant ab \wedge ac$

3) D^* est résidué :

On pose $D^* = D - \{0\}$ si D possède un zéro et $D^* = D$ si D ne possède pas de zéro. Alors $\forall a,b \in D^*$, l'ensemble $\{x \in D \ ; \ ax \leqslant b\}$ n'est pas vide et possède un élément maximum noté $b:a$ et appelé résiduel de b par a.

On a alors les propriétés : $\forall a,b,c \in D$

- $bc \leqslant a \Leftrightarrow b \leqslant a:c \Leftrightarrow c \leqslant a:b$
- $a \leqslant b \Rightarrow a:c \leqslant b:c \ , \ c:b \leqslant c:a$
- $(a:b):c = (a:c):b = a:bc$
- $a \leqslant b:(b:a) \ , \ a:(a:(a:b)) = a:b$
- $a(b:c) \leqslant ab:c$
- $(a \wedge b):c = (a:c) \wedge (b:c)$
- $a:(b \vee c) = (a:b) \wedge (a:c)$

§ 2 - Ensemble a_S.

Soit D' le sous-demi-groupe des éléments entiers de D et S un sous-demi-groupe de D' contenant l'élément unité et ne contenant pas l'élément zéro, s'il existe.

Soit a un élément de D et soit l'ensemble :

$$a_S = \{x \in D \ ; \ \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a\}$$

On a alors les propriétés suivantes :

P I.1 :

$$\forall a \in D \ , \ a \in a_S$$

P I.2 :

$$a,b \in D \ , \ a \leqslant b \Rightarrow a_S \subseteq b_S$$

$$x \in a_S \Rightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a \leqslant b \Rightarrow x \in b_S$$

P I.3 :

$$\forall s \in S \ , \ \forall a \in D \ , \ a_S = (as)_S$$

$$as \leqslant a \Rightarrow (as)_S \subseteq a_S$$

$$x \in a_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant a \Rightarrow s'sx \leqslant as \Rightarrow$$
$$x \in (as)_S \Rightarrow a_S \subseteq (as)_S$$

<u>P I.4</u> :

$$\forall\, a,b \in D\ ,\ (a \wedge b)_S = a_S \Cap b_S$$

$$x \in (a \wedge b)_S \Rightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a \wedge b$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} sx \leqslant a \Rightarrow x \in a_S \\ sx \leqslant b \Rightarrow x \in b_S \end{array} \right| \Rightarrow x \in a_S \Cap b_S$$
$$x \in a_S \Cap b_S \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x \in a_S \Rightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a \\ x \in b_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant b \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} ss'x \leqslant s'a \leqslant a \\ ss'x \leqslant sb \leqslant b \end{array} \right| \Rightarrow ss'x \leqslant a \wedge b \Rightarrow x \in (a \wedge b)_S$$

<u>P I.5</u> :

$$\forall\, a,b \in D\ ,\ a_S \Cup b_S \subseteq (a \vee b)_S$$

$$x \in a_S \Cup b_S \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x \in a_S \Rightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a \leqslant a \vee b \\ \text{ou} \\ x \in b_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant b \leqslant a \vee b \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow x \in (a \vee b)_S$$

<u>P I.6</u> :

$$\forall\, s \in S\ ,\ \forall\, a \in D^*\ ,\ a_S = (a:s)_S$$

$$sa \leqslant a \Rightarrow a \leqslant a:s \Rightarrow a_S \subseteq (a:s)_S$$
$$x \in (a:s)_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant a:s \Rightarrow ss'x \leqslant a \Rightarrow x \in a_S$$
$$\Rightarrow (a:s)_S \subseteq a_S$$

§ 3 - <u>Relation d'équivalence R_S</u>.

Soit la relation $a,b \in D$, $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a_S \subseteq b_S$, c'est une relation de préordre dans D, car :

- $a_S \subseteq a_S \Leftrightarrow a \preccurlyeq a$
- $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a_S \subseteq b_S \subseteq c_S \Leftrightarrow a \preccurlyeq c$

Soit R_S la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre :

$$a,b \in D \ , \ a \, R_S \, b \Leftrightarrow (a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a) \Leftrightarrow a_S = b_S$$

On a alors les propriétés :

P I.7 :

$$a,b \in D \ , \ \forall\, c \in D \ , \ a \, R_S \, b \Rightarrow (a \wedge c) R_S (b \wedge c)$$

$$a \, R_S \, b \Leftrightarrow a_S = b_S \Rightarrow a_S \Cap c_S = b_S \Cap c_S \Leftrightarrow$$
$$(a \wedge c)_S = (b \wedge c)_S \ \text{(d'après P I.4)} \Leftrightarrow (a \wedge c) R_S (b \wedge c)$$

P I.8 :

$$a,b \in D^*, \ \forall\, c \in D^* \ , \ a \, R_S \, b \Rightarrow (a:c) R_S (b:c)$$

$$x \in (a:c)_S \Leftrightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a:c \Leftrightarrow scx \leqslant a \Leftrightarrow cx \in a_S = b_S$$
$$\Leftrightarrow \exists\, s' \in S \mid s'cx \leqslant b \Leftrightarrow s'x \leqslant b:c \Leftrightarrow x \in (b:c)_S$$

P I.9 :

$$a,b \in D^* \ , \ \forall\, c \in D^* \ , \ a \, R_S \, b \Rightarrow (c:a) R_S (c:b)$$

$$x \in (c:a)_S \Rightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant c:a \Rightarrow sax \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c:sx \Rightarrow$$
$$a_S = b_S \subseteq (c:sx)_S \ ; \ b \in b_S \subseteq (c:sx)_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'b \leqslant c:sx$$
$$\Rightarrow ss'bx \leqslant c \Rightarrow ss'x \leqslant c:b \Rightarrow x \in (c:b)_S .$$

Donc $(c:a)_S \subseteq (c:b)_S$ et de même $(c:b)_S \subseteq (c:a)_S$

P I.10 :

$$a,b,c \in D \ , \ a \leqslant b \leqslant c \ , \ a \, R_S \, c \Rightarrow b \, R_S \, c$$

$a \leqslant b \leqslant c \Rightarrow a_S \subseteq b_S \subseteq c_S$; or $a \, R_S \, c \Leftrightarrow a_S = c_S$ donc $a_S = b_S = c_S \Leftrightarrow a \, R_S \, b \, R_S \, c$.

Soit X une partie non vide de D, on peut alors considérer l'ensemble :

$$X_S = \bigcup_{x \in X} x_S = \{ y \in D \ ; \ \exists\, s \in S \ , \ \exists\, x \in X \mid sy \leqslant x \}$$

Nous avons alors les propriétés :

P I.11 :

$\forall\, a,b \in D$, soit $a_S . b_S = \{ xy \ ; \ x \in a_S, y \in b_S \}$, alors $(a\,b)_S = (a_S . b_S)_S$

$x \in (ab)_S \Longleftrightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant ab$; or $a \in a_S$, $b \in b_S$, donc $x \in (a_S . b_S)_S$

$z \in (a_S . b_S)_S \Longrightarrow \exists\, x \in a_S,\ \exists\, y \in b_S,\ \exists\, s \in S \mid sz \leqslant xy$

$$\left.\begin{array}{l} \text{or } x \in a_S \Longleftrightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant a \\ \quad y \in b_S \Longleftrightarrow \exists\, s'' \in S \mid s''y \leqslant b \end{array}\right| \Longrightarrow s's''xy \leqslant ab$$

alors $ss's''z \leqslant s's''xy \leqslant ab \Longrightarrow z \in (ab)_S$

<u>P I.12</u> :

$$a, b \in D,\quad \forall\, c \in D,\ a\, R_S\, b \Longrightarrow (ac) R_S (bc)$$

$a\, R_S\, b \Longleftrightarrow a_S = b_S \Longrightarrow a_S . c_S = b_S . c_S \Longrightarrow$

$(ac)_S = (a_S . c_S)_S = (b_S . c_S)_S = (bc)_S$ (d'après P I.11) $\Longrightarrow (ac) R_S (bc)$

<u>P I.13</u> :

$\forall\, a, b \in D$, soit $a_S \cup b_S = \{ x \vee y \ ;\ x \in a_S, y \in b_S \}$, alors

$(a \vee b)_S = (a_S \cup b_S)_S$

$x \in (a \vee b)_S \Longleftrightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a \vee b$; or $a \in a_S, b \in b_S$, donc

$x \in (a_S \cup b_S)_S$

$z \in (a_S \cup b_S)_S \Longleftrightarrow \exists\, x \in a_S,\ \exists\, y \in b_S,\ \exists\, s \in S \mid sz \leqslant x \vee y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{or } x \in a_S \Longleftrightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant a \\ \quad y \in b_S \Longleftrightarrow \exists\, s'' \in S \mid s''y \leqslant b \end{array}\right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} s's''x \leqslant s''a \leqslant a \\ s's''y \leqslant s'b \leqslant b \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$s's''x \vee s's''y = s's''(x \vee y) \leqslant a \vee b \Longrightarrow ss's''z \leqslant s's''(x \vee y) \leqslant a \vee b$

$\Longrightarrow z \in (a \vee b)_S$

<u>P I.14</u> :

$$a, b \in D,\quad \forall\, c \in D,\ a\, R_S\, b \Longrightarrow (a \vee c) R_S (b \vee c)$$

$a\, R_S\, b \Longleftrightarrow a_S = b_S \Longrightarrow a_S \cup c_S = b_S \cup c_S \Longrightarrow$

$(a \vee c)_S = (a_S \cup c_S)_S = (b_S \cup c_S)_S = (b \vee c)_S$ (d'après P I.13) $\Longrightarrow$

$(a \vee c) R_S (b \vee c)$.

<u>P I.15</u> :

$\forall\, c, d \in D$, soit $c_S . d = \{ xd \ ;\ x \in c_S \}$, alors

$\forall\, a, b \in D^*$, $(a:b)_S = \{ x \in D \ ;\ b_S . x \subseteq a_S \}$

$x \in (a:b)_S \Longleftrightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant a:b \Longrightarrow sbx \leqslant a$

or $\forall\, y \in b_S$, $\exists\, s' \in S \mid s'y \leqslant b$

donc $\forall y \in b_S, ss'yx \leqslant sbx \leqslant a \Rightarrow \forall y \in b_S, yx \in a_S \Rightarrow b_S.x \subseteq a_S$

Soit $x \in D$ tel que $b_S.x \subseteq a_S$, alors $bx \in b_S.x \subseteq a_S \Rightarrow$ $\exists\, s \in S \mid sbx \leqslant a \Rightarrow sx \leqslant a:b \Rightarrow x \in (a:b)_S$

§ 4 - Eléments premiers et primaires dans D.

Définition I.1 :

D' étant le sous-demi-groupe des éléments entiers de D, un élément p, $p \in D'$, est premier si :

$$x,y \in D' \ ,\ xy \leqslant p \Rightarrow x \leqslant p \text{ ou } y \leqslant p$$

et un élément q, $q \in D'$, est primaire si :

$$x,y \in D' \ ,\ xy \leqslant q \Rightarrow x \leqslant q \text{ ou } \exists\, n \in \mathbb{N}^* \mid y^n \leqslant q$$

On a alors les propriétés :

P I.16 :

Soit a entier :

a) s'il existe $s \in S$ tel que $s \leqslant a$, alors $a\, R_S\, e$. En particulier $\forall s \in S$, $s\, R_S\, e$.

b) si $\forall s \in S$, $s \not\leqslant a$, alors a n'est pas congru à e modulo R_S.

a) $a \leqslant e \Rightarrow a_S \subseteq e_S$

$x \in e_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant e$ et, par hypothèse, $\exists\, s \in S \mid s \leqslant a \Rightarrow$ $ss'x \leqslant a \Rightarrow x \in a_S \Rightarrow e_S \subseteq a_S$. Finalement $a_S = e_S$ et $a\, R_S\, e$.

b) Supposons que $a\, R_S\, e$, alors $a_S = e_S \Rightarrow e \in e_S = a_S \Rightarrow \exists\, s \in S \mid$ $se \leqslant a$, ce qui est exclu par hypothèse, donc a n'est pas congru à e modulo R_S.

P I.17 :

Soit p entier premier tel que $\forall\, s \in S$, $s \not\leqslant p$, alors p est maximum parmi les éléments entiers congrus à p modulo R_S.

$x \in D'$, $x\, R_S\, p \Leftrightarrow p_S = x_S \Rightarrow x \in p_S \Leftrightarrow \exists\, s \in S \mid sx \leqslant p$ et $s \not\leqslant p$ par hypothèse, donc $x \leqslant p$ car p est premier. Donc p est maximum parmi les éléments entiers congrus à p modulo R_S.

P I.18 :

Soit q entier primaire tel que $\forall s \in S \mid s \not\leqslant q$, alors q est maximum parmi les éléments entiers congrus à q modulo R_S.

$x \in D'$, $x R_S q \Longleftrightarrow q_S = x_S \Longrightarrow x \in q_S \Longleftrightarrow \exists s \in S \mid sx \leqslant q$ et, par hypothèse, $\forall s \in S$, $s \not\leqslant q \Longrightarrow \forall s \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s^n \not\leqslant q$, alors $sx \leqslant q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s^n \leqslant q \Longrightarrow x \leqslant q$ car q est primaire. Donc q est maximum parmi les éléments entiers congrus à q modulo R_S.

§ 5 - Ensemble quotient D_S.

Etant donné la relation d'équivalence R_S, on peut considérer l'ensemble quotient D/R_S, que nous noterons D_S. Comme la relation d'équivalence R_S est compatible avec la multiplication, l'union et l'intersection, nous avons :

1) D_S est un demi-groupe commutatif à élément unité pour la loi
$\forall \bar{a}, \bar{b} \in D_S$ $\quad \bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}$, avec l'élément unité $\bar{e}$
et si D possède un zéro, $D_S^* = D_S - \{\bar{0}\}$ est un sous-demi-groupe de D_S.

2) D_S est un treillis pour les deux lois :
$\forall \bar{a}, \bar{b} \in D_S$ $\quad \bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \vee b}$, $\bar{a} \wedge \bar{b} = \overline{a \wedge b}$
(en notant encore $\vee$ et $\wedge$ l'union et l'intersection dans D_S)
avec la relation d'ordre :
$\bar{a}, \bar{b} \in D_S$, $\quad \bar{a} \leqslant \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{a} \Longleftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b} = \bar{b}$
($\leqslant$ désignant aussi la relation d'ordre dans D_S)
et si D possède un zéro, $\bar{0}$ est le plus petit élément de D_S.

Nous avons alors les propriétés :

P I.19 :

$\bar{a}, \bar{b} \in D_S$, $\forall \bar{c} \in D_S$, $\bar{a} \leqslant \bar{b} \Longrightarrow \bar{a}\,\bar{c} \leqslant \bar{b}\,\bar{c}$

$\bar{a} \leqslant \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b} = \bar{b} = \overline{a \vee b} \Longleftrightarrow (a \vee b)_S = b_S$, alors

$(ac \vee bc)_S = \underline{((a \vee b)c)_S} = ((\overline{a} \vee \overline{b})_{\underline{S}}.c_S)_{\underline{S}} = (b_S.c_S)_S = \overline{(bc)_S}$ (d'après P I.11) donc $\overline{ac \vee bc} = \overline{a}\,\overline{c} \vee \overline{b}\,\overline{c} = \overline{bc} = \overline{b}\,\overline{c} \Longleftrightarrow \overline{a}\,\overline{c} \leqslant \overline{b}\,\overline{c}$.

<u>P I.20</u> :

$$\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c} \in D_S\ ,\ \overline{a}(\overline{b} \vee \overline{c}) = \overline{a}\,\overline{b} \vee \overline{a}\,\overline{c}$$

$$\overline{a}(\overline{b} \vee \overline{c}) = \overline{a(b \vee c)} = \overline{ab \vee ac} = \overline{a}\,\overline{b} \vee \overline{a}\,\overline{c}$$

<u>P I.21</u> :

$$a,b \in D\ ,\ a \leqslant b \Longrightarrow \overline{a} \leqslant \overline{b}$$

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \vee b = b \Longrightarrow (a \vee b)_S = b_S \Longleftrightarrow \overline{a} \vee \overline{b} = \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \leqslant \overline{b}$$

Alors, étant donné ces propriétés, D_S est un demi-groupe commutatif à élément unité réticulé.

Etant donné la relation de préordre considérée précédemment dans D : $a,b \in D \qquad a \curlyeqprec b \Longleftrightarrow a_S \subseteq b_S$
nous avons défini la relation d'équivalence associée R_S. Alors, par passage au quotient, on peut définir une relation d'ordre associée dans D_S par : $\overline{a},\overline{b} \in D_S \qquad \overline{a} \leqslant_S \overline{b} \Longleftrightarrow \exists x \in \overline{a},\ \exists\ y \in \overline{b} \mid x \curlyeqprec y$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \overline{a},\ \forall\ y \in \overline{b}\ ,\ x \curlyeqprec y$$

Nous avons alors la propriété :

<u>P I.22</u> :

$$\overline{a},\overline{b} \in D_S\ ,\ \overline{a} \leqslant \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \leqslant_S \overline{b}$$

$\overline{a} \leqslant \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \vee \overline{b} = \overline{b} \Longleftrightarrow (a \vee b)_S = b_S$; or $a \leqslant a \vee b \Longrightarrow$
$a_S \subseteq (a \vee b)_S = b_S \Longleftrightarrow a \curlyeqprec b$ et, comme $a \in a_S, b \in b_S$, $\overline{a} \leqslant_S \overline{b}$.

$$\overline{a} \leqslant_S \overline{b} \Longleftrightarrow a \curlyeqprec b \Longleftrightarrow a_S \subseteq b_S$$

$z \in (a \vee b)_S = (a_S \cup b_S)_S$ (d'après P I.13) $\Longrightarrow \exists s \in S,\ \exists\ x \in a_S,$
$\exists\ y \in b_S \mid sz \leqslant x \vee y$

$$\left.\begin{array}{l} x \in a_S \subseteq b_S \Longrightarrow \exists\ s' \in S \mid s'x \leqslant b \\ y \in b_S \Longrightarrow \exists\ s'' \in S \mid s''y \leqslant b \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} s's''x \leqslant s''b \leqslant b \\ s's''y \leqslant s'b \leqslant b \end{array}\right.$$

alors $ss's''z \leqslant s's''(x \vee y) = s's''x \vee s's''y \leqslant b \Rightarrow z \in b_S$, donc $(a \vee b)_S \subseteq b_S$

$b \leqslant a \vee b \Rightarrow b_S \subseteq (a \vee b)_S$. Finalement $(a \vee b)_S = b_S \Longleftrightarrow$
$\overline{a \vee b} = \bar{a} \vee \bar{b} = \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a} \leqslant \bar{b}$

Ainsi la relation d'ordre dans D_S peut être définie par les conditions équivalentes : $\bar{a}, \bar{b} \in D_S$

$$\bar{a} \leqslant \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b} = \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{a}$$
$$\Longleftrightarrow \exists\, x \in \bar{a},\ \exists\, y \in \bar{b} \mid x_S \subseteq y_S$$
$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in \bar{a},\ \forall\, y \in \bar{b},\ x_S \subseteq y_S$$

Nous avons de plus la propriété :

P I.23 :

$$\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in D_S^* \qquad \bar{a} : \bar{b} = \overline{a:b}$$

$\bar{y} \in D_S^*, \bar{y}\,\bar{b} \leqslant \bar{a} \Longleftrightarrow (yb)_S \subseteq a_S$ (d'après P I.22) $\Rightarrow yb \in a_S \Rightarrow \exists\, s \in S$
$syb \leqslant a \Longleftrightarrow sy \leqslant a:b \Rightarrow (sy)_S = y_S \subseteq (a:b)_S$ (d'après P I.3) $\Longleftrightarrow$
$\bar{y} \leqslant \overline{(a:b)}$.

$(a:b)b \leqslant a \Rightarrow \overline{(a:b)}\ \bar{b} \leqslant \bar{a}$

De plus $\overline{a:b}$ ne dépend pas des représentants choisis dans les classes $\bar{a}$ et $\bar{b}$, mais seulement des classes car $a\ R_S\ a' \Rightarrow (a:b) R_S (a':b)$ et $b\ R_S\ b' \Rightarrow (a:b) R_S (a:b')$ (d'après P I.8 et P I.9).

Ainsi l'ensemble des éléments $\bar{y} \in D_S^*$ tels que $\bar{y}\,\bar{b} \leqslant \bar{a}$ possède un élément maximum $\overline{a:b}$ bien déterminé, qui est résiduel de $\bar{a}$ par $\bar{b}$, noté $\bar{a}:\bar{b}$.

Finalement D_S est un demi-groupe commutatif à élément unité réticulé résidué.

Nous avons alors :

Proposition I.1 :

Si D est intégralement clos, alors D_S est intégralement clos.

Si D est intégralement clos, $a:a = e$ pour tout élément non nul a de D.

Alors $\forall \bar{a} \in D_S^*$, $\bar{a}:\bar{a} = \overline{a:a} = \bar{e}$, car $a \in D^*$, le seul élément de $\bar{0}$ étant 0, donc D_S est intégralement clos.

§ 6 - Elément maximum d'une classe entière.

Dans cette partie nous supposerons de plus que le sous-demi-groupe D' des éléments entiers est noethérien, c'est à dire que D' vérifie la condition de chaîne ascendante.

Nous avons alors les propriétés :

P I.24 :

> Soit $\bar{a} \in D_S$, $\bar{a} \leqslant \bar{e}$, alors il existe un élément maximum parmi les éléments entiers de la classe $\bar{a}$.

Soit $a \in \bar{a}$, alors $\bar{a} \wedge \bar{e} = \overline{a \wedge e} = \bar{a}$, donc $a \wedge e$ est un élément de $\bar{a}$ et toute classe entière contient au moins un élément entier. Alors, d'après la condition de chaîne ascendante dans D', il existe un entier maximal m parmi les éléments entiers de $\bar{a}$. De plus, soit $x \in D', x \in \bar{a} \Longrightarrow x \vee m \in D'$ $\overline{x \vee m} = \bar{x} \vee \bar{m} = \bar{a}$, donc $x \vee m \in \bar{a}, x \vee m \leqslant e$ et $m = x \vee m$ car m est maximal parmi les éléments entiers de $\bar{a}$. Ainsi m est maximum parmi les éléments entiers de la classe $\bar{a}$.

P I.25 :

> Soit $a \in D'^*$, alors $\bigvee_{s \in S} ((a:s) \wedge e)$ est maximum parmi les éléments entiers congrus à a modulo R_S

Soit $a \in D'^*$ et $x\ R_S\ a$ avec $x \in D'$, alors $x_S = a_S \Longrightarrow x \in a_S \Longrightarrow$ $\exists\, s \in S \mid sx \leqslant a \Longrightarrow x \leqslant a:s \Longrightarrow x \wedge e = x \leqslant (a:s) \wedge e$. D'autre part $(a:s) R_S\ a$ (d'après P I.6) donc $(a:s) R_S\ x$ et comme $x \leqslant (a:s) \wedge e \leqslant a:s$ et que les classes modulo R_S sont convexes (d'après P I.10), $x\ R_S ((a:s) \wedge e) R_S\ a$.

Soit l'ensemble des éléments de la forme $(a:s) \wedge e$ avec $s \in S$, cet ensemble n'est pas vide, car il contient l'élément

$(a:e) \wedge e = a \wedge e = a$. Alors comme D' est noethérien, $\bigvee_{s \in S}((a:s) \wedge e)$ existe et est union finie d'éléments de cette forme.

Soit $((a:s) \wedge e) R_S\, a, ((a:s') \wedge e) R_S\, a$, $s, s' \in S \Rightarrow$ $((a:s) \wedge e) \vee ((a:s') \wedge e) R_S (a \vee ((a:s') \wedge e))$ car l'équivalence R_S est compatible avec l'union et $(a \vee ((a:s') \wedge e) R_S (a \vee a) = a$, donc $(((a:s) \wedge e) \vee ((a:s') \wedge e)) R_S\, a$. Donc toute union finie d'éléments de la forme $(a:s) \wedge e$, $s \in S$, est équivalente à a module R_S et en particulier $(\bigvee_{s \in S}((a:s) \wedge e)) R_S\, a$.

Finalement $\forall x \in D'$, $x\, R_S\, a$, $x \leqslant \bigvee_{s \in S}((a:s) \wedge e)$ et l'élément $\bigvee_{s \in S}((a:s) \wedge e)$ est maximum parmi les éléments entiers congrus à a modulo R_S avec $a \in D'$, $a \neq 0$ si D possède un zéro.

§ 7 - Eléments premiers et primaires dans D_S.

Proposition I.2 :

Soit p entier premier, alors $\bar{p}$ est premier dans D'_S

Soit $\bar{x} \leqslant \bar{e}, \bar{y} \leqslant \bar{e}, \bar{x}\,\bar{y} \leqslant \bar{p}$, alors $\bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy} \leqslant \bar{p} \Leftrightarrow (xy)_S \subseteq p_S$ (d'après P I.22) $\Rightarrow \exists\, s \in S \mid sxy \leqslant p$

$\bar{x} \leqslant \bar{e} \Rightarrow x_S \subseteq e_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'x \leqslant e$

$\bar{y} \leqslant \bar{e} \Rightarrow y_S \subseteq e_S \Rightarrow \exists\, s'' \in S \mid s''y \leqslant e$

Finalement $ss'x \leqslant e, s''y \leqslant e$, $ss'xs''y \leqslant p \Rightarrow ss'x \leqslant p$ ou $s''y \leqslant p$ car p est premier $\Rightarrow (ss'x)_S = x_S \subseteq p_S$ ou $(s''y)_S) = y_S \subseteq p_S$ (d'après P I.3) $\Leftrightarrow \bar{x} \leqslant \bar{p}$ ou $\bar{y} \leqslant \bar{p}$, donc $\bar{p}$ est premier dans D'_S

Proposition I.3 :

Soit q entier primaire, alors $\bar{q}$ est primaire dans D'_S

Soit $\bar{x} \leqslant \bar{e}$, $\bar{y} \leqslant \bar{e}$, $\bar{x}\,\bar{y} \leqslant q$, $\bar{x} \not\leqslant \bar{q}$, alors $\bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy} \leqslant \bar{q} \Leftrightarrow$ $(xy)_S = (x_S \cdot y_S)_S \subseteq q_S$ (d'après P I.11)

$\bar{x} \not\leqslant \bar{q} \Leftrightarrow x_S \not\subseteq q_S \Rightarrow \exists\, z \in x_S, z \notin q_S \Rightarrow \exists\, z \in x_S$, $\forall s \in S$ $sz \not\leqslant q$

$z \in x_S$, $y \in y_S$, $(x_S \cdot y_S)_S \subseteq q_S \Rightarrow \exists\, s' \in S \mid s'zy \leqslant q$

$\bar{y} \leqslant \bar{e} \Leftrightarrow y_S \subseteq e_S \Rightarrow \exists s_1 \in S \mid s_1 y \leqslant e$

$\bar{x} \leqslant \bar{e} \Leftrightarrow x_S \subseteq e_S \Rightarrow z \in x_S \subseteq e_S \Rightarrow \exists s_2 \in S \mid s_2 z \leqslant e$

Finalement $s's_2 z \leqslant s' \leqslant e$, $s_1 y \leqslant e$, $s's_2 z s_1 y \leqslant s_1 s_2 q \leqslant q$, $(\forall s \in S,\ sz \not\leqslant q \Rightarrow s's_2 z \not\leqslant q) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mid (s_1 y)^n \leqslant q$ car q est primaire $\Rightarrow [(s_1 y)^n]_S \subseteq q_S \Leftrightarrow \overline{(s_1 y)^n} = \overline{s_1 y}^n = \bar{y}^n \leqslant \bar{q}$ (d'après P I.3 et P I.12), donc $\bar{q}$ est primaire dans D'_S.

Dans la suite nous supposerons que le sous-demi-groupe D' des éléments entiers de D est noethérien.

Proposition I.4 :

> Soit $\bar{p}$ une classe première de D'_S, $\bar{p} \neq \bar{e}$, alors l'élément maximum parmi les éléments entiers de $\bar{p}$ est premier.

Soit $\bar{p}$ une classe première de D'_S, alors $\bar{p}$ contient un élément entier p maximum, car D' est noethérien (d'après P I.24) et $p \neq e$ car $\bar{p} \neq \bar{e}$. Soit $x \leqslant e$, $y \leqslant e$, $xy \leqslant p$, $y \not\leqslant p$, alors $\bar{x} \leqslant \bar{e}$, $\bar{y} \leqslant \bar{e}$, $\bar{x}\,\bar{y} \leqslant \bar{p}$. Supposons que $\bar{y} \leqslant \bar{p}$, alors $\bar{y} \vee \bar{p} = \overline{y \vee p} = \bar{p}$ et comme p est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{p}$, $y \vee p = p$, soit $y \leqslant p$, ce qui est exclus, donc $\bar{y} \not\leqslant \bar{p}$. Alors $\bar{x}\,\bar{y} \leqslant \bar{p}$, $\bar{y} \not\leqslant \bar{p} \Rightarrow \bar{x} \leqslant \bar{p}$ car $\bar{p}$ est premier $\Rightarrow \bar{x} \vee \bar{p} = \bar{p} \Rightarrow x \vee p = p$ car p est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{p}$, donc $x \leqslant p$ et p est premier dans D'.

Proposition I.5 :

> Soit $\bar{q}$ une classe primaire de D'_S, $\bar{q} \neq \bar{e}$, alors l'élément maximum parmi les éléments entiers de $\bar{q}$ est primaire.

Soit $\bar{q}$ une classe primaire de D'_S, alors $\bar{q}$ contient un élément entier q maximum, car D' est noethérien et $q \neq e$ car $\bar{q} \neq \bar{e}$. Soit $x \leqslant e$, $y \leqslant e$, $xy \leqslant q$, $y^n \not\leqslant q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $\bar{x} \leqslant \bar{e}$, $\bar{y} \leqslant \bar{e}$, $\bar{x}\,\bar{y} \leqslant \bar{q}$. Supposons que $\bar{y}^n \leqslant \bar{q}$, alors $\bar{y}^n \vee \bar{q} = \bar{q} \Rightarrow y^n \vee q = q$ car q est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{q}$, donc $y^n \leqslant q$, ce qui est exclus, et $\bar{y}^n \not\leqslant \bar{q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bar{x}\,\bar{y} \leqslant \bar{q}$, $\bar{y}^n \not\leqslant \bar{q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bar{x} \leqslant \bar{q}$ car $\bar{q}$ est primaire $\Rightarrow \bar{x} \vee \bar{q} = \bar{q} \Rightarrow x \vee q = q$ car q est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{q}$, donc $x \leqslant q$ et q est primaire.

§ 8 - Application aux idéaux fractionnaires.

Soit A un anneau commutatif à élément unité sans diviseurs de zéro et K le corps des fractions de A. Soit S un sous-demi-groupe de A ne contenant pas O et contenant 1, soit $\mathfrak{A}$ un idéal fractionnaire de A, on considère l'ensemble :

$$\mathfrak{A}_S = \{x/y \in K \; ; \; \exists\, s' \in S \mid s'x/y \in \mathfrak{A}\}$$

Alors la relation $\mathfrak{A}\, \mathfrak{R}_S\, \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_S = \mathfrak{B}_S$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des idéaux fractionnaires de l'anneau A.

Nous allons étudier le rapport entre cette relation d'équivalence $\mathfrak{R}_S$ dans le cas où S est le complémentaire d'un idéal entier premier de l'anneau A et la relation d'équivalence $R_{S'}$ précédente définie dans le demi-groupe des idéaux fractionnaires de l'anneau A.

Soit A un anneau commutatif à élément unité, $\mathfrak{P}$ un idéal entier premier de A, S la partie multiplicative A - $\mathfrak{P}$. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux idéaux fractionnaires de l'anneau A, la relation d'équivalence $\mathfrak{R}_S$ est définie par $\mathfrak{A}\, \mathfrak{R}_S\, \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_S = \mathfrak{B}_S$ avec

$\mathfrak{A}_S = \{x/y \in K \; ; \; \exists\, s' \in S \mid s'x/y \in \mathfrak{A}\}$ avec K corps des fractions de A.

Soit D l'ensemble des idéaux fractionnaires de l'anneau A, S' la partie multiplicative de D :

$$S' = \{\mathfrak{A} \in D ; \mathfrak{A} \subseteq A, \; \mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{P}\}$$

Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in D$, la relation d'équivalence $R_{S'}$, étudiée précédemment est définie par $\mathfrak{A}\, R_{S'}\, \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{S'} = \mathfrak{B}_{S'}$ avec

$\mathfrak{A}_{S'} = \{\mathfrak{Q} \in D \; ; \; \exists\, \mathfrak{Q}' \in S' \mid \mathfrak{Q}'\, \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{A}\}$ comme nous l'avons défini précédemment.

Soit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in D$ tels que $\mathfrak{A}\, R_{S'}\, \mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{A}_{S'} = \mathfrak{B}_{S'}$. Soit $x/y \in \mathfrak{A}_S$, alors $\exists\, s' \in S \mid s'x/y \in \mathfrak{A}$. Or $\mathfrak{A}_{S'} = \mathfrak{B}_{S'}$ par hypothèse et, comme $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}_{S'}$, il existe un idéal entier $\mathfrak{Q}$ de A, $\mathfrak{Q} \not\subseteq \mathfrak{P}$, tel que $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Soit $s'' \in \mathfrak{Q}$, $s'' \notin \mathfrak{P}$, alors $s''s'x/y \in \mathfrak{Q}\,\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ et $x/y \in \mathfrak{B}_S$, d'où $\mathfrak{A}_S \subseteq \mathfrak{B}_S$. De même

$\mathfrak{B}_S \subseteq \mathfrak{A}_S$ et $\mathfrak{A}_{S'} = \mathfrak{B}_{S'}$ entraîne $\mathfrak{A}_S = \mathfrak{B}_S$. Donc la relation d'équivalence $R_{S'}$ prolonge la relation d'équivalence $\mathfrak{R}_S$.

Soit de plus A noethérien et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in D$ tels que $\mathfrak{A} \mathfrak{R}_S \mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{A}_S = \mathfrak{B}_S$. Soit $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{A}_{S'}$, alors $\exists\, \mathfrak{Q}' \subseteq A$, $\mathfrak{Q}' \not\subseteq \mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q}'\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{Q}'\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_S = \mathfrak{B}_S$. Alors pour tout élément z d'un système de générateurs de $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}$, il existe un élément $s \notin \mathfrak{P}$ tel que $sz \in \mathfrak{B}$; soit s_1 le produit de ces éléments, en nombre fini, alors $s_1 \mathfrak{Q}'\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{B}$. De plus $s_1 \mathfrak{Q}' \not\subseteq \mathfrak{P}$ car $s_1 \notin \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}' \not\subseteq \mathfrak{P}$; alors $s_1 \mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{Q}' \subseteq A$, $s_1 \mathfrak{Q}' \not\subseteq \mathfrak{P}$, $s_1 \mathfrak{Q}'\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow$ $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{B}_{S'}$ et $\mathfrak{A}_{S'} \subseteq \mathfrak{B}_{S'}$. De même $\mathfrak{B}_{S'} \subseteq \mathfrak{A}_{S'}$ et $\mathfrak{A}_S = \mathfrak{B}_S$ entraîne $\mathfrak{A}_{S'} = \mathfrak{B}_{S'}$. Donc, lorsque A est noethérien, la relation d'équivalence $\mathfrak{R}_S$ coïncide avec la relation d'équivalence $R_{S'}$.

D'autre part soit A_S l'anneau des fractions de A relativement à la partie multiplicative $S = A - \mathfrak{P}$, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux fractionnaires de A_S et les classes d'idéaux fractionnaires de A modulo $\mathfrak{R}_S$. Ainsi, dans le cas où A est noethérien, si D est l'ensemble des idéaux fractionnaires de A, $D/R_{S'}$ sera l'ensemble des idéaux fractionnaires de A_S, S et S' étant les sous-demi-groupes de A et D définis précédemment.

- CARACTERISATION (B) -

§ 1 - Hypothèses de structure.

Dans ce chapitre, nous supposerons que :

1) D est un demi-groupe commutatif à élément unité réticulé (ayant éventuellement un zéro).

2) D' est un sous-treillis noethérien de D.

3) D^* est résidué (voir ch. I, § 1)

Nous avons alors la propriété :

P II.1 :

> D' et D'_S sont des demi-groupes noethériens demi-réticulés complets (ou gerbiers noethériens complets).

D' est un sous-demi-groupe et un sous-treillis de D. Comme D' est noethérien, D' est un demi-treillis complet, c'est-à-dire que tout sous-ensemble non vide de D' admet un plus petit majorant ([3] P 1 p. 33). De plus D' étant un demi-groupe réticulé et un demi-treillis noethérien complet, la multiplication est distributive sans restriction par rapport à l'union ([3] p. 131). Donc D' est un demi-groupe demi-réticulé complet ([3] p. 130).

Soit $\bar{x}_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant \ldots \leqslant \bar{x}_n \leqslant \ldots$ une chaîne croissante d'éléments de D'_S. Soient x'_i les éléments maximums des classes entières $\bar{x}_i$, alors nous avons $x'_1 \leqslant x'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_n \leqslant \ldots$ qui est une chaîne croissante d'éléments de D', donc cette chaîne est finie, car D' est noethérien. Alors $\exists\ k \in N^* \mid x'_k = x'_{k+1}$, d'où $\bar{x}_k = \bar{x}_{k+1}$ et la chaîne $\bar{x}_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant \ldots \leqslant \bar{x}_n \leqslant \cdot$ est finie, donc D'_S est noethérien.

De même D'_S étant un demi-groupe réticulé et un demi-treillis noethérien, D'_S est un demi-groupe demi-réticulé complet.

§ 2 - Elément principal de D.

Définition II.1 :

Un élément a de D est dit principal, s'il admet un inverse a^{-1} dans D.

Nous avons alors les propriétés :

P II.2 :

Si un élément de D est principal, alors c'est un résiduel de e et il est maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin.

Soit a un élément de D. Si D possède un zéro, 0 ne peut être principal, donc $a \in D^*$. Alors il existe un élément a^{-1} de D^* tel que $a\,a^{-1} = e$ et $a\,a^{-1} = e \Rightarrow a^{-1} \leqslant e{:}a \Rightarrow e = a\,a^{-1} \leqslant a(e{:}a) \leqslant e$, donc $a(e{:}a) = e$ et $a^{-1} = e{:}a$. De plus comme $a(e{:}a) = e$, $(e{:}a)$ est principal et nous aurons $(e{:}a)^{-1} = a = e{:}(e{:}a)$, donc a est un résiduel de e.

Enfin comme $e{:}(e{:}a)$ est maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin ([3] p. 242), a est maximum dans cette classe.

P II.3 :

Si a est principal dans D, alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a^n est principal.

Soit a principal, alors $a \in D^*$ et $a(e{:}a) = e \Rightarrow a^n(e{:}a)^n = e$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, donc a^n est principal et $(a^n)^{-1} = e{:}a^n = (e{:}a)^n$

P II.4 :

Si a est principal dans D, $\bar{a}$ est principal dans D_S.

Soit a principal dans D, alors $a \in D^*$ et $\bar{a} \in D_S^*$. De plus $a(e{:}a) = e \Rightarrow \bar{a}(\bar{e}{:}\bar{a}) = \bar{e}$ (d'après P I.23) et $\bar{a}$ est principal dans D_S avec $\bar{a}^{-1} = \bar{e}{:}\bar{a} = \overline{a^{-1}}$. De plus $a = e{:}(e{:}a) \Rightarrow \bar{a} = \bar{e}{:}(\bar{e}{:}\bar{a})$.

P II 5 :

Soit $\bar{a}$ une classe principale de $D_S^!$, $\bar{a} \neq \bar{e}$, alors l'élément maximum parmi les éléments entiers de $\bar{a}$ est un résiduel de e, maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin.

Soit $\bar{a}$ une classe entière de D_S, alors $\bar{a}$ contient un élément a, $a \neq e$, maximum parmi les éléments entiers de $\bar{a}$. De plus $\bar{a}$ étant principal dans D_S, $\bar{a} = \bar{e}:(\bar{e}:\bar{a})$, alors $e:(e:a) \in \bar{a}$ et, comme $a \leqslant e$, $e:(e:a) \leqslant e$. Donc $e:(e:a) \leqslant a$ car a est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{a}$. D'autre part $a \leqslant e:(e:a)$, soit finalement $a = e:(e:a)$ et a est maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin.

§ 3 - Décompositions primaires.

Proposition II.1 :

> Soit q entier, l'ensemble $\{x \in D' \; ; \; \exists \; n \in \mathbb{N}^*, \; x^n \leqslant q\}$ admet un élément maximum p. De plus si q est primaire, alors p est premier.

Soit q entier, considérons l'ensemble des éléments entiers r tels que $\exists \, n \in \mathbb{N}^* \mid r^n \leqslant q$, cet ensemble n'est pas vide, car $q \leqslant q$. Alors, comme D' est noethérien, il existe un élément maximal p, soit $\exists \, k \in \mathbb{N}^* \mid p^k \leqslant q$. Soit r un élément quelconque de l'ensemble, alors $(r \vee p)^{n+k} \leqslant q$, donc $r \vee p$ appartient à l'ensemble et $r \vee p = p$ car p est maximal, d'où $r \leqslant p$ et p est maximum parmi les éléments entiers r tels que $\exists \, n \in \mathbb{N}^* \mid r^n \leqslant q$. De plus q fait partie de l'ensemble considéré et $q \leqslant p$.

Soit q entier primaire, $x \leqslant e$, $y \leqslant e$, $xy \leqslant p$, $x \not\leqslant p \Rightarrow$ $\exists \, n \in \mathbb{N}^* \mid x^n y^n \leqslant q$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x^k \not\leqslant q \Rightarrow x^n y^n \leqslant q$, $x^n \not\leqslant q \Rightarrow$ $\exists \, n' \in \mathbb{N}^* \mid (y^n)^{n'} \leqslant q$ car q est primaire $\Rightarrow y^{nn'} \leqslant q \Rightarrow y \leqslant p$, donc p est premier.

Définition II.2 :

L'élément entier p ainsi défini est appelé radical de l'élément entier q. Si q est primaire, on dit que q est p-primaire.

Définition II.3 :

Si un élément entier a peut s'écrire $a = q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$ avec q_i p_i-primaire, $1 \leqslant i \leqslant n$, on dit que $q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ est une

<u>décomposition primaire</u> de a et $q_1,\ldots,q_n$ sont appelés les <u>composants</u> de la décomposition.

Une décomposition primaire $q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ est dite <u>réduite</u> si aucun des composants $q_1,\ldots,q_n$ n'est superflu et <u>normale</u> si de plus les radicaux $p_1,\ldots,p_n$ des composants sont tous distincts.

<u>Proposition II.2</u> :

> Soit q entier p-primaire non nul, alors pour tout entier a non nul tel que $q:a \leqslant e$, $q:a$ est primaire. De plus si $a \nleqslant q$, alors $q:a$ a pour radical p et si $a \nleqslant p$, alors $q:a = q$.

Soit $q,a \in D'^{*}$ tels que $q:a \leqslant e$. Soit $x \leqslant e$, $y \leqslant e$, $xy \leqslant q:a$ $x \nleqslant q:a \Rightarrow axy \leqslant q$, $ax \nleqslant q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mid y^n \leqslant q$ car q est primaire $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mid ay^n \leqslant y^n \leqslant q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mid y^n \leqslant q:a$ donc $q:a$ est primaire.

Soit $a \nleqslant q$ et p' le radical de $q:a$. p' est l'élément maximum tel que $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p'^n \leqslant q:a \Rightarrow ap'^n \leqslant q$ et comme $a \leqslant e$ et $a \nleqslant q$ par hypothèse, $\exists n' \in \mathbb{N}^* \mid (p'^n)^{n'} \leqslant q \Rightarrow p'^{nn'} \leqslant q$ donc $p' \leqslant p$, radical de q. D'autre part p étant le radical de q, $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid p^n \leqslant q \leqslant q:a \Rightarrow$ $p \leqslant p'$ radical de $q:a$. Finalement $p = p'$ et $q:a$ est p-primaire lorsque $a \nleqslant q$.

Soit $a \nleqslant p$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \nleqslant q$ et $a(q:a) \leqslant q$, $q:a \leqslant e$ $\Rightarrow q:a \leqslant q$ car q est primaire. Comme, d'autre part, $q \leqslant q:a$, car $a \leqslant e$, nous aurons finalement $q = q:a$ lorsque $a \nleqslant p$.

<u>Définition II.4</u> :

Soit q un élément p-primaire, on appelle <u>exposant</u> de q le plus petit entier n tel que $p^n \leqslant q$.

<u>Proposition II.3</u> :

> Soit q un élément non nul p-primaire d'exposant $n \geqslant 2$ tel que $q:p \leqslant e$, alors $q:p$ a un exposant égal à n-1.

Soit q p-primaire d'exposant $n \geqslant 2$ tel que $q:p \leqslant e$, alors $q:p$ est p-primaire (d'après P II.2). De plus $p^n \leqslant q$, $p^{n-1} \not\leqslant q$, donc $p^{n-1} \leqslant q:p$ et on ne peut avoir $p^{n-2} \leqslant q:p$, car alors $p^{n-1} \leqslant q$, ce qui est exclu. Donc $p^{n-1} \leqslant q:p$ et $p^{n-2} \not\leqslant q:p$, donc $q:p$ a pour exposant **n-1**.

Proposition II.4 :

> Soit q un élément p-primaire tel que $\forall s \in S,\ s \not\leqslant p$, alors $\bar{q}$ est $\bar{p}$-primaire dans D_S.

Soit q p-primaire, alors $\bar{q}$ est primaire dans D_S et $\bar{p}$ est premier dans D_S, avec $\bar{q} \leqslant \bar{p} \neq \bar{e}$, car $\forall s \in S,\ s \not\leqslant p$ (d'après P I.16). Soit $\bar{p}'$ le radical de $\bar{q}$, alors il existe un élément entier p' maximum parmi les éléments entiers de $\bar{p}'$ et cet élément p' est premier (d'après Prop. I.4). $\bar{p}'$ étant le radical de $\bar{q}$, $\exists\, n' \in \mathbb{N}^* \mid \bar{p}'^{n'} \leqslant \bar{q} \Rightarrow \bar{p}'^{n'} \vee \bar{q} = \bar{q} \Rightarrow p'^{n'} \vee q = q$ car q est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{q}$ (d'après P I.18) $\Rightarrow p'^{n'} \leqslant q \Rightarrow p' \leqslant p$ car p est le radical de $q \Rightarrow \bar{p}' \leqslant \bar{p}$. D'autre part p étant le radical de q, $\exists\, n \in \mathbb{N}^* \mid p^n \leqslant q \Rightarrow \bar{p}^n \leqslant \bar{q} \Rightarrow \bar{p} \leqslant \bar{p}'$ car $\bar{p}'$ est le radical de $\bar{q}$. Finalement $\bar{p}' = \bar{p}$ et $\bar{q}$ est $\bar{p}$-primaire.

Proposition II.5 :

> Soit $a = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ (1) une décomposition primaire de a avec q_i p_i-primaire, $1 \leqslant i \leqslant n$, telle que :
>
> a) $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant m < n,\ \forall s \in S,\ s \not\leqslant p_i$
>
> b) $\forall i,\ m+1 \leqslant i \leqslant n,\ \exists\, s_i \in S \mid s_i \leqslant p_i$
>
> alors $\bar{a} = \bar{q}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{q}_m$ (2) et ceci est une décomposition primaire de $\bar{a}$ dans D_S. De plus si la décomposition (1) est réduite (resp. normale), la décomposition (2) est réduite (resp. normale).

Soit $a = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ une décomposition primaire vérifiant les conditions de l'énoncé. $\forall i,\ m+1 \leqslant i \leqslant n,\ \exists\, s_i \in S \mid s_i \leqslant p_i \Rightarrow$ $\forall i,\ m+1 \leqslant i \leqslant n,\ \bar{p}_i = \bar{e}$ (d'après P I.16) et $\forall i,\ m+1 \leqslant i \leqslant n$, $s_i^k \leqslant p_i^k,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$; or q_i est p_i-primaire, donc il existe une puissance de p_i inférieure à q_i, d'où il existe une puissance de s_i, toujours contenue dans la partie multiplicative S, inférieure à q_i et $\overline{q}_i = \overline{e}$, $\forall i$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$.

D'autre part $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\forall s \in S$, $s \not\leqslant p_i \Rightarrow \forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\overline{p}_i \neq \overline{e}$ et $\overline{p}_i$ est premier. Supposons que $\exists s'_i \in S \mid s'_i \leqslant q_i$, $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, alors $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $s'_i \leqslant q_i \leqslant p_i$, ce qui est exclu. Donc $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\forall s \in S$, $s \not\leqslant q_i \Rightarrow \forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\overline{q}_i \neq \overline{e}$ et $\overline{q}_i$ est primaire. Enfin, comme $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $s \not\leqslant p_i$, $\overline{q}_i$ est $\overline{p}_i$-primaire (d'après Prop. II.4).

Alors $a = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ donne en passant au quotient dans D_S, $\overline{a} = \overline{q}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{q}_m \wedge \overline{q}_{m+1} \wedge \ldots \wedge \overline{q}_n = \overline{q}_1 \wedge \ldots \quad \overline{q}_m$, car $\overline{q}_i = \overline{e}$, $\forall i$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$ et $\overline{q}_i < \overline{e}$, $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. De plus $\overline{q}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{q}_m$ est une décomposition primaire de $\overline{a}$ dans D_S.

Soit $a = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ (1) une décomposition réduite de a. Nous avons $\overline{a} = \overline{q}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{q}_m$ (2) et supposons, par exemple, que $\overline{q}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{q}_m \leqslant \overline{q}_1$. Alors $(\overline{q}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{q}_m) \vee \overline{q}_1 = \overline{q}_1 \Rightarrow$ $(q_2 \wedge \ldots \wedge q_m) \vee q_1 = q_1$ car q_1 est maximum parmi les éléments entiers de $\overline{q}_1 \Rightarrow q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \leqslant q_1$, ce qui est impossible, car la décomposition (1) est réduite. Donc aucun des q_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, n'est superflu et la décomposition (2) est réduite.

Soit, de plus, la décomposition (1) normale et supposons que $\overline{p}_1 = \overline{p}_2$, alors $p_1 = p_2$ car p_1 et p_2 sont maximums parmi les éléments entiers de la même classe. Or ceci est impossible, car la décomposition (1) est normale, donc les radicaux $\overline{p}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, de la décomposition (2) sont distincts et la décomposition (2) est normale.

Proposition II.6 :

> Soit $a = q \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ une décomposition primaire normale de a, avec q_i p_i-primaire, $1 \leqslant i \leqslant n$, et q p-primaire tel que p soit un élément premier minimal dans D^*. Soit $S = \{x \leqslant e \;;\; x \not\leqslant p\}$, alors, dans D_S, $\overline{a} = \overline{q}$.

p étant un élément premier minimal dans D^*, alors $\forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i \not\leqslant p$, donc $\forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i \in S$ et, d'après la propriété précédente, $\bar{q}_i = \bar{e}$, $\forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ et finalement $\bar{a} = \bar{q}$.

§ 4 - Condition (B).

Proposition II.7 :

> Si D est intégralement clos, alors tout élément entier principal admet une décomposition primaire telle que les radicaux des composant s soient des éléments premiers minimaux dans D^*.

Soit a un élément entier principal, $\bar{D}$ l'ensemble quotient $D/\mathfrak{A}$ où $\mathfrak{A}$ est l'équivalence d'Artin et $\bar{a}$ la classe de a dans $\bar{D}$. Alors comme D est intégralement clos et D' noethérien, tout élément entier de $\bar{D}$ est représentable de façon unique en produit de puissances d'éléments premiers ou en intersection d'éléments primaires, soit $\bar{a} = \bar{q}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{q}_n$ ([3] Th. 15 p. 246 et Th. 16 p. 267). Comme l'élément maximum d'une classe primaire est primaire ([3] P. 6 p. 246), nous aurons $e:(e:a) = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$. De plus a étant principal, $a = e:(e:a)$ et a est maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin (d'après P II.2) Alors $a = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ est une décomposition primaire de a.

Supposons que, par exemple, le radical p_1 de q_1 ne soit pas minimal dans D^*, alors il existe un élément premier p' non nul tel que $p' < p_1 \leqslant e$. D étant intégralement clos, $D'/\mathfrak{A}$ est un gerbier de Dedekind ([2] p. 24) et il y a identité entre éléments premiers non nuls et éléments maximaux, donc $p_1 \equiv e$ modulo $\mathfrak{A}$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $p_1^k \equiv e$ modulo $\mathfrak{A}$. De plus p_1 étant le radical de q_1, $\exists\, n \in \mathbb{N} \mid p_1^n \leqslant q_1 \leqslant p_1$ et, comme les classes modulo $\mathfrak{A}$ sont convexes, $q_1 \equiv e$ modulo $\mathfrak{A}$. Alors $\bar{a} = \bar{q}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{q}_n$ dans $D/\mathfrak{A}$, ce qui est exclus car la décomposition est unique, donc les radicaux des composants sont tous minimaux.

Soit p un élément premier minimal dans D^* et $S = \{s \leqslant e\ ;\ x \not\leqslant p\}$, alors on peut considérer l'ensemble D_S que nous noterons alors D_p.

Nous avons vu précédemment que si D est intégralement clos, alors D_p est intégralement clos (Prop. I.1).

Définition II.5 :

Nous appellerons <u>condition (B)</u> l'ensemble des conditions :

a) pour tout élément premier p minimal dans D^*, D_p est intégralement clos.

b) tout élément entier principal admet une décomposition primaire telle que les radicaux des composants soient des éléments premiers minimaux dans D^*.

Nous avons alors le résultat suivant :

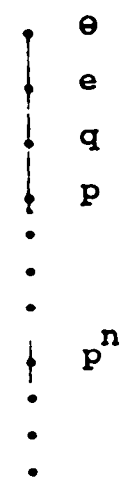
Théorème II.1 :

Si D est intégralement clos, alors D vérifie la condition (B).

§ 5 - Contre-exemple.

Toutefois la condition (B) n'est pas une condition suffisante pour que D soit intégralement clos. Soit en effet le demi-groupe D donné par sa table de multiplication et son diagramme de Hasse :

x	θ	e	q	p	...	p^n	...
θ	θ	θ	q	p	...	p^n	...
e	θ	e	q	p	...	p^n	...
q	q	q	q	p	...	p^n	...
p	p	p	p	p^2	...	p^{n+1}	...
.	.	.	.	.		.	
.	.	.	.	.		.	
.	.	.	.	.		.	
p^n	p^n	p^n	p^n	p^{n+1}		p^{2n}	...
.	.	.	.	.		.	
.	.	.	.	.		.	
.	.	.	.	.		.	



D est évidemment un demi-groupe commutatif à élément unité. De plus D est réticulé, car D est ordonné en chaîne. Enfin $D = D^*$ est résidué et nous avons le tableau de résiduation :

:	θ	e	q	p	…	p^n	…
θ	θ	θ	θ	θ	…	θ	…
e	q	e	θ	θ	…	θ	…
q	q	q	θ	θ	…	θ	…
p	p	p	p	θ	…	θ	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
p^n	p^n	p^n	p^n	p^{n-1}	…	θ	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	

Nous voyons alors que D n'est pas intégralement clos, en effet $p^k : p^k = \theta$, $\forall\, k \in N^*$.

D'autre part p et q sont premiers et p est premier minimal. Soit le sous-demi-groupe $S = \{x \leqslant e \ ; \ x \nleqslant p\} = \{e, q\}$, alors θ, e et q sont congrus modulo R_S, car $e, q \in S$ et $q\,\theta = \theta \Rightarrow (q\,\theta)_S = q_S = \theta_S$ et $p, p^2, \ldots, p^n, \ldots$ sont distincts modulo R_S, car $\forall\, k \in N^*$, $p^k \in (p^k)_S$, $p^k \notin (p^{k+1})_S \Rightarrow \bar{p}^k \neq \bar{p}^{k+1}$, $\forall k \in N^*$.

Alors $D_p = \{\bar{e}, \bar{p}, \bar{p}^2, \ldots, \bar{p}^n, \ldots\}$ et D_p est intégralement clos, car $\bar{p}^k : \bar{p}^k = \bar{\theta} = \bar{e}$ $\forall k \in N^*$ et $\bar{\theta} : \bar{\theta} = \bar{\theta} = \bar{e}$. D'autre part il n'existe pas d'éléments principaux dans D, donc D vérifie la condition (B).

Ainsi D vérifie la condition (B) et D n'est pas intégralement clos.

§ 6 - Condition suffisante.

Proposition II.8 :

Il y a équivalence entre les conditions ([2] p. 27) :

a) $x : x = e$, $\forall x \in D^*$

b) $x \in D^*$, $\exists\, m \in D'^* \mid m x^n \leqslant e$, $\forall n \in N^* \Rightarrow x \leqslant e$

Soit D vérifiant la condition a). Soit $x \in D$, tel que $\exists\, m \in D'^* \mid$

$mx^n \leqslant e$, $\forall\, n \in N^*$; considérons l'ensemble des éléments mx^n, $n \in N^*$, alors, comme D' est noethérien, l'union de ces éléments existe, soit $u = \bigvee_{n \in N^*} mx^n$. De même $\bigvee_{n \in N^*} m^2x^n$ et $\bigvee_{n \in N^*} m^2x^{n+1}$ existent et, comme D' est un gerbier complet (d'après P II.1), $mu = \bigvee_{n \in N^*} m^2x^n$ et $mxu = \bigvee_{n \in N^*} m^2x^{n+1}$. D'autre part $mxu \leqslant mu$ avec $mu \in D^*$, donc $x \leqslant mu:mu = e$, car D vérifie la condition a). Ainsi $x \leqslant e$ et D vérifie la condition b).

Soit D vérifiant b). Soit $a \in D^*$, alors $a(a:a) \leqslant a$; posons $a:a = x$, nous aurons la chaîne : $a \geqslant ax \geqslant ax^2 \geqslant \ldots \geqslant ax^n \geqslant \ldots$. Alors $\forall\, n \in N^*$ $ax^n \leqslant a \Rightarrow \forall n \in N^*$, $a(e:a)x^n \leqslant a(e:a) \leqslant e$, donc $x = a:a \leqslant e$, car D vérifie la condition b). D'autre part $e \leqslant a:a$ et finalement $a:a = e$ $\forall\, a \in D^*$, donc D vérifie la condition a).

Théorème II.2 :

> Soit D tel que tout élément non nul de D' soit supérieur ou égal à un élément principal. Alors si D vérifie la condition (B), D est intégralement clos.

Soit $x \in D^*$ tel que $\exists\, m' \in D'^* \mid m'x^n \leqslant e$, $\forall\, n \in N^*$, alors comme tout élément non nul de D' est supérieur ou égal à un élément principal, il existe un élément principal m tel que, $m \leqslant m'$, $m \in D'^*$; nous aurons donc $mx^n \leqslant e$, $\forall\, n \in N^*$avec m entier principal.

Comme D vérifie la condition (B), m admet une décomposition primaire telle que les radicaux des composants soient des éléments premiers minimaux dans D^*, soit $m = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ avec q_i p_i-primaire, $1 \leqslant i \leqslant n$. Considérons alors les ensembles D_{p_i}, ils sont intégralement clos, car D vérifie la condition (B) et les radicaux p_i sont des éléments premiers minimaux dans D^*. Alors $mx^n \leqslant e$, $\forall\, n \in N^* \Longrightarrow$ $\bar{m}\,\bar{x}^n \leqslant \bar{e}$, $\forall n \in N^*$ dans chaque D_{p_i}, donc $\bar{x} \leqslant \bar{e}$ dans chaque D_{p_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$, car les D_{p_i} sont intégralement clos.

D'autre part nous avons, en particulier, $mx \leq e$; posons $mx = a$, alors $x = a(e:m)$ car m est principal, d'où $\bar{x} = \bar{a}(\bar{e}:\bar{m})$ dans chaque D_{p_i}. Comme $\bar{x}$ est entier dans chaque D_{p_i}, nous aurons $\bar{a}(\bar{e}:\bar{m}) \leq \bar{e} \Rightarrow \bar{a} \leq \bar{e}:(\bar{e}:\bar{m})$. De plus m étant principal, $m = e:(e:m) \Rightarrow \bar{m} = \bar{e}:(\bar{e}:\bar{m})$ dans chaque D_{p_i}, d'où $\bar{a} \leq \bar{m}$ dans chaque D_{p_i}, $1 \leq i \leq n$.

Par ailleurs les radicaux p_i étant des éléments premiers minimaux dans D^*, les sous-demi-groupes $S_i = \{x \leq e ; x \nleq p_i\}$, $1 \leq i \leq n$, contiennent les éléments p_j, $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$; alors dans chaque D_{p_i}, $1 \leq i \leq n$, $\bar{m} = \bar{q}_i$ (d'après Prop. II.5). Ainsi $\bar{a} \leq \bar{q}_i = \bar{m}$ dans chaque D_{p_i}, $1 \leq i \leq n$, d'où $\bar{a} \vee \bar{q}_i = \bar{q}_i$ et, comme q_i est maximum parmi les éléments entiers de $\bar{q}_i$, nous aurons $a \vee q_i = q_i$, soit $a \leq q_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$. D'où $a \leq q_1 \wedge \dots \wedge q_n = m$ et $x = a(e:m) \leq m(e:m) = e$ car m est principal.

Finalement $x \in D^*$, $\exists\, m' \in D'^* \mid m'x^n \leq e$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \leq e$, donc $\forall a \in D^*$, $a:a = e$ (d'après Prop. II.8) et D est intégralement clos.

On peut remarquer que la condition : "tout élément non nul de D' est supérieur ou égal à un élément principal" est une forme affaiblie de la condition "tout élément entier non nul est union d'éléments principaux". Cette dernière condition est réalisée lorsque D est le treillis des idéaux fractionnaires d'un anneau commutatif à élément unité noethérien. Alors tout idéal entier de A admet une base finie, donc est union finie d'idéaux principaux.

§ 7 - Caractérisation (B).

En utilisant les propriétés précédemment démontrées, nous pouvons énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que D soit intégralement clos :

Théorème II.3 :

Soit D un demi-groupe commutatif à élément unité réticulé réticulé (ayant éventuellement un zéro) tel que :

a) le sous-demi-groupe D' des éléments entiers soit noethérien

b) D (ou $D^* = D - \{0\}$ si D possède un zéro) soit résidué

c) tout élément non nul de D' soit supérieur ou égal à un élément principal

alors pour que D soit intégralement clos, il faut et il suffit que :

α) pour tout élément premier p minimal dans D^*, D_p soit intégralement clos

β) tout élément principal admette une décomposition primaire telle que les radicaux des composants soient des éléments premiers minimaux dans D^*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ASANO : Arithmétical ideal theory in semi-groups (Journal Inst. Polytechnic. Osaka-City Univ. Série A, t.4, 1953, p 9-23).

[2] P. DUBREIL : Initiation à la théorie des demi-grpupes ordonnés (Dal convegno Italo-Francese di Algebra Astratta, Padova, 1956)

[3] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR & R. CROISOT : Théorie des treillis et des structures algébriques ordonnées (Gauthier-Vilars, Paris, 1953).

[4] L. FUCHS : Partially ordered algebraïc systems (Pergamon Press, New-York, 1963).

[5] L. LESIEUR & R. CROISOT : Algébre noethérienne non commutative (Gauthier-Vilars, Paris 1963).

[6] G. MAURY : La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques (Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 3ème série, t. 78, 1961, p. 31-100).

[7] M. NAGATA : Basic theorems on general commutative rings (Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, série A, t. 29, 1955, p. 59-77).

[8] D.G. NORTHCOTT : Ideal theory (University Press, Cambridge, 1963)

[9] B.L. VAN DER WAERDEN : Modern Algebra t. II (Springer Verlag, Berlin, 1931).

[10] M. YOSHIDA & M. SAKUMA : On integrally closed Noethrian rings (Journal of Sc. of Hiroshima Univ., série A, Vol 17, n° 3, p. 311-315).

[11] G. MAURY & E. OUDIN : Gerbier résidué intégralement clos (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, p. 170).

[12] E. OUDIN : Demi-groupes commutatifs réticulés résidués intégralement clos (Thèse 3ème cycle, Fac. Sc. Lyon 1967).