NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de licence (Marseille, mars 1919)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 269-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__269_0>

CERTIFICATS DE LICENCE

(Marseille, mars 1919).

Analyse infinitésimale.

COMPOSITION ÉCRITE.

Condition pour que les normales principales d'une courbe gauche puissent être aussi les normales principales d'une seconde courbe gauche.

Démontrer que, si la première courbe a un rayon de courbure constant, il en est de même de la seconde et que chacune des deux courbes est l'arête de rebroussement de la surface polaire de l'autre.

SOLUTION.

Soient (x, y, z) et (X, Y, Z) les points correspondants des deux courbes sur la normale principale commune de direction (ξ, η, ζ) et l la distance de ces deux points, on a

$$X = x + l\cos\xi, \qquad \text{d'où} \qquad 0 = \Sigma\, dX \cos\xi,$$

ou

$$dl = 0, \qquad \text{ou} \qquad l = \text{const.}$$

Soit V l'angle des deux tangentes de directions (α, β, γ) et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$; on a

$$d\cos V = \Sigma\cos\xi\, d\sigma\cos\alpha_1 + \Sigma\cos\xi\, d\sigma_1\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$V = \text{const.}$$

Or

$$\cos V = \frac{\Sigma\, dx\, dX}{ds\, ds_1} = \frac{ds^2 - l\, ds\, ds_1}{ds\left[ds^2 + l^2 ds^2 + l^2 d\tau^2 - 2l\, ds\, d\sigma\right]^{\frac{1}{2}}};$$

on a donc

$$\cos V = \frac{1 - \frac{l}{R}}{\sqrt{\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{l}{T}\right)^2}}$$

et

$$\sin V = \frac{\frac{l}{T}}{\sqrt{\left(1 - \frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{l}{T}\right)^2}}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\frac{l \sin V}{R} + \frac{l \cos V}{T} - \sin V = 0,$$

relation linéaire entre les courbures.

Réciproquement, s'il existe une relation de la forme

$$\frac{A}{R} + \frac{B}{T} + C = 0,$$

on peut l'identifier avec la forme précédente.

Si R est constant et T variable, il faut $B = 0$, c'est-à-dire

$$\cos V = 0, \qquad \sin V = 0 \qquad \text{et} \qquad l = R.$$

L'angle V est donc droit et il n'y a qu'une courbe associée qui est le lieu des centres de courbures de la courbe donnée. C'est aussi, on le sait, le lieu des centres de la sphère osculatrice.

La relation $dX = -\frac{R}{T} \cos\lambda\, dS$ montre que la tangente à la courbe associée est parallèle à la binormale de la proposée, c'est-à-dire est sa droite polaire ou encore est la tangente à l'arête de la surface polaire.

Enfin on a

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{d\sigma_1^2}{ds^2} = \frac{\Sigma (d \cos\lambda)^2}{\Sigma dX^2} = \frac{2}{R^2}, \qquad \text{d'où} \qquad R_1 = R,$$

ce qui prouve que les propriétés des deux courbes sont réciproques.

ÉPREUVE PRATIQUE.

Calculer l'intégrale indéfinie.

$$I = \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{5+8x-4x^2}}\,dx$$

en employant la variable u définie par la relation

$$u = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}.$$

Analyser la fonction

$$f(z) = \frac{(z-1)^3}{\sqrt{5+8z-4z^2}}$$

dans les seuls cas où le point z décrit un chemin fermé situé à distance finie dans le plan des z.

SOLUTION.

Si l'on pose

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}} = u, \qquad x - 1 + \frac{3}{2}z,$$

on a

$$u = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad z = \sin 2u,$$

$$y = \sqrt{5+8x-4x^2} = 3\cos 2u$$

et

$$I = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \int \sin^3 2u\,du = \frac{9y}{16}\left[\frac{y^2}{27} - 1\right].$$

Mécanique.

COMPOSITION ÉCRITE.

Dans un plan vertical on donne une droite dépolie O*x qui fait avec l'horizon un angle α tel que* *tang* $\alpha = 0{,}75$. *Une plaque carrée* ABCD, *homogène et de poids* P *s'appuie sur cette droite par le côté* AB. *Au point* A *est attachée l'une des extrémités d'un fil élastique dont l'autre extrémité est attachée au point fixe* O.

Le fil, dont la masse est négligeable, s'allonge proportionnellement à sa tension et il doublerait de longueur sous l'action d'une tension égale au poids P.

Le coefficient de frottement de la plaque sur Ox *est égal à* 0,5.

A l'origine le système est sans vitesse et le fil a sa longueur naturelle qui est a.

Étudier le mouvement de ce système et examiner si la plaque reste constamment appuyée sur Ox *et ne tend pas à pivoter autour du point* B.

SOLUTION.

OA dirigée vers le bas étant représentée par x, l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x-a}{a} - gf\cos\alpha + g\sin\alpha = -\frac{g}{a}(x - 1{,}2a),$$

d'où, en tenant compte des données initiales,

$$x = a\left[1{,}2 - 0{,}2\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right], \quad \frac{dx}{dt} = 0{,}2\sqrt{ga}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t.$$

La vitesse s'annule au bout du temps $t_1 = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ et x prend la valeur $x_1 = 1{,}4a$. La plaque reste alors en repos; car, d'une part, la composante du poids est 0,6P, et, d'autre part, la tension du fil est 0,4; donc il reste une force dirigée suivant Ox égale à 0,2P et inférieure à $mgf\cos\alpha$ ou à 0,4P.

Soit N la composante normale de la pression de Ox sur la plaque et z sa distance au centre de la plaque. Si l'on applique le théorème des moments par rapport à ce point, et si $2c$ représente le côté du carré, on devra avoir

$$Nz = \left[0{,}4\,P + P\frac{x-a}{a}\right]c$$

et, comme $N = 0{,}8P$, on aura

$$0{,}8z = c\left(0{,}4 + \frac{x-a}{a}\right).$$

Mais $x - a$ est au plus égal à $0{,}4a$; on a donc $z < c$, ce qui prouve que la plaque ne bascule pas.

ÉPREUVE PRATIQUE.

Sur une même horizontale, on donne un point fixe O *et une cheville* A *parfaitement polie. On attache en* O *l'une des extrémités d'un fil pesant et homogène. Ce fil s'appuie ensuite sur la cheville* A *et pend verticalement au-dessous de* A.

La distance OA *est égale à* 2^{m} *et le fil a* 4^{m} *de long.*

Combien y a-t-il de positions d'équilibre ? Quelle est, quand il y a équilibre, la longueur de la partie AB *du fil qui pend verticalement et quelle est la flèche de la chaînette qui va de* O *en* A ?

SOLUTION.

Soit $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ l'équation de la chaînette rapportée à ses axes ordinaires. La longueur de la partie courbe est $a\left(e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}\right)$ Mais, comme la tension en un point est égale à l'ordonnée, il faut que la longueur du fil qui pend soit égale à $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{1}{a}}+e^{-\frac{1}{a}}\right)$. Enfin, la longueur du fil étant 4, on doit avoir la relation

$$\frac{3}{2} a e^{\frac{1}{a}} - \frac{1}{2} a e^{-\frac{1}{a}} = 4.$$

En remplaçant $\frac{1}{a}$ par u, on est amené à résoudre l'équation

$$3 e^{u} - e^{-u} - 8u = 0.$$

En bornant les séries à deux termes, on trouve l'équation $u_1^2 - 4u_1 + 2 = 0$ qui a deux racines $2 \pm \sqrt{2}$ ou 0,6 et 3, 4. Mais l'approximation est insuffisante. Des essais successifs donnent, en posant $z = 3e^{u} - e^{-u} - 8u$,

$u = 0,66$,	$e^{0,66} = 1,9348$.	$z = 0,0076$;
$u = 0,67$,	$e^{0,67} = 1,9342$,	$z = -0,0091$;
$u = 1,17$,	$e^{1,17} = 3,2217$,	$z = -0.0053$;
$u = 1,18$.	$e^{1,18} = 3,2528$,	$z = 0,0111$.

En prenant pour première solution $u = 0,66$, on trouve que le fil qui pend a pour longueur

$$\frac{1}{u}\,\frac{e^{u} + e^{-u}}{2} = 1,857$$

et que la flèche est

$$1,857 - \frac{1}{0,66} = 0,342.$$

Pour la seconde solution, on fera $u = 1,17$ et l'on trouvera pour le fil qui pend 1,510 et pour la flèche 0,655.

L'observation des changements de signes de z montre que le premier équilibre seul est stable.

Mathématiques générales.

COMPOSITION ÉCRITE.

Étant données les deux fonctions de la variable t

$$x = \operatorname{tang}\frac{t}{3}, \qquad y = \cos t,$$

montrer qu'à chaque valeur donnée de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires et qu'à chaque valeur donnée de y correspondent six valeurs de x égales deux à deux et de signes contraires. Dans ce dernier cas, la plus petite valeur positive de x étant représentée par x_1 calculer les cinq autres valeurs et les ranger dans un ordre croissant; cas de $y = 1$ et de $y = 0$.

Trouver en eléminant t la relation qui lie x et y et construire la courbe qu'elle représente.

SOLUTION.

Soient $y = \cos t$ et $y_0 = \cos\alpha$, α étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, les valeurs de $\frac{t}{3}$ qui donne des valeurs positives pour x sont $\frac{\alpha}{3}$, $-\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}$, $\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}$ et ces valeurs sont, en croissant, x_1, $\frac{\sqrt{3} - x_1}{1 + x_1\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3} + x_1}{1 - x_1\sqrt{3}}$, les valeurs négatives de x ayant les mêmes valeurs absolues.

L'équation de la courbe est $y^2 = \frac{(3x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^3}$.

La courbe, facile à construire, est symétrique par rapport aux axes de coordonnées; et elle est comprise entre les deux droites $y = \pm 1$; elle touche ces droites pour $x = 0$ et pour $x = \pm\sqrt{3}$. Enfin elle touche doublement l'axe des x pour $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = \pm\infty$.

ÉPREUVE PRATIQUE.

Dans un plan vertical un point matériel de poids P *se meut sans frottement sur une cycloïde concave vers le haut et dont la tangente en un sommet est horizontale.*

En admettant que l'on prenne pour axes de coordonnées la tangente et la normale au sommet et que l'on puisse définir la courbe par l'équation $y = \frac{s^2}{8R}$, *où* R *est une longueur donnée, y l'ordonnée et s l'arc de courbe compté à partir du sommet.*

On demande :

1° *la composante tangentielle du poids;*

2° *l'accélération tangentielle que l'on représentera par* $-\omega^2 s$;

3° *l'expression de l'arc s en fonction du temps t;*

4° *la période et la fréquence.*

SOLUTION.

La composante tangentielle est

$$T = P \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{P}{4R} s.$$

On a

$$m = \frac{p}{g}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{4R} s = -\omega^2 s,$$

et, par suite,

$$s = s_0 \sin\omega t \qquad \text{et} \qquad v = \omega s_0 \cos\omega t$$

La période du mouvement oscillatoire est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence est $N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.