Nouvelles annales de mathématiques

Joseph Pérès

Choc en tenant compte du frottement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 98-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__98_0>

[R9b]

CHOC EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

I. Le problème plan.

1. Je me propose de revenir ici sur l'étude du choc de deux solides quelconques *en tenant compte du frottement au contact.* C'est là une question déjà étudiée et l'on sait que les méthodes de la Mécanique rationnelle en fournissent la solution sans que l'on rencontre jamais, comme dans d'autres questions où intervient le frottement, *aucune indétermination ou impossibilité* (¹). Nous utiliserons dans cet article, pour résoudre le problème posé et arriver à la conclusion précédente, une représentation géométrique très simple et qui présente des avantages.

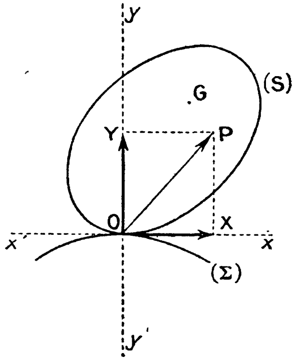
Faut-il dire que ces quelques pages n'apportent pas de *résultats* nouveaux.

2. Envisageons d'abord le cas d'une plaque matérielle quelconque (S), mobile dans un plan et y rencontrant, à un instant donné, un obstacle fixe (Σ); O est le point de contact; les axes de coordonnées Ox et Oy sont respectivement la tangente et la normale aux surfaces en contact; le centre de gravité de la plaque G a, à l'intant du choc, les coordonnées a et b. Nous supposerons connu le coefficient de restitution

(¹) Un cas particulier intéressant a été étudié récemment ici même (cf. *Nouvelles Annales*, avril et juin 1923).

(ou d'élasticité) e; enfin, le contact a lieu avec frottement, le coefficient de frottement étant connu.

Fig. 1.



Étant données, à l'instant t_0 où commence le choc, les composantes α_0, β_0 de la vitesse du point G et la rotation instantanée ω_0 de la plaque, il s'agit de déterminer, à l'instant t_1 où le choc se termine, les quantités analogues α_1, β_1, ω_1.

Pour cela notons d'abord que, X et Y étant les composantes de la percussion P qui s'exerce sur (S), on a les équations classiques

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &= \frac{X}{m}, \\ \beta_1 - \beta_0 &= \frac{Y}{m}, \\ \omega_1 - \omega_0 &= \frac{bX - aY}{mk^2} \end{aligned} \right.$$

(quantité de mouvement et moment cinétique en G), m étant la masse de la plaque et k le rayon de giration relatif au point G. D'autre part la vitesse du point de la plaque qui est en O est

$$\text{au début du choc}\ \begin{cases} U_0 = \alpha_0 + b\,\omega_0, \\ V_0 = \beta_0 - a\,\omega_0; \end{cases}$$

$$\text{à la fin du choc}\ \begin{cases} U_1 = \alpha_1 + b\,\omega_1, \\ V_1 = \beta_1 - a\,\omega_1, \end{cases}$$

et l'on en déduit, d'après (1),

$$(2)\quad \begin{cases} U_1 - U_0 = \dfrac{X(k^2+b^2) - abY}{mk^2} = \dfrac{\partial\varphi(X,Y)}{\partial X}, \\[2ex] V_1 - V_0 = \dfrac{-abX + Y(k^2+a^2)}{mk^2} = \dfrac{\partial\varphi(X,Y)}{\partial Y}, \end{cases}$$

avec

$$\varphi(X,Y) = \frac{X^2(k^2+b^2) - 2abXY + (k^2+a^2)Y^2}{2mk^2}.$$

Tout revient donc à déterminer U_1 et V_1 : X et Y en résultent grâce aux relations (2), puis, d'après les relations (1), l'état final des vitesses.

3. Il serait facile d'achever la question par le calcul. Nous procéderons plutôt géométriquement, en utilisant les remarques suivantes.

La courbe

$$\varphi(x,y) = 1$$

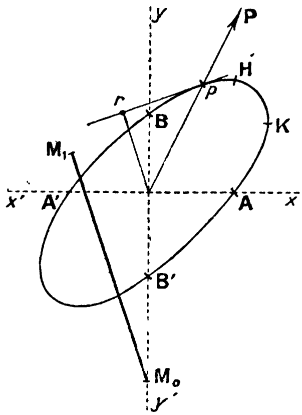
est une ellipse dont le tracé est immédiat : le grand axe est porté par la droite OG ($bx - ay = 0$) et les longueurs des demi-axes sont proportionnelles à $\sqrt{k^2+a^2+b^2}$ et k. L'ellipse présente la disposition de la figure 2 si, ce qui n'est pas une restriction, on suppose ab positif [1] : les points H et K de cette ellipse (point le plus haut et point le plus à droite) sont dans l'angle

---

[1] Nous pouvons laisser de côté le cas où ab serait nul. C'est, au fond, le cas traité dans les articles précédemment cités.

des axes xOy. Soient p le point où la demi-droite qui porte la percussion rencontre cette ellipse et r le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en p à l'ellipse ; soient M_0 et M_1 les points de coordonnées U_0, V_0 et U_1, V_1 : d'après *les formules* (2) *les segments* Or et M_0M_1 *sont parallèles et de même sens.*

Fig. 2.



Observons enfin que l'on peut écrire des formules analogues à (1) et (2) pour tout intervalle partiel du temps t_0 t_1 que dure le choc. Soient alors U et V les composantes de la vitesse du point de contact à un instant quelconque du choc et soit M le point de coordonnées U et V. Pendant le choc le point M va, suivant un certain chemin, de M_0 en M_1 : *à chaque instant le déplacement de ce point a lieu dans la direction* Or, le point r étant déterminé par la contruction précédente où l'on remplace *la percussion* P *par la réaction à l'instant considéré.*

Cette réaction (comme d'ailleurs la percussion totale P) est située au-dessus de X'OX, de sorte que le point p est toujours sur la demi-ellipse supérieure A'BHKA. Le point M_0 est connu, il est au-dessous de X'OX puisque la vitesse normale V_0 au début du choc doit être supposée négative. La trajectoire du point M est immédiate : si, pendant tout ou partie du choc, il y a glissement, la réaction correspondante fait avec Oy l'angle de frottement dans le sens opposé au glissement; les points p et r sont donc bien déterminés et M décrira un segment de droite parallèle à Or et de même sens. Si, au contraire, il n'y a pas glissement, U sera nul et le point M se déplacera sur $y'Oy$, le point p correspondant étant en H. Dans tous les cas on déterminera sans peine le point M_1 puisque l'on en connaît l'ordonnée

$$V_1 = -e V_0. \tag{3}$$

e étant le coefficient de restitution.

Pour terminer la discussion nous distinguerons plusieurs cas.

4. *Premier cas : pas de glissement au début du choc.* U_0 est nul et M_0 est sur Oy'. Deux hypothèses sont possibles.

a. Pendant le choc il n'y a pas de glissement, le point M décrit l'axe $y'Oy$ jusqu'en M_1 déterminé par la relation (3). Le point p correspondant est en H et la percussion portée par OH. Cette solution est donc acceptable si $\widehat{yOH}$ *est inférieur ou égal à l'angle de frottement* φ.

b. Pendant le choc un glissement s'établit. La réaction tangentielle devant être opposée au glissement dont le sens est défini par Or, il faut que Oy soit intérieur à l'angle $\widehat{rOp}$. Cela implique, comme on le voit immédiatement sur la figure, que p soit un point de l'arc BH; le glissement sera donc négatif. La position du point M_1 en résulte (*fig.* 2) et l'on voit que le glissement n'est possible que si $\widehat{yOH}$ *est plus grand que l'angle de frottement.*

Les deux hypothèses s'excluent et nous obtenons donc toujours une seule solution du problème.

5. *Deuxième cas :* U_0 *positif.* Dans ce cas, au moins au début du choc, le glissement est positif et le point p est bien determiné sur l'arc A'B. On a donc la direction Or $\left(\text{contenue dans l'angle } \widehat{x'Oy}\right)$ et le point M décrit la parallèle menée par M_0. Prenons sur cette parallèle le point dont l'ordonnée est donnée par (3).

Si le point ainsi obtenu correspond encore à un glissement positif, c'est le point M_1 et le problème est résolu; le glissement reste positif pendant tout le choc. Sinon la droite issue de M_0 coupe l'axe $y'y$ en un point M′ et il faut diviser le choc en deux périodes. La première nous amène en M′ avec un glissement nul. Nous nous trouvons ensuite dans les conditions du *premier cas* et nous aurons, pour la fin du choc, *pas de glissement* ou *glissement négatif* suivant la valeur du coefficient de frottement.

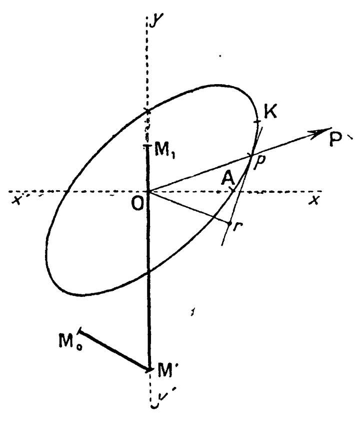
6. *Troisième cas :* U_0 *négatif.* Au début du choc le glissement est négatif et le point p bien déterminé sur l'arc d'ellipse AB.

a. p est sur l'arc BH. Or est alors dans l'angle $x'Oy$ de sorte que le glissement augmentera en valeur absolue. M_1 correspond donc toujours à un glissement négatif et la solution convenable sera toujours obtenue en menant par M_0 la parallèle à Or.

b. p est sur l'arc HK. Or est dans l'angle xOy. Le glissement sera négatif pendant tout le choc si le point M_1, déterminé en menant par M_0 la parallèle à Or, est à gauche de $y'Oy$. Sinon, il faudra s'arrêter, comme dans le second cas, en M' sur $y'Oy$ et le choc comportera une seconde période, toujours *sans glissement*, d'après les résultats du premier cas.

c. p est sur l'arc KA. Dans ce cas Or est dans l'angle $y'Ox$ et la parallèle menée par M_0 ne rencontre pas $x'Ox$ mais rencontre toujours $y'Oy$. Le choc comporte

Fig. 3.



toujours deux périodes, la première amenant en M', la deuxième amenant en M_1 sans qu'aucun glissement s'établisse (*fig*. 3).

7. On voit que, dans tous les cas, la solution du problème est déterminée sans que l'on rencontre aucune

impossibilité. L'application de la méthode n'exige pas le tracé de l'ellipse; on en connait les axes et, parce que toute ellipse homothétique et concentrique peut jouer le même rôle, on prendra pour longueur de ces axes $2\sqrt{k^2+a^2+b^2}$ et $2k$ (§ 3). Il y aurait peu de chose à ajouter pour obtenir, de façon également graphique, la percussion P.

Le dernier cas envisagé (§ 6, c) présente une circonstance à première vue paradoxale : la vitesse normale du point de contact augmente en valeur absolue pendant la première partie du choc.

Dans le cas de corps mous ($e = O$) le point M_1 se trouve sur l'axe $x'Ox$ et une discussion classique, pour laquelle nous pouvons renvoyer le lecteur à un article de M. Delassus [1], permettra de décider si, après le choc, le mouvement de la plaque sera le mouvement libre ou le mouvement lié (avec ou sans glissement). Peut-on, dans le cas du glissement, se trouver dans le cas où les lois du frottement *paraissent* conduire à une impossibilitè et où, comme le montre clairement M. Delassus, il se produit choc avec établissement brusque du roulement ? Il est facile de voir que non : la droite D de M. Delassus est, avec les notations utilisées ici, la droite OK et l'impossibilité en question ne pourrait se présenter que pour

$$U_1 < 0, \qquad \widehat{yOK} < \varphi \quad [2].$$

Il suffit de se reporter à la discussion précédente pour constater que ces inégalités ne seront pas simultanément

(1) *Nouvelles Annales*, 1920, p. 485.

(2) φ étant l'angle de frottement (cf. *loc. cit.*, note précédente, § 4 et 5).

vérifiées [1]. Les corps étant *mous*, le choc est donc bien terminé lorsque le point M_1 vient sur $x'Ox$.

8. Nous avons envisagé, jusqu'ici, le choc d'une plaque sur un obstacle fixe, mais il n'est pas plus difficile d'étudier le choc de deux plaques (S) et (S′) mobiles dans un plan. Gardant les notations précédentes et accentuant les quantités relatives à la seconde plaque, on aura les équations déjà écrites (1) et

$$(1') \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha'_1 - \alpha'_0 &= -\frac{X}{m'}, \\ \beta'_1 - \beta'_0 &= -\frac{Y}{m'}, \\ \omega'_1 - \omega'_0 &= \frac{-b'X + a'Y}{m'k'^2}; \end{aligned} \right.$$

il faut faire intervenir les composantes U et V de la vitesse, par rapport à (S′), du point de (S) qui est en O; ces composantes sont, au début et à la fin du choc,

$$U_0 = \alpha_0 + \omega_0 b - \alpha'_0 - \omega'_0 b', \qquad U_1 = \alpha_1 + \omega_1 b - \alpha'_1 - \omega'_1 b'$$
$$V_0 = \beta_0 - \omega_0 a - \beta'_0 + \omega'_0 a', \qquad V_1 = \beta_1 - \omega_1 a - \beta'_1 + \omega'_1 a',$$

on en déduit encore

$$U_1 - U_0 = \psi'_X(X, Y), \qquad V_1 - V_0 = \psi'_Y(X, Y),$$

avec, cette fois,

$$\psi(X, Y) = \frac{X^2 + Y^2}{2m} + \frac{X^2 + Y^2}{2m'} + \frac{b^2X^2 - 2abXY + a^2Y^2}{2mk^2} + \frac{b'^2X^2 - 2a'b'XY + a'^2Y^2}{2m'k'^2}.$$

---

[1] U_1 ne peut être négatif que : 1° dans le premier cas, si $\widehat{yOH} < \varphi$; 2° dans le second cas, si l'on a la même inégalité; 3° dans le troisième cas, *a*. où l'on a encore la même inégalité.

Il n'y a plus qu'à répéter mots pour mots la discussion précédente en partant cette fois de l'ellipse qui a pour équation

$$\psi(x,y) = 1.$$

Ici encore *aucune indétermination ou impossibilité.*

Nous n'insisterons pas davantage sur les problèmes *plans* et réservons, pour un prochain article, l'application des mêmes méthodes aux questions analogues dans *l'espace*.