NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 358-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__358_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2470.

(1923-1924, p. 315.)

Soit PQR *un triangle équilatéral circonscrit à une parabole*, QR *touchant la courbe en son sommet* S, PQ *la touchant en* M, PR *en* N. *Soient* F *le foyer de la parabole et* KL *la corde focale perpendiculaire à l'axe*, K *et* M *étant du même côté de l'axe. Soient* B *le point commun à* SK *et* FM, C *le point commun à* SL *et* FN. *Soit enfin* A *le point commun à* BN *et* CM. *Démontrer que :*

1° FM *passe par* R, FN *par* Q;

2° *Le triangle évidemment isoscèle* ABC *est rectangle en* A;

3° AQ *et* AR *sont les deux trisectrices de l'angle* BAC; BP *et* BR *celles de l'angle* ABC, CP *et* CQ *celles de l'angle* ACB.

J. A. Moren.

1° Le foyer F de la parabole Σ est sur le cercle circonscrit Γ et la droite de Simson de ce point par rapport à ABC est la tangente au sommet, donc F est diamétralement opposé à P sur Γ.

FQ rencontre AR en N; comme FR est bissectrice de l'angle PFN et de plus perpendiculaire sur PN,

$$\mathrm{PR} = \mathrm{RN},$$

et par suite, d'après la propriété de la sous-tangente, N est le point de contact de PR avec la parabole. Par symétrie FR rencontre PQ en M, point de contact de PQ avec Σ.

2° et 3° Si IJ est le diamètre de Γ parallèle à QR, KS passe par J; si d'autre part $\mathrm{N_1}$ est l'intersection de FR avec IJ, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{BN_1}}}{\overline{\mathrm{BF}}} \times \frac{\overline{\mathrm{SF}}}{\overline{\mathrm{SO}}} \times \frac{\overline{\mathrm{JO}}}{\overline{\mathrm{JN_1}}} = +1 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\overline{\mathrm{JO}}}{\overline{\mathrm{JN_1}}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

et par suite,

$$\frac{\overline{\mathrm{BN_1}}}{\overline{\mathrm{BF}}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1},$$

d'où

$$\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\overline{\mathrm{BF}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PF}},$$

donc B est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle F au triangle PFN. JR rencontre OF en A centre du cercle ex-inscrit dans l'angle R au triangle FRN, d'où il résulte que A, N et B sont en ligne droite. Par symétrie A, M et C sont en ligne droite.

Or on sait que

$$\widehat{FAN} = 90^{\circ} - \frac{\widehat{FRN}}{2} = 45^{\circ},$$

$$\widehat{PBN} = 90^{\circ} - \frac{\widehat{PFN}}{2} = 30^{\circ}.$$

D'autre part,

$$\widehat{FAR} = 15^{\circ}.$$

Ces trois relations mettent en évidence les propriétés indiquées.

G. Roy.