

LOUIS GÉRARD

**Théorèmes de Puiseux et de Halphen
sur le pendule sphérique**

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 147-148

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__147_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES DE PUISEUX ET DE HALPHEN SUR LE PENDULE SPHÉRIQUE;

PAR LOUIS GÉRARD.

En prenant pour unité le diamètre de la sphère, pour origine le point le plus bas, on trouve, dans les traités de mécanique, que l'accroissement α de l'azimut pendant une oscillation simple est

$$\alpha = \int_a^b \frac{dz \sqrt{abc}}{z(1-z) \sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}$$

avec

$$0 < a < b < 1-a, \quad c = \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b} = 1 + \frac{ab}{1-a-b} > 1.$$

De plus

$$\int_a^b \frac{dz \sqrt{ab}}{z \sqrt{(z-a)(b-z)}} = \pi = \int_a^b \frac{dz \sqrt{(1-a)(1-b)}}{(1-z) \sqrt{(z-a)(b-z)}}.$$

Donc, pour montrer que $\alpha > \pi$, il suffit de remarquer que

$$\frac{\sqrt{c}}{(1-z) \sqrt{c-z}} > 1.$$

Pour montrer que $\alpha < 2\pi$, il suffit de prouver que

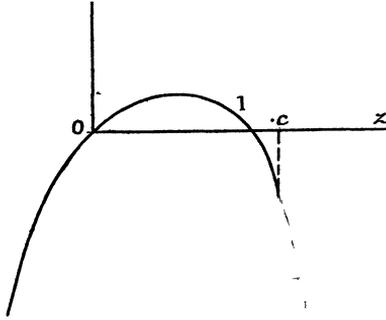
$$(1) \quad \frac{\sqrt{abc}}{z(1-z) \sqrt{c-z}} < \frac{\sqrt{ab}}{z} + \frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}}{1-z}.$$

En posant $A = \sqrt{(1-a)(1-b)}$, $B = \sqrt{ab}$ et en remplaçant c

par sa valeur $\frac{A^2}{A^2 - B^2}$, l'inégalité (1) devient

$$(2) \quad [Az + B(1-z)]\sqrt{A^2 - z(A^2 - B^2)} - AB > 0.$$

M. Hadamard m'a fait remarquer que le premier membre de cette inégalité s'annule pour $z = 0$ et $z = 1$. De plus, $A > B$ (à cause de l'hypothèse $1 - a - b > 0$); donc la variation de ce



premier membre est représentée par la courbe ci-dessus; donc ce premier membre est positif pour $0 < z < 1$.

Pour le voir algébriquement, posons

$$\sqrt{A^2 - z(A^2 - B^2)} = u;$$

l'inégalité (2) devient

$$(A^2 + AB + B^2 - u^2)u - AB(A + B) > 0$$

ou

$$(3) \quad (u - A)(u - B)(u + A + B) < 0.$$

Quand z varie de 0 à 1, u varie de A à B ; donc l'inégalité (3) est vérifiée.