Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 62-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__62_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Première question.* — C.86. — *Une surface réglée* (S), *non développable, est engendrée par la droite* (D) *donnée par les équations suivantes en coordonnées rectangulaires :*

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} x = az + \lambda, \\ y = bz + \mu, \end{cases}$$

où a, b, λ, μ sont des fonctions données d'un paramètre variable. Soit (L) *la ligne de striction de* (S). *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que* (L) *soit la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à* (S) *parallèle à* Oz, *est que* (D) *fasse un angle constant avec* Oz. *Montrer que l'on pouvait prévoir géométriquement ce résultat.*

La condition précédente étant supposée remplie, les équations de (S) *peuvent être écrites sous la forme*

$$x = cz\cos\theta + \lambda(\theta),$$
$$y = cz\sin\theta + \mu(\theta),$$

c étant une constante, $\lambda(\theta)$ *et* $\mu(\theta)$ *des fonctions du paramètre* θ *convenablement choisi. A quelle condition doivent satisfaire* $\lambda(\theta)$ *et* $\mu(\theta)$ *pour que* (L) *soit une ligne de courbure de* (S). *La ligne* (L) *peut-elle être dans ce cas une ligne quelconque en choisissant convenablement* $\lambda(\theta)$ *et* $\mu(\theta)$?

Deuxième question. — C.87. — *Étant donnés trois axes de coordon-*

nées rectangulaires, déterminer les surfaces qui ont la propriété suivante : la normale en un point M *de la surface rencontre en* N *le plan des xy de telle sorte que la distance de* N *à l'origine des coordonnées est une fonction donnée de la distance de* M *à l'axe* Oz. *On développera les calculs dans le cas où la relation entre ces deux distances est la constance de leur produit; on déterminera la surface particulière répondant à la question et contenant le cercle donné :*

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 = R^2.$$

Nota. — *On pourra prendre pour fonction inconnue*

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Epreuve pratique. — *Calculer, en utilisant la théorie des intégrales de variable complexe, l'intégrale réelle*

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sqrt{3}}}{(1+x)(1+x^2)}\,dx.$$

(Bordeaux, juin 1926.)

Epreuve théorique. — *Première question.* — C.88. — *On donne une courbe gauche* (C). *En un point* M, *variable sur cette courbe, on mène la tangente* MT *et la normale principale* MN *à la courbe. On prend sur* MN *un point* P *tel que* MP $= l$ *(l longueur constante donnée). Par le point* P *on mène la parallèle* (D) *à* MT. *Déterminer la ligne de striction de la surface réglée engendrée par* (D). *On pourra expliquer géométriquement le résultat obtenu.*

Deuxième question. — C.87. — *Trouver l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles*

$$px + qy = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z}.$$

Montrer que les courbes caractéristiques de cette équation sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces à un paramètre.

Montrer que sur une surface intégrale quelconque les courbes caractéristiques sont des lignes de courbure de cette surface; déterminer le second système de lignes de courbure.

Épreuve pratique. — *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z+a)z(z-b)}}$$

prise le long d'un contour fermé simple entourant les trois points $z = -a$, $z = 0$, $z = b$; *a et b désignent deux constantes réelles et positives.*

Quelle relation peut-on déduire de la considération de ce contour *(convenablement choisi) entre les deux intégrales réelles*

$$I = \int_{-a}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+a)x(x-b)}} \qquad \text{et} \qquad J = \int_{0}^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+a)x(x-b)}}.$$

Dans le cas où $a = b$, quelles sont les valeurs de chacune de ces intégrales ?

(Bordeaux, novembre 1926.)