Nouvelles annales de mathématiques

René Garnier

Sur les cercles focaux

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 9-11

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__9_1>

[L[1] 7]

SUR LES CERCLES FOCAUX;

PAR RENE GARNIER.

M. H. Lebesgue a montré récemment (1) comment on peut étudier simultanément les deux séries de cercles bitangents à une conique à centre (2). Nous allons établir que *ces deux séries sont les seules;* nous nous appuierons uniquement *sur la définition des coniques par un foyer* F *et une directrice* (Δ), en n'invoquant aucune autre notion que celles du programme de la classe de Mathématiques.

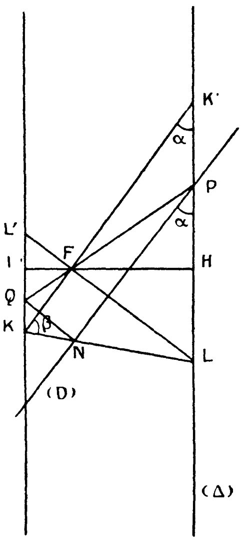
1. En partant de cette définition, *cherchons le lieu*

(1) *Nouv. Ann.*, 5e série, t. I, 1923, p. 340.

(2) M. Lebesgue a étudié par un procédé analogue les cercles focaux de la parabole. Les considérations suivantes montrent également que ces cercles forment une série unique

des milieux des cordes d'une conique (C), *parallèles à une direction donnée.*

Soit P l'intersection d'une droite (D) avec (Δ) et soit α l'angle des droites (D) et (Δ). Les points de (C)



qui appartiennent à (D) se trouvent sur le cercle lieu des points M tels que

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}} = e \sin \alpha$$

(e, excentricité de la conique). Le centre Q de ce cercle se projette sur l'axe focal en un point I qui est le centre du cercle lieu des points tels que le rapport de leurs distances à F et à H soit $e \sin \alpha$. On a donc

$$\frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FH}} = \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \sin^2 \alpha};$$

ainsi, le point I ne change pas lorsque (D) se déplace parallèlement à elle-même.

Cela étant, le milieu du segment découpé sur (D) par (C) coïncide avec la projection N de Q sur (D). Il s'agit de trouver le lieu de N. Or, menons par F une parallèle à (D) coupant en K et K′ les droites IQ et (Δ), et menons encore par F une perpendiculaire à (D) coupant en L′ et L les droites IQ et (Δ). Je dis que le lieu cherché est la droite KL.

En effet, appelons N′ l'intersection de KL avec (D), et N″ l'intersection de KL avec la perpendiculaire à (D) menée par Q; notre assertion sera justifiée si nous montrons que N′ et N″ coïncident en un point N.

Or on a

$$\frac{LN''}{LK} = \frac{L'Q}{L'K} = \frac{LP}{LK'} = \frac{LN'}{LK}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Désignons alors par β l'angle de (D) avec son diamètre; il viendra :

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{FL}{KF} = \frac{FH}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{IF} = \frac{1 - e^2\sin^2\alpha}{e^2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Excluons le cas où (C) est un cercle; l'angle β ne pourra être droit que lorsque (D) est parallèle [1] ou perpendiculaire à l'axe focal.

2. Ceci posé, observons que tout diamètre (δ) d'une conique (C) passe par le point de concours S des tangentes à (C) menées aux deux extrémités M, M′ d'une corde de direction conjuguée à (δ) : car si $M_1M'_1$ est une corde parallèle à MM′ et infiniment voisine de MM′, les droites MM_1 et $M'M'_1$ se coupent sur le diamètre. Dès lors, s'il existe un cercle bitangent à (C) en M et M′, on aura SM = SM′; le triangle SMM′ étant isoscèle, sa médiane (δ) est une hauteur, ce qui exige que MM′ soit parallèle [1] ou perpendiculaire à l'axe focal.

---

[1] On écarte le cas de la parabole. — La formule précédente montre d'ailleurs immédiatement que tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.