NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Remarques sur un article de M. Goormaghtigh

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 309-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__309_0>

[M¹5][M¹6h]

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE M. GOORMAGHTIGH;

Par M. F. BALITRAND.

Dans l'article dont il s'agit (1916, p. 241), M. Goormaghtigh a déduit des propriétés d'une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3) certaines propriétés d'une cardioïde (C), en passant par l'intermédiaire d'autres courbes, notamment du folium de Descartes. Cette déduction peut se faire directement, si l'on remarque que (H_3) peut être projetée, ou transformée homographiquement, suivant (C) et réciproquement.

Soient A, B, C les points de rebroussement d'une (H_3); M, N, P ses sommets; F son centre; I et J les points cycliques de son plan. Faisons une projection telle que B et C deviennent les points cycliques, b et c, du nouveau plan. (H_3) deviendra une cardioïde qui aura pour troisième point de rebroussement a, projection de A; pour foyer singulier triple f, projection de F; pour points de contact de sa tangente double, i et j, projections des points cycliques I et J.

Le cercle ABC se projettera suivant le cercle aij; c'est-à-dire suivant le cercle Γ'_1 de M. Goormaghtigh; le cercle MNP suivant l'hyperbole H'_1. On peut donc ajouter aux propriétés de cette dernière les suivantes :

Elle est bitangente au cercle Γ'_1 *aux points* i *et* j;
Elle est tritangente à la cardioïde.

Les points de contact avec cette courbe sont le sommet m et les points où elle est rencontrée par les droites isotropes issues de son foyer.

Cela posé, la transformation des propriétés fondamentales et classiques de (H_3) conduit pour (C) aux suivantes, qui complètent, pour une partie, celles qui ont été données par M. Goormaghtigh :

Une tangente à (C) *au point q, coupe la courbe en deux autres points r et s; les tangentes en ces points se rencontrent en t sur* H'_1 ;

Elles divisent harmoniquement le segment ij;

La tangente en t à H'_1 *et la troisième tangente à* (C), *issue de ce point, divisent harmoniquement le segment ij*;

Cette troisième tangente et la tangente rs se coupent sur H'_1 *et divisent harmoniquement le segment ij*;

Si la tangente rs varie, le conjugué harmonique du point où elle rencontre la droite ij, par rapport aux points r et s, décrit H'_1 ;

La droite tf passe par l'un des points de rencontre de rs avec H'_1.

Inversement, les propriétés de la cardioïde fournissent par la même transformation des propriétés correspondantes pour l'hypocycloïde. Par exemple, les propriétés relatives au lieu des sommets des angles droits circonscrits à (C) (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 216) fournissent les suivantes pour (H_3) :

Si, par un point de rebroussement A *d'une* (H_3), *on mène une droite qui coupe la courbe en* H *et* K, *les tangentes en ces points divisent harmoniquement le segment* BC *des deux autres points de rebroussement;*

Le point de concours L *des tangentes en* H *et* K *décrit une conique qui passe en* B *et* C, *où elle touche les tangentes de rebroussement, et en* M *où elle touche* (H_3);

Le conjugué harmonique, par rapport à H *et* K, *du point où la droite coupe* BC, *décrit une conique circonscrite à* ABC *et touchant en* B *et* C *les tangentes de rebroussement.*

La propriété fondamentale de la cardioïde d'être la podaire d'un cercle par rapport à un point de ce cercle donne, après transformation, la propriété suivante de l'hypocycloïde, peut-être nouvelle :

Si l'on joint un point variable O *d'une hypocycloïde à ses points de rebroussement, la droite conjuguée harmonique de* OA, *par exemple, par rapport à* OB *et* OC, *enveloppe une conique circonscrite à* ABC *et ayant pour sommets les points* A *et* M.

Les propriétés projectives de l'une et l'autre courbe, relatives à la courbure, se transforment aussi aisément. Il suffit pour cela d'observer que le cercle osculateur en un point de la cardioïde, par exemple, devient une conique ayant un contact du second ordre avec (H_3), au point correspondant, et passant en outre en B et C. Le point de rencontre des tangentes à la conique en ces points, correspond au centre du cercle osculateur. De plus, la conjuguée harmonique de la tangente au point de contact, par rapport aux droites qui le joignent à B et C, passe par ce point de rencontre. Il en résulte, d'après une propriété bien connue de (C), que *si l'on considère les coniques passant en* B *et* C *et ayant un contact du second ordre avec* (H_3), *le lieu du pôle de* BC, *par rapport à ces coniques, est une* *quartique de troisième classe ayant* B *et* C *pour points de rebroussement.*

On peut généraliser les propriétés précédentes, et les étendre à une quartique de troisième classe quelconque, en remarquant que la cardioïde, comme d'ailleurs l'hypocycloïde, peut, par une transformation homographique convenablement choisie, donner n'importe quelle quartique à trois rebroussements ([1]). Puis, par une transformation dualistique, arriver aux propositions correspondantes pour les courbes du troisième ordre et de quatrième classe, c'est-à-dire pour les cubiques unicursales.

Ainsi le théorème suivant : *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une* (H_3) *trois tangentes ayant leurs points de contact en ligne droite est le cercle* ABC, donne comme proposition corrélative : *L'enveloppe des droites qui coupent une cubique unicursale en trois points tels que les tangentes à la cubique en ces points concourent, est la conique inscrite au pentagone formé par les tangentes d'inflexion et les tangentes au point double.*

De même, la propriété fondamentale de (C) d'être la podaire d'un cercle par rapport à un de ses points, fournit pour les cubiques unicursales, le théorème suivant :

Soient A, B, C *les points d'inflexion d'une cubique unicursale et* α, β, γ *les tangentes en ces points; si l'on prend le conjugué harmonique du point où une tangente mobile à la cubique coupe* α, *par rapport aux points où elle coupe* β *et* γ, *le lieu de ce point est une conique inscrite au triangle des*

([1]) *Voir* Gomes Teixeira, *Courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 257, et t. II, p. 194.

tangentes d'inflexion et touchant la cubique au point de contact, avec cette courbe, de la tangente issue de A.

Quelque différents que soient en apparence les deux théorèmes précédents, ils ne résultent pas moins l'un de l'autre, au moyen de deux transformations homographiques suivies d'une transformation dualistique.