NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL APPELL

Sur les séries numériques convergentes à termes positifs dont la somme est rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 231-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__231_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES CONVERGENTES A TERMES POSITIFS DONT LA SOMME EST RATIONNELLE;

Par Paul APPELL.

1° On peut établir un théorème général pour les séries numériques convergentes à termes positifs dont la somme est rationnelle.

Soit une série numérique

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

convergente à termes positifs.

La somme de la série est supposée rationnelle et égale à une fraction irréductible $\frac{\lambda}{\mu}$.

On écrit

$$\frac{\lambda}{\mu} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n = \Sigma_n + R_n$$

ou

$$\frac{p\lambda}{p\mu} = \Sigma_n + R_n,$$

p étant un entier quelconque.

On peut prendre n assez grand pour que R_n soit plus petit que tout nombre ε si petit soit-il.

D'autre part

$$p\mu(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = p\mu\Sigma_n$$

est une expression qu'on peut mettre sous la forme $E_n + f_n$, E_n étant le plus grand entier contenu dans $p\mu\Sigma_n$ et f_n un nombre moindre que 1.

On a alors une relation de la forme

$$p\lambda = E_n + f_n + p\mu R_n.$$

On peut prendre n assez grand pour que $p\mu R_n < 1$.

On a alors, E étant un entier égal à $p\lambda - E_n$,

$$E = f_n + p\mu R_n,$$

E est donc un entier positif. Comme f_n est au plus égal à 1, on a

$$E < 1 + p\mu R_n$$

ou

$$E < 2, \qquad \text{car} \qquad p\mu R_n < 1,$$

l'entier posisif E étant inférieur à 2 ne peut être que 1. On a donc :

$$p\lambda = E_n + 1,$$

$$(1) \qquad f_n + p\mu R_n = 1.$$

Tel est le théorème que nous voulions établir.

Si la relation (1) n'a pas lieu pour tous les n tels que $p\mu R_n < 1$, l'hypothèse est fausse et la somme de la série n'est pas rationnelle.

2° Exemples

Voici deux exemples, l'un se rapportant à une série dont la somme est évidemment rationnelle et l'autre se rapportant à une série dont la somme est évidemment irrationnelle.

En désignant par x un nombre rationnel positif inférieur à 1 on a évidemment

$$\frac{\lambda}{\mu} = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{x}{1-x}.$$

Supposons $x = \frac{1}{7}$. On aura

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{6},$$

$$\lambda = 1 \quad \mu = 6,$$

$$E_n = p - 1.$$

D'autre part

$$p\mu\, \Sigma_n = \frac{6p\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{7}} = p\left(1 - \frac{1}{7^n}\right) = p - 1 + 1 - \frac{p}{7^n}.$$

Comme

$$p\mu\, R_n = 6p\, R_n = 6p\left(\frac{1}{7^{n+1}} + \frac{1}{7^{n+2}} + \ldots\right)$$

$$= \frac{p}{7^n} \qquad \left(\text{on suppose } 7^n > p\right).$$

la partie entière de $p\mu\Sigma_n$ est bien $p-1$ pour les valeurs de n convenables.

Prenons comme second exemple le nombre e qui est manifestement incommensurable. On a alors

$$p\mu\, \Sigma_n = p\mu\left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots \frac{1}{n!}\right].$$

Prenons

$$p = 1.2\ldots(\mu - 1)(\mu + 1)\ldots n.$$

Alors $p\mu\Sigma_n$ est entier, donc

$$f = 0.$$

D'autre part

$$p\mu\, R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = \frac{1}{n};$$

il est donc impossible que

$$f_n + p\mu R_n = 1.$$

3° Dans les exemples précédents les termes u_n sont rationnels mais le théorème est général et s'applique à des séries dont le terme général serait irrationnel, par exemple à la série donnant C,

$$C = u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots,$$

où

$$u_n = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Le fait que $p\mu\Sigma_n + p\mu R_n$ c'est-à-dire que $\Sigma_n + R_n$ est indépendant de n, pour n suffisamment grand, est évident car

$$\Sigma_n + R_n = S.$$

Ce fait est général, que la somme soit rationnelle ou non.

La condition $f_n + p\mu R_n = 1$ qui est nécessaire pour que la somme de la série soit rationnelle est aussi suffisante; en effet, f_n diffère par un entier de $p\mu\Sigma_n$; donc la série $\Sigma_n + R_n$ est rationnelle.

La série qui définit C a ses termes irrationnels mais, d'après une remarque de M. Vacca, on peut les rendre rationnels.

On a, en effet,

$$C = \lim [H(h) - \log h]$$

où

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{h-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}(k-1)C &= \lim [kH(n+1) - H(n+1)^k] \\ &= \lim \Sigma_n \text{ (pour } n \text{ infini)},\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \Sigma_{n+1} - \Sigma_n \\ &= k[H(n+2) - H(n+1)] - [H(n+2)^k - H(n+1)^k] \\ &= \frac{k}{n+1} - \left(\frac{1}{(n+1)^k} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^k - 1}\right).\end{aligned}$$

La somme de la série est égale à

$$\Sigma_n + R_n = \Sigma_{n+1} + R_{n+1};$$

donc

$$u_n = \Sigma_{n+1} - \Sigma_n = R_n - R_{n+1},$$

quantité positive d'après les formules de M. Ser rappelées précédemment (*Nouvelles Annales*, juillet 1926).