ANDRÉ BLOCH

Racines multiples des systèmes de *m* équations à *m* inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 104-105

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__104_0>

RACINES MULTIPLES DES SYSTÈMES DE m ÉQUATIONS A m INCONNUES;

PAR ANDRÉ BLOCH.

Dans le fascicule, d'ailleurs à tous égards très intéressant, qui dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* est consacré aux polynomes et aux fractions rationnelles, se trouve la phrase suivante (1) :

« Il semble très difficile d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{m0})$ soit une racine multiple d'ordre 3, au moins, d'un système d'équations

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_m) = 0, \ldots, f_m(z_1, z_2, \ldots, z_m) = 0. \text{ »}$$

Il se trouve, en réalité, que la chose est aisée; voici le résultat que l'on établit facilement :

Si les premiers mineurs du jacobien (2) *de* $f_1, \ldots, f_m$ *s'annulent pour* $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{m0})$, *la racine est au moins d'ordre* 4.

Si un premier mineur du jacobien est différent de zéro pour $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{m0})$, *soit* α_1^1 *ce mineur; soient* $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^m$ *les premiers mineurs affectés de signes alternés, pris dans les mêmes colonnes;* $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_m^1$ *les premiers mineurs affectés de signes alternés, pris dans les mêmes lignes; soient* $f_{12}, \ldots, f_{m2}$ *les parties quadratiques de* $f_1, \ldots, f_m$. *Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que* $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{m0})$ *supposée racine d'ordre au moins* 2 *soit racine d'ordre au moins* 3 *pour le système est que la forme quadratique*

$$\alpha_1^1 f_{12} + \alpha_1^2 f_{22} + \ldots + \alpha_1^m f_{m2}$$

s'annule pour $(z_1, z_2, \ldots, z_m) = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_m^1)$.

(1) E. NETTO et R. LE VAVASSEUR, t. I, n° 9, p. 145.

(2) Le jacobien est supposé écrit chaque fonction dans une ligne, chaque variable de dérivation dans une colonne.

On pourra sans doute obtenir de même la condition nécessaire et suffisante pour qu'une racine d'ordre $p - 1$ au moins soit d'ordre p au moins; on ne changera d'ailleurs rien au fond de la question en supposant qu'il n'y a que deux variables, c'est-à-dire qu'il s'agit de l'intersection de deux courbes (pour ce cas le problème est virtuellement résolu par l'égalisation des dérivées premières, secondes, etc., $(p - 1)^{\text{iemes}}$ de y par rapport à x).