Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 126-128

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__126_1>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.102. — *Que devient l'équation différentielle*

$$xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = -e^{x-1},$$

quand on y fait le changement de fonction $y = \frac{u}{x}$, *u étant la nouvelle fonction inconnue.*

En déduire l'intégrale générale de l'équation donnée et déterminer celle des solutions qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$y = 1, \qquad y' = C \qquad \text{pour} \qquad x = 1.$$

Construire la courbe représentative de cette solution particulière. Combien cette courbe présente-t-elle de points d'inflexion. En déterminer les abscisses avec 2 décimales.

Donner des développements limités du troisième ordre de cette fonction au voisinage de $x = 1$ *et de* $x = -1$. *En déduire la valeur du rayon de courbure en ce dernier point.*

L'aire comprise, dans le premier quadrant, entre l'axe Ox, *l'axe* Oy *et la courbe et celle comprise, dans le deuxième quadrant, entre* Ox *et la courbe sont-elles des aires finies ?*

On suppose la deuxième des aires ainsi définies recouverte d'une couche de matière dont la densité superficielle est égale à l'unité. Déterminer le moment d'inertie de la plaque ainsi constituée par rapport à Oy.

II. C.103. — *On considère la parabole d'équations paramétriques*

$$x = 2pt^2, \qquad y = 2pt \qquad \text{(en axes rectangulaires).}$$

1° *Soit* M *un point de coordonnées* x_0, y_0. *On mène les tangentes* MP *et* MP′ *à la parabole. Former, en fonction de* x_0, y_0, *l'équation donnant les valeurs* t_1 *et* t_2 *des paramètres des points* P *et* P′.

2° *On pose*

$$(\widehat{Ox, MP}) + (\widehat{Ox, MP'}) = \alpha.$$

Calculer tangα *en fonction :*

a. Des coefficients angulaires de MP *et* MP′.
b. Des coordonnées de M.

Déduire de la dernière formule le lieu de M *lorsque* α *est constant. Examiner le cas* $\alpha = 0$ *et justifier le résultat obtenu.*

3° *Le lieu précédent est une droite* (Δ). *Séparer sur cette droite les parties correspondant à des tangentes* MP *et* MP′ *réelles.* (*On suppose* α *différent de zéro.*)

La droite (Δ) *coupe la parabole en deux points* A *et* B. *Démontrer que les tangentes en ces points à la parabole sont rectangulaires.*

Lorsque α *varie la droite* (Δ) *passe par un point fixe que l'on caractérisera.*

4° *On achève le parallélogramme dont* MP *et* MP' *sont deux côtés. Lorsque* α *est constant démontrer que le lieu du quatrième sommet* N *du parallélogramme est une parabole. Cette parabole passe par un point fixe lorsque* α *varie.*

MÉCANIQUE. — C.104. — *Un point matériel pesant* M, *de masse* m, *mobile dans un plan vertical, est soumis, en plus de son poids, à l'action d'une force représentée par le vecteur* $mk^2\overrightarrow{MO}$, O *étant un point fixe du plan et* k *un coefficient donné.*

1° *Montrer que la résultante de ces deux forces dérive d'une fonction de forces. Tracer les lignes de niveau et les lignes de forces.*

2° *Le point* M, *tout en étant soumis au même champ de forces, est assujetti à se déplacer sur une droite* Δ, *située dans le plan vertical donné, passant par le point* O *et faisant avec la verticale un angle de* 60°. *Le coefficient de frottement au contact de la droite et du point a la valeur* $f = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. *Déterminer la partie de la droite où l'on peut placer le point* M *sans vitesse initiale pour qu'il y reste en équilibre.*

3° *Les conditions étant les mêmes qu'au paragraphe précédent, le point* M *est posé sur la droite* Δ, *sans vitesse initiale, en une position* M_0 *située plus haut que le point* O *et telle que* $OM_0 = \frac{3}{2}a$ $\left(\text{en appelant } a \text{ la quantité } \frac{g}{k^2}\right)$. *Étudier complètement le mouvement qui se produira et tracer le diagramme des espaces.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Construire la courbe d'équations paramétriques*

$$x = \frac{1 + 2t^2 - t^4}{1 - t^4}, \qquad y = \frac{3t}{1 - t^4}.$$

(*On précisera la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.*)

2° *En supposant l'unité de longueur du dessin égale à* 1^{cm}, *évaluer à* 1^{mm^2} *près l'aire limitée* A *comprise entre la partie de l'axe* Oy *située entre les points d'intersection de cet axe et de la courbe, et la portion correspondante de la courbe.*

3° *Calculer de même à* 1^{mm^3} *près le volume engendré par la rotation de l'aire* A *autour de* Ox.

(Strasbourg, juin 1926.)