DORIN POPESCU

Quelques applications de la décomposition triangulaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 63-68
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_63_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-3

QUELQUES APPLICATIONS DE LA DECOMPOSITION TRIANGULAIRE

DORIN POPESCU

On donne des applications de la décomposition triangulaire de [2] ; par exemple : on donne des conditions dans lesquelles une catégorie avec limites inductives a des limites projectives et des conditions suffisantes dans lesquelles un foncteur a un adjoint.

1. Limites inductives et projectives dans catégories.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ; si $X,Y \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ nous notons $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur covariant, et $X' \in \mathrm{ob}\mathcal{C}'$, nous notons $(F,\mathcal{C})/X'$ (resp. $(X'/(F,\mathcal{C}))$ la catégorie dont les objets sont les paires (X,f) (resp. (f,X)) où $X \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}(FX,X')$ (resp $(f \in \mathcal{C}'(X',FX))$; $\alpha : (X,f) \to (Y,g)$ (resp. $\alpha: (f,X) \to (g,J)$) est un morphisme $\alpha \in \mathcal{C}(X,Y)$, tel que $g.F(\alpha) = f$ (resp. $(F\alpha)_\circ f=g$)si $\mathcal{C}\equiv\mathcal{C}'$et F est le foncteur identique I, alors $(I,\mathcal{C})/X$ (resp $(X/(I,\mathcal{C}))$ se note $\mathcal{C}/X$ (resp. $X/\mathcal{C}$).

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et J une petite catégorie ; on note par $\langle J,\mathcal{C}\rangle$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs covariants de J dans $\mathcal{C}$ et les morphismes, les morphismes fonctoriels ; il y a un foncteur canonique $k_J : \mathcal{C} \to \langle J,\mathcal{C}\rangle$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $k_J(X)$ est le foncteur "constant" de J dans $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ a des$J$-limites projectives (inductives) si k_J a un adjoint à droite (à gauche) noté $\varprojlim(\varinjlim)$. $\mathcal{C}$ a des J-limites projectives (inductives) si et seulement si pour tout objet H de $\langle J,\mathcal{C}\rangle$ la catégorie $(k_J,\mathcal{C})/H$ (des cônes projectifs de base H) (resp. $H/(k_J,\mathcal{C})$ (des cônes inductifs de base H)) a un un objet final (resp. initial).

On dit que C a des limites projectives (inductives) si C a des J-limites projectives (inductives) pour toute petite catégorie J. On sait que la catégorie C a des limites projectives (inductives) si C a des produits directs et des noyaux de paires (condition duale pour les limites inductives).

Notre but est de montrer que dans certaines conditions une catégorie a des limites inductives (projectives).

Soit C une catégorie quelconque ; nous considérons les conditions suivantes :

(*) Pour tout $X \in$ ob C , les sous-objets de X forment un ensemble ;

(**) La duale C^{o} de C satisfait la condition (*).

Lemme 1 : Soit C une catégorie avec des J-limites projectives et un objet final E. Alors pour tout petit foncteur $F: A \to C$ la catégorie $F(k_A, C)$ des cônes inductifs de base F possède des J-limites projectives.

La démonstration est calculatoire.

Soit C une catégorie et M un ensemble ; on dit que C a des M-noyaux (resp. M-conoyaux) si C a des J_M-limites projectives (resp. inductives) où J_M est la catégorie avec deux objets i,j tels que $J_M(i,i) = \{1_i\}, J_M(j,j) = \{1_j\}$ (les morphismes identiques) et $J_M(i,j)$ est un ensemble de morphismes équipotent à M ; enfin $J_M(j,i) = \emptyset$. Si M a deux éléments on dit que C a des noyaux de paires.

Lemme 2. Soit C une catégorie avec M-produits fibrés ([2] , chap.1) et vérifiant la condition (*). Alors pour tout ensemble M et tout objet $F : J_M \to C$ si $(f,X) \in$ ob $F/(k_{J_M}, C)$ il y a une décomposition $f = i.p$, où $i : X' \rightarrowtail X$ est un monomorphisme, p un épimorphisme et $(p,X') \in$ ob$F/(k_{J_M}, C)$.

Preuve. Se donner $F : J_M \longrightarrow \mathcal{C}$ équivaut à se donner deux objets A et B de $\mathcal{C}$, et un ensemble $\{f_i\}_{i \in M}$ de morphismes de A dans B ; alors pour $(f,X) \in \text{ob } F/(k_{J_M}, \mathcal{C})$, $f : B \rightarrow X$ et $f \circ f_i = f \circ f_j$ pour touts $i,j \in M$. D'après [2] (proposition (1,5,1) et (1,5,2)), dans les conditions ci-dessus, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\ & X' \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où $p = \overline{\text{Coim}}\, f$ et $i = \text{Im} f$, etc...

Proposition 1 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec limites projectives et vérifiant les conditions (*) et (**) ; alors $\mathcal{C}$ a des M-conoyaux pour tout ensemble M.

Preuve. Soit $F : J_M \longrightarrow \mathcal{C}$ un objet de $\langle J_M, \mathcal{C} \rangle$, c'est-à-dire deux objets A,B de $\mathcal{C}$ et une famille $\{f_i\}_{i \in M}$ de morphismes de A dans B, alors tout objet de $\mathcal{D} = F/(k_{J_M}, \mathcal{C})$ est un couple (f,X) tel que $f \in \mathcal{C}(B,X)$ et $f \circ f_i = f \circ f_j$ pour tout $i,j \in M$ (la catégorie n'est pas vide, $\mathcal{C}$ ayant un objet final). D'après le lemme 2 et la condition (**) il y a une sous-catégorie petite $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ tel que pour tout $(f,X) \in \text{ob } \mathcal{D}$, il y a un objet $(f',X') \in \text{ob } \mathcal{D}'$ et un morphisme unique $\alpha : (f',X') \longrightarrow (f,X)$ de $\mathcal{D}$. Si (g,Y) est la limite projective du foncteur inclusion $i : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ c'est un objet initial de $\mathcal{D}$ (la limite projective existe conformément au lemme 1).

Corollaire 1 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec limites projectives, vérifiant les conditions (*) et (**). Si $\mathcal{C}$ a des sommes directes quelconques, alors elle a des limites inductives.

Corollaire 2. Toute petite catégorie avec limites projectives a des limites inductives (et inversement).

<u>Preuve.</u> Toute petite catégorie vérifie les conditions (*) et (**) de façon évidente. D'après le lemme 1, elle possède des sommes directes, tout résulte alors du corollaire 1.

2. <u>Foncteurs adjoints.</u>

<u>Définition</u> : Soient $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur covariant, $X' \in \operatorname{ob}\mathcal{C}'$, $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$. On dit que le morphisme $f \in \mathcal{C}(X, FX')$ est un épimorphisme relatif à $\mathcal{C}'$ et F (ou simplement "relatif") si pour tout $Y' \in \operatorname{ob}\mathcal{C}'$ et toute paire $\{u,v\}$ de morphismes de X' dans Y' , telle que $F(u)_\circ f = F(v)_\circ f$ on a $u = v$.

De façon évidente on obtient les notions de monomorphisme, d'objet quotient et de sous-objet relatifs.

Nous introduisons les conditions :

(*)' les sous-objets relatifs de tout objet de $\mathcal{C}$ forment un ensemble ;

(**)' La duale de (*)'.

Evidemment il s'agit des sous-objets relatifs à F et $\mathcal{C}'$. Dans ce qui suit nous admettons que $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ sont des catégories avec des limites projectives et $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur covariant qui commute avec les limites projectives ; de même on suppose que $\mathcal{C}'$ satisfait à la condition (*).

Soit $f : X \longrightarrow FX'$ un morphisme de $\mathcal{C}$; notons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-objets (Y', i) de X' qui vérifient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & F(X') \\ & FY' \arrow[ur, "F(i)"'] & \end{tikzcd}$$

Soit (P', j) l'intersection des sous-objets appartenant à $\mathcal{F}$; il est clair que $(P', j) \in \mathcal{F}$ et pour tout $(Y', i) \in \mathcal{F}$ il y a un morphisme unique $t : P' \longrightarrow Y'$ tel que $j = i_\circ t$. Soit $p : X \longrightarrow P'$ un morphisme tel que $F(j)_\circ p = f$.

<u>Lemme 3</u> : Avec les notations ci-dessus, f est un épimorphisme relatif si et seulement si j est un bimorphisme.

<u>Preuve.</u> Soit f un épimorphisme relatif et $u, v \in C(X', Z')$ tels que $u_\circ j = v_\circ j$ alors $F(u)_\circ F(j)_\circ p = F(v)_\circ F(j)_\circ p$, donc $u = v$.

D'autre part, soient j un bimorphisme, u et v des morphismes de X' dans Z' tels que $F(u)_\circ f = F(v)_\circ f$; dans C' on a le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "t"'] & X' \arrow[d, "{[u,v]}"] \\
Z' \arrow[r, "\Delta_{Z'}"] & Z' \times Z'
\end{tikzcd}$$

ℓ étant un monomorphisme et $\Delta_{Z'}$ le morphisme diagonal. Pour montrer que $u = v$ il suffit de montrer que ℓ est un bimorphisme ([2], prop. 1.1.4). En appliquant le foncteur au diagramme ci-dessus, on obtient dans C un carré cartésien.

$$\begin{tikzcd}
F(Q) \arrow[rr, "F(\ell)"] \arrow[dd, "F(t)"'] & & F(X') \arrow[dd, "{F(u),F(v)}"] \\
& X \arrow[ul, "r"'] \arrow[ur, "f"] \arrow[dl, dashed, "F(u)_\circ f"] & \\
F(Z') \arrow[rr] & & F(Z') \times F(Z')
\end{tikzcd}$$

où r est construit de façon canonique : $f = F(\ell)_\circ r$. C'est-à-dire $(Q, \ell) \in F$; il y a alors un monomorphisme $s : P' \longrightarrow Q$ tel que $j = \ell_\circ s$; j étant un bimorphisme, il en résulte que ℓ est un bimorphisme ; ceci achève la démonstration.

Notons $j = \mathrm{Im}_{C'} f$.

Proposition 2 : Soient $\mathcal{C}'$,$\mathcal{C}$ deux catégories avec limites projectives : $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un foncteur qui commute avec les limites projectives et $\mathcal{C}'$ vérifie la condition (*). Alors tout morphisme $f : X \to FX'$ de $\mathcal{C}$ a une décomposition triangulaire relative : $f : F(j) \circ p$ où j est un monomorphisme de $\mathcal{C}'$ et p un épimorphisme relatif de $\mathcal{C}$.

Preuve. Avec les notations ci-dessus on voit que $\mathrm{Im}_{\mathcal{C}} p = 1_{p'}$, c'est-à-dire p est un épimorphisme relatif.

Proposition 3. Conservons les hypothèses de la proposition précédente ; en plus nous admettons que $\mathcal{C}$ vérifie la condition (**)'. Alors le foncteur F a un adjoint à gauche.

Preuve. En utilisant la proposition 2 et l'hypothèse (**)' on déduit que pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F?)$ est borné ; évidemment il commute aved les limites projectives, et utilisant le théorème de Benabou [3] , on obtient le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. N. POPESCU : Elemente de teoria fascicolelor, Studii si cercetari Mat. Tom. 18, nr. 2, 1966.

[2]. René PUPIER : Sur les catégories complètes, Publ. du Départ. math. Lyon 1965.

[3]. J. BENABOU : Critères de représentabilité des foncteurs, Compte-Rendus, 1965, n° 3.

Manuscrit remis le 15 décembre 1967.

D.. POPESCU
Faculté de Mathématique
BUCAREST