NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. MICHEL

Développantes et développées aréolaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 449-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__449_0>

[$O^1 2a$]

DÉVELOPPANTES ET DÉVELOPPÉES ARÉOLAIRES;

PAR M. CH. MICHEL.

1. Soient dans un plan orienté un point fixe O et une courbe C décrite par un point variable M. A étant un point choisi sur la courbe C, on sait définir en grandeur et en signe l'aire S comprise entre le rayon initial OA, le rayon final OM et l'arc AM de la courbe C. Sur la tangente en M à la courbe C il existe un point P et un seul tel que l'aire triangulaire comprise entre le rayon initial OP, le rayon final OM et le segment rectiligne PM soit égale, en grandeur et en signe, à S. Quand M varie sur la courbe C, le point P décrit dans le plan une courbe Γ que nous désignerons sous le nom de *développante aréolaire* de la courbe C, par rapport au point O.

Cette développante aréolaire dépend du choix du point A. Si l'on remplace A par un autre point fixe A′ de la courbe C, le point variable P est remplacé par un point P′ tel que l'aire comprise entre le rayon initial OP′, le rayon final OP et le segment rectiligne P′P soit constante et égale à l'aire comprise entre le rayon initial OA′, le rayon final OA et l'arc A′A de la courbe C. La courbe C a ainsi une infinité de développantes aréolaires par rapport au point O, dépendant d'un paramètre arbitraire.

2. Rapportons le plan à deux axes Ox et Oy. Soient x et y les coordonnées du point M, X et Y

celles du point P. On a les relations

$$(1) \qquad (Y-y)\,dx = (X-x)\,dy,$$

$$(2) \qquad \int_A^M x\,dy - y\,dx = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X & Y & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = yX - xY,$$

qui permettent de calculer les coordonnées de P quand on connaît celles de M.

Différentions la seconde de ces relations. Il vient

$$x\,dy - y\,dx = X\,dy - Y\,dx + y\,dX - x\,dY,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la première,

$$y\,dX - x\,dY = 0.$$

On a ainsi le théorème suivant :

La tangente en P *à la courbe* Γ *est parallèle à la droite* OM.

La courbe Γ passe évidemment par le point A. Montrons que ce point est de rebroussement sur la courbe Γ. En effet, différentions la relation (1). Il vient

$$(Y-y)\,d^2x - (X-x)\,d^2y + dY\,dx - dX\,dy = 0.$$

Quand M et P sont en A, $X = x$, $Y = y$, et la relation précédente devient

$$dY\,dx - dX\,dy = 0.$$

Mais on a, d'autre part,

$$x\,dY - y\,dX = 0.$$

On a ainsi deux équations linéaires et homogènes en dX et dY ; le déterminant des coefficients de dY et de dX est égal à $x\,dy - y\,dx$ et il n'est nul que dans le cas exceptionnel, que nous écarterons, où la tangente en A à la courbe C passe par le point O. Il en résulte que dX et dY sont simultanément nuls au point A ; le point A est donc bien de rebroussement sur la courbe C.

On a en général

$$y\,dX - x\,dY = 0;$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$dy\,dX - dx\,dY + y\,d^2X - x\,d^2Y = 0.$$

Quand M et P sont en A, dX et dY étant nuls, cette relation devient

$$y\,d^2X - x\,d^2Y = 0.$$

Elle exprime que la *tangente de rebroussement en* A *est la droite* OA.

3. Soient le point O et une courbe C décrite par le variable M. Au point M faisons correspondre un point P situé sur la tangente en M à la courbe C. Nous allons montrer que, *si la tangente en* P *à la courbe* Γ *décrite par ce point est constamment parallèle à la droite* OM, *la courbe* Γ *est une développante aréolaire de la courbe* C *par rapport à* O.

En effet, en reprenant les notations précédentes, on a

$$(Y - y)\,dx = (X - x)\,dy,$$

c'est-à-dire

$$x\,dy - y\,dx = X\,dy - Y\,dx,$$

puis

$$0 = y\,dX - x\,dY.$$

En ajoutant membre à membre, on obtient

$$x\,dy - y\,dx = X\,dy - Y\,dx + y\,dX - x\,dY,$$

d'où, en intégrant,

$$\int x\,dy - y\,dx = y\mathrm{X} - x\mathrm{Y} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix},$$

ce qui démontre le théorème.

4. Soient le point O et une courbe Γ décrite par un point variable P. Proposons-nous de déterminer une courbe C décrite par un point variable M, telle que la courbe Γ en soit une développante aréolaire par rapport au point O. Nous dirons qu'une telle courbe C est une *développée aréolaire* de la courbe Γ par rapport au point O. Nous allons montrer qu'une courbe Γ admet une infinité de développées aréolaires par rapport au point O, dépendant d'un paramètre arbitraire.

Pour déterminer une courbe C, calculons l'abscisse x du point M en fonction des coordonnées du point P. Pour cela, éliminons y entre les relations (1) et (2). De la relation (2) on déduit, comme nous l'avons vu, la relation

$$y = x\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}.$$

En la différentiant par rapport à X, on obtient

$$\frac{dy}{d\mathrm{X}} = \frac{dx}{d\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + x\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}.$$

Portons les valeurs obtenues de y et de dy dans la relation (1). Il vient ainsi

$$\frac{dx}{d\mathrm{X}}\left(\mathrm{Y} - x\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right) = (\mathrm{X} - x)\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + x\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{d\mathrm{X}}\left(\mathrm{Y} - \mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right) = x(\mathrm{X} - x)\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}.$$

On obtient ainsi une équation différentielle de Bernoulli, qui définit x comme fonction de la variable indépendante X. Cette équation est linéaire en $\frac{1}{x}$, et son intégrale générale est définie par une relation de la forme

$$\frac{1}{x} = \varphi(X) + \lambda\,\psi(X),$$

$\varphi(X)$ et $\psi(X)$ étant deux fonctions déterminées, λ étant un paramètre arbitraire. A chaque valeur de λ il correspond une développée aréolaire C de la courbe Γ par rapport à O.

Les points M des courbes C qui correspondent au même point P de la courbe Γ sont sur la parallèle menée par O à la tangente en P à la courbe Γ. Considérons trois développées aréolaires C_1, C_2, C_3 correspondant aux trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3 du paramètre λ. Soient sur ces trois courbes les points M_1, M_2, M_3, en ligne droite avec le point O, qui correspondent au même point P de la courbe Γ. Considérons le rapport anharmonique $(OM_1M_2M_3)$ des quatre points O, M_1, M_2, M_3. Si x_1, x_2, x_3 sont les abscisses des points M_1, M_2, M_3, on a

$$(OM_1M_2M_3) = (o\,x_1x_2x_3) = (\infty\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \text{const.}$$

Ainsi, *quel que soit le point* P *de la courbe* Γ, *le rapport anharmonique formé par le point* O *et les points de trois développées aréolaires de la courbe* Γ *qui correspondent au point* P *est constant.*

D'après ce théorème, si l'on connaît deux développées aréolaires de la courbe Γ, toutes les autres peuvent être déterminées sans quadratures, par une construction géométrique simple.

5. Deux développantes aréolaires Γ et Γ' d'une même

courbe C par rapport au point O sont telles que les tangentes en deux points correspondants P et P′ soient parallèles et que l'aire algébrique du triangle OP′P soit constante.

Soient le point O et une courbe Γ décrite par le point variable P. Proposons-nous de déterminer une courbe Γ′ décrite par le point variable P′ de façon que la tangente en P′ à Γ′ soit parallèle à la tangente en P à Γ et que l'aire algébrique du triangle OP′P soit constante.

Si X et Y sont les coordonnées de P, X′ et Y′ les coordonnées de P′, l'origine des coordonnées étant le point O, on doit avoir

$$\frac{dY'}{dX'} = \frac{dY}{dX},$$
$$X'Y - Y'X = k = \text{const.}$$

Éliminons Y′ entre ces deux relations. Dérivons la seconde par rapport à X. Il vient

$$Y\frac{dX'}{dX} + X'\frac{dY}{dX} - X\frac{dY'}{dX} - Y' = 0.$$

Portons dans cette nouvelle relation les valeurs de Y′ et de dY' tirées des deux premières. On obtient ainsi

$$\left(Y - X\frac{dY}{dX}\right)\frac{dX'}{dX} + \left(\frac{dY}{dX} - \frac{Y}{X}\right)X' + \frac{k}{X} = 0.$$

On a une équation différentielle linéaire, définissant X′ en fonction de la variable indépendante X. Cette équation a une intégrale générale de la forme

$$X' = f(X) + \mu\, g(X),$$

$f(X)$ et $g(X)$ étant des fonctions déterminées, μ étant un paramètre arbitraire. A chaque valeur de μ il correspond une courbe Γ′.

Nous allons établir le théorème suivant :

La droite PP′ *qui joint les points correspondants des courbes* Γ *et* Γ′ *touche son enveloppe en un point situé sur la parallèle menée par* O *aux tangentes en* P *et* P′ *aux courbes* Γ *et* Γ′.

Si ξ et η désignent les coordonnées d'un point courant sur la droite PP′, l'équation de cette droite est

$$\eta(X' - X) - \xi(Y' - Y) = X'Y - Y'X,$$

c'est-à-dire

$$\eta(X' - X) - \xi(Y' - Y) = k.$$

Le point de contact de cette droite avec son enveloppe est situé sur la droite qui a pour équation

$$\eta(dX' - dX) - \xi(dY' - dY) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{dY' - dY}{dX' - dX}.$$

Mais on a

$$\frac{dY'}{dX'} = \frac{dY}{dX} = \frac{dY' - dY}{dX' - dX}.$$

La droite considérée est donc la parallèle menée par O à la direction commune des tangentes en P et P′ aux courbes Γ et Γ′, ce qui démontre le théorème.

Il en résulte que l'enveloppe de la droite PP′ est une développée aréolaire C commune aux deux courbes Γ et Γ′. On voit ainsi que les diverses courbes Γ′ définies à partir de la courbe Γ correspondent aux diverses développées aréolaires C de la courbe Γ.