Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 92-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__92_0>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.92. — *Un système matériel composé de deux barres* AB, AC *articulées en* A. *de même longueur* $2l$, *homogènes et de même masse, se meut sans frottement dans un plan fixe, sans aucune force donnée.*

1° *Former les intégrales premières du mouvement.*

2° *On supposera, qu'au début, les deux barres sont dans le prolongement l'une de l'autre, que la vitesse de rotation de la barre* AB *est* ω_1 *et celle de* AC, ω_2. *Discuter suivant la valeur du rapport* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *comment varie l'angle des deux barres.*

3° *On supposera* $\omega_1 = +5\omega$, $\omega_2 = -3\omega$, ω *rotation positive donnée. On suppose en outre qu'au début du mouvement la vitesse de* A *est nulle. Au moment où l'angle* $\widehat{BAC}$ *prend la valeur zero, on introduit la liaison persistante* $\widehat{BAC} = 0$. *Calculer quelles sont, après le choc. la vitesse de rotation du système, la trajectoire et la vitesse du milieu des barres. On prendra la direction de* AB *au début du mouvement pour axe des* x *positifs, la position initiale de* A *pour origine.*

II. C.93. — *Soient* S *un solide,* G *son centre de gravité. L'ellipsoïde d'inertie de* S, *en* G, *est de révolution autour de* Gz *et a pour équation par rapport à trois axes rectangulaires* Gxyz

$$A(X^2+Y^2)+CZ^2=1.$$

Ce solide présente une arête vive qui a pour équations. par rapport aux axes Gxyz,

$$x^2+y^2=a^2, \qquad z=-b,$$

a *et* b *positifs. Cette arête est assujettie à rester en contact sans frottement avec un plan horizontal fixe. Le solide est pesant, de masse* M.

1° *Écrire les intégrales premières du mouvement du solide, sans les discuter. On prendra pour axe fixe* Oz_1 *la verticale dirigée vers le haut.*

2° θ, φ, ψ *étant les angles d'Euler, il existe une infinité de mouvements où* θ, φ', ψ' *sont constants. Quelle relation y a-t-il alors entre* θ, φ', ψ' ?

Étant données les conditions initiales $\theta=\theta_0$; $\theta'_0=0$; $\varphi'=\varphi'_0$; $\psi'=\psi'_0$, *dans quel sens* θ *variera-t-il au début du mouvement ?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.94. — 1° *Une circonférence homogène, de centre* C, *de rayon* a, *de masse* $m\lambda$, *est mobile autour d'un de ses* *points* O *qui est fixe. Sur cette circonférence se meut librement et sans frottement une masse ponctuelle m.*

Étudier les petits mouvements dans un plan vertical : décomposer le mouvement en deux mouvements pendulaires. Interprétation géométrique. Pour quelle valeur de λ *les petits mouvements sont-ils périodiques ?*

Écrire, en supposant $\lambda = 1$, *la solution particulière pour laquelle la position de départ est la position d'équilibre, le cercle étant immobile.*

2° *On ajoute une surcharge fixe* $m(1+\lambda)$ *en un point* A *de la circonférence et tel que* OA $= a$. *Etudier les petits mouvements.*

On posera $\frac{g}{a} = k^2$.

(Bordeaux, juin 1926.)

Épreuve écrite. — *Une toupie est constituée par un cône homogène circulaire droit de rayon* R *et de hauteur* 4R. *On imprime à cette toupie une vitesse angulaire initiale* r_0 *autour de son axe, puis on l'abandonne à elle-même en la posant par sa pointe sur un plan horizontal parfaitement poli, de sorte que son axe fasse avec la verticale ascendante un angle* θ_0.

1. m *désignant la masse de la toupie, calculer ses moments d'inertie relatifs aux axes centraux d'inertie ;*

2. *Former les équations différentielles du mouvement de la toupie et montrer qu'elles s'intègrent par quadratures ;*

3. *Déterminer les limites entre lesquelles varie l'angle de nutation* θ, *sachant que*

$$\theta_0 = 30^\circ, \qquad R = 5^{\text{cm}}, \qquad r_0 = 300 \text{ rad./sec}, \qquad g = 981 \text{ cm/sec}^2 ;$$

4. *Déterminer la loi approchée de variation de* θ *en fonction du temps avec les données précédentes ; en déduire la période* T *des oscillations.*

Indications sur la solution. — Cas particulier d'un problème classique :

1. $$A = B = \frac{3}{4} m R^2, \qquad C = \frac{3}{10} m R^2.$$

2. N étant la réaction du plan, les équations du mouvement sont, avec des notations évidentes :

$$m\xi'' = 0, \qquad m\eta'' = 0, \qquad m(3R\cos\theta)'' = N - mg,$$
$$A \sin^2\theta\psi' = C r_0(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$
$$A(\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2) + 9mR^2 \sin\theta\,\theta'^2 = 6mgR(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$
$$\varphi' + \psi'\cos\theta = r_0.$$

Elles s'intègrent manifestement par quadratures, θ étant d'abord déterminé par

(1) $\sin^2\theta(1+12\sin^2\theta)\theta'^2$

$$= 8\frac{g}{R}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[\sin^2\theta - \frac{1}{50}\frac{R}{g}r_0^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right].$$

3. On a

$$\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_1$$

avec

$$\sin^2\theta_1 - \frac{1}{50}\frac{R}{g}r_0^2(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) = 0;$$

d'où

$$\theta_1 = 34^\circ.$$

4. En posant $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, (1) devient

$$(1 + 12\sin^2\theta_0)\varepsilon'^2 = 8\frac{g}{R}\varepsilon\left[\sin\theta_0 - \left(\frac{Rr_0^2}{50g} - 2\cos\theta_0\right)\varepsilon\right],$$

soit avec les données numériques

$$4\varepsilon'^2 = 787\varepsilon - 12680\varepsilon^2;$$

d'où

$$\varepsilon = 0{,}031(1 - \cos 56{,}4t), \qquad T = \frac{2\pi}{56{,}4} = 0{,}112 \text{ sec.}$$

(Toulouse, juin 1926.)