

**Agrégation des sciences mathématiques  
(juillet 1919) ; problème de calcul  
différentiel et intégral**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 20  
(1920), p. 260-263

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1920\\_4\\_20\\_\\_260\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__260_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (JUILLET 1919);  
PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.**

---

PREMIÈRE PARTIE.

*Appelons  $R, \theta, \varphi$  les coordonnées sphériques d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont  $x, y, z$ , de sorte que*

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

On considère la surface S dont l'équation est

$$R = a e^u,$$

$a$  étant une constante,  $e$ , la base des logarithmes népériens et  $u$  la fonction

$$u = \lambda \varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \theta} \, d\theta,$$

où  $\lambda$  est une constante donnée.

1° On demande de former les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de S.

2° Montrer que dans les deux équations on peut séparer les variables.

3° Prouver que toutes les lignes de courbure de S (de l'une quelconque des deux familles) sont semblables. De même pour les lignes asymptotiques.

4° Considérer le cas où  $\lambda = 1$ .

#### DEUXIÈME PARTIE.

1° On considère les fonctions réelles  $\varphi(x)$  qui sont continues sur l'intervalle J :  $0 \leq x \leq 1$ , et telles que

$$0 < \varphi(x) < 1.$$

2° Parmi ces fonctions, envisageons d'abord celles dont l'oscillation reste inférieure à  $\frac{1}{n}$  dans tout intervalle partiel de longueur  $\frac{1}{p}$ .

Montrer qu'il existe un nombre fini  $2s$  de fonctions

$$g_1(x), h_1(x), g_2(x), h_2(x), \dots, g_s(x), h_s(x)$$

qui sont continues sur  $J$  et telles que

$$0 \leq h_1(x) < g_1(x) \leq 1, \quad \dots, \quad 0 \leq h_s(x) < g_s(x) \leq 1,$$

$$g_1(x) - h_1(x) \leq \frac{3}{n}, \quad \dots, \quad g_s(x) - h_s(x) \leq \frac{3}{n},$$

de sorte qu'à chacune des fonctions  $\varphi(x)$  envisagées, on peut assigner un des couples  $g_i(x)$ ,  $h_i(x)$  satisfaisant sur  $J$  aux conditions

$$h_i(x) < \varphi(x) < g_i(x).$$

3° On demande, non seulement de prouver l'existence des fonctions  $g$ ,  $h$  en nombre fini, mais, parmi tous les choix possibles, d'en définir au moins un explicitement connaissant seulement  $n$  et  $p$ .

4° Si l'on ne peut fixer en fonction de  $n$  et  $p$  la plus petite valeur possible du nombre  $s$  des couples  $g$ ,  $h$ , on demande de déterminer au moins une fonction algébrique simple de  $p$  et  $n$  qui soit une des valeurs possibles de  $s$ .

5° Parmi les fonctions  $\varphi(x)$  décrites au paragraphe 1°, considérons seulement maintenant celles qui admettent partout sur  $J$  une dérivée  $\varphi'_x$  dont la valeur absolue reste inférieure ou au plus égale à un nombre déterminé  $k > 0$ . Montrer que si  $\lambda$ ,  $\omega$  sont deux nombres arbitraires, l'un supérieur à  $k$ , l'autre à zéro, il existe un nombre fini et de fonctions  $q_1(x)$ ,  $r_1(x)$ , ...,  $q_t(x)$ ,  $r_t(x)$  admettant partout sur  $J$  une dérivée continue dont la valeur absolue reste inférieure à  $\lambda$  et telles que

$$0 \leq r_1(x) < q_1(x) \leq 1, \quad \dots, \quad 0 \leq r_t(x) < q_t(x) \leq 1,$$

$$q_1(x) - r_1(x) < \omega, \quad \dots, \quad q_t(x) - r_t(x) < \omega,$$

de sorte qu'à chacune des fonctions  $\varphi(x)$  envisagées

( 263 )

*maintenant, on peut assigner un des couples  $q_i(x)$ ,  $r_i(x)$ , satisfaisant sur  $J$  aux conditions*

$$r_i(x) < \varphi(x) < q_i(x).$$