

G. FONTENÉ

**Sur la quantité**

$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)$

**envisagée dans l'espace**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 17  
(1917), p. 161-177

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1917\\_4\\_17\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__161_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[B12b, d]

**SUR LA QUANTITÉ  $(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)$   
ENVISAGÉE DANS L'ESPACE ;**

PAR M. G. FONTENÉ.

Je reviens aujourd'hui sur un sujet dont je me suis déjà occupé dans ce Journal. Mon intention est surtout de signaler ce qu'il y aurait à faire pour obtenir directement la propriété rappelée au n° 4 : *on pourrait trouver là l'origine d'un nouveau calcul vectoriel.* Je donne ici, faute de mieux, une démonstration par l'inversion qui a du moins le mérite d'être simple.

## I.

1. La notation  $(AB)$  désigne un vecteur, de sorte que l'on a

$$(AB) = (OB) - (OA).$$

De quelque façon que l'on définisse le produit  $(AB)(CD)$ , *si la multiplication est distributive*, la quantité

$$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB),$$

dans laquelle les quatre points jouent le même rôle, a pour expression, quand on prend D comme origine,

$$-[(DB)(DC) - (DC)(DB)] - \dots - \dots$$

*Si la multiplication est, en outre, commutative,*

on aura l'identité

$$(1) \quad (DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB) = 0.$$

2. Pour des points en ligne droite, il suffit de mesurer  $(AB)$  par une quantité algébrique  $\overline{AB}$ ; on a l'identité d'Euler. Pour un quadrangle plan, ou quatre points dans l'espace, on peut considérer *le produit scalaire* <sup>(1)</sup>

$$(AB)(CD) = AB \cdot CD \cos \widehat{AB, CD};$$

la multiplication étant alors distributive et commutative, on obtient l'identité connue

$$(2) \quad \Sigma DA \cdot BC \cos \widehat{DA, BC} = 0;$$

si deux des cosinus sont nuls, le troisième est nul. Cette identité peut d'ailleurs se déduire de la formule connue

$$(\overline{DB}^2 + \overline{CA}^2) - (\overline{DC}^2 + \overline{AB}^2) = -2 DA \cdot BC \cos \widehat{DA, BC}.$$

3. Pour quatre points dans un plan, on peut encore mesurer  $(AB)$  par une quantité imaginaire  $\overline{AB}$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  les arguments des *directions*  $BC, CA, AB, DA, DB, DC$ ; on a, par exemple,

$$\overline{BC} = BC(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

et l'identité fondamentale donne

$$DA \cdot BC [\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')] + \dots = 0.$$

(1) On donne souvent à ce produit le nom de *produit géométrique*: c'est un tort, et cette expression pourrait tout au plus être employée pour désigner le produit que nous appellerons par la suite *produit vectoriel*.

Les produits  $DA \cdot BC$ ,  $DB \cdot CA$ ,  $DC \cdot AB$  mesurent donc les côtés d'un triangle  $LMN$ , les directions  $MN$ ,  $NL$ ,  $LM$  ayant pour arguments

$$\alpha + \alpha', \quad \beta + \beta', \quad \gamma + \gamma'.$$

L'angle des directions  $NL$ ,  $LM$  (angle extérieur du triangle) a pour valeur, à  $4n^d$  près,

$$(\gamma' - \beta') + (\gamma - \beta) \quad \text{ou} \quad (\gamma - \beta') + (\gamma' - \beta),$$

c'est-à-dire

$$\widehat{DB, DC} + \widehat{CA, AB} \quad \text{ou} \quad \widehat{DB, AB} + \widehat{CA, DC};$$

en ajoutant  $2^d$ , on a donc pour l'angle intérieur du triangle, à  $4n^d$  près,

$$\widehat{LM, LN} = \widehat{DB, DC} + \widehat{AC, AB} = \widehat{BD, BA} + \widehat{CA, CD},$$

et la structure de ces deux sommes est facile à saisir : la première est construite avec  $D$  et  $A$  combinés avec  $B$  et  $C$  ou  $C$  et  $B$ , la seconde est construite avec  $B$  et  $C$  combinés avec  $D$  et  $A$  ou  $A$  et  $D$ . On a ainsi un théorème auquel on doit attacher le nom de Bellavitis, encore que l'illustre auteur n'ait explicité l'énoncé que dans des cas particuliers :

*Dans un quadrangle plan  $ABCD$ , les produits*

$$(3) \quad l = DA \cdot BC, \quad m = DB \cdot CA, \quad n = DC \cdot AB$$

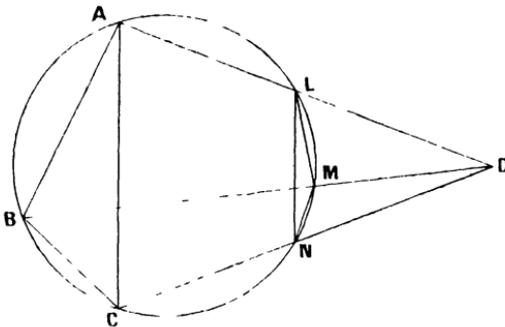
*sont proportionnels aux côtés d'un triangle  $LMN$  dont les angles ont pour valeurs, à des multiples près de quatre angles droits,*

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{LM, LN} = \widehat{DB, DC} + \widehat{AC, AB} = \widehat{BD, BA} + \widehat{CA, CD}, \\ \widehat{MN, ML} = \widehat{DC, DA} + \widehat{BA, BC} = \widehat{CD, CB} + \widehat{AB, AD}, \\ \widehat{NL, NM} = \widehat{DA, DB} + \widehat{CB, CA} = \widehat{AD, AC} + \widehat{BC, BD}. \end{array} \right.$$

Si le quadrangle est inscriptible, on a le théorème de Ptolémée.

Le théorème de Bellavitis s'obtient facilement pour un quadrangle plan ABCD en faisant une inversion de pôle D; si L, M, N (*fig. 1*) sont les inverses des

Fig. 1.



points A, B, C, on a en effet, la puissance d'inversion étant  $k^2$ ,

$$MN = k^2 \frac{BC}{DB \cdot DC} = \frac{k^2}{DA \cdot DB \cdot DC} \times DA \cdot BC, \dots,$$

et, pour les angles, les formules ci-dessus. Avec la figure donnée ici, on écrira de préférence

$$\widehat{LN}, \widehat{LM} = \widehat{AB}, \widehat{AC} - \widehat{DB}, \widehat{DC},$$

$$\widehat{ML}, \widehat{MN} = \widehat{BC}, \widehat{BA} - \widehat{DC}, \widehat{DA},$$

$$\widehat{NM}, \widehat{NL} = \widehat{CA}, \widehat{CB} - \widehat{DA}, \widehat{DB},$$

l'angle  $\widehat{DC}, \widehat{DA}$  étant seul négatif.

4. J'ai donné dans les *Nouvelles Annales* (1899, p. 407 et suiv.), l'analogue du théorème de Bellavitis dans le cas du tétraèdre.

L'angle résultant de deux angles  $(a, b)$  et  $(c, d)$  est l'angle  $(e, f)$  obtenu en amenant ces angles, par glissement dans leurs plans respectifs, le premier dans la position  $(e, \omega)$ , le second dans la position  $(\omega, f)$ ,  $\omega$  étant l'intersection des deux plans prise dans un sens arbitraire si l'on a égard seulement à la grandeur de l'angle  $(e, f)$ , et non à la direction de son plan comme dans la théorie des vecteurs. Les plans des deux angles étant orientés, si  $\omega$  est l'angle de ces deux plans, on a

$$\cos(e, f) = \cos(a, b) \cos(c, d) - \sin(a, b) \sin(c, d) \cos \omega;$$

si  $\omega$  est l'angle des demi-plans  $(\omega, e)$  et  $(\omega, f)$ , l'un des angles  $(a, b)$  et  $(c, d)$  est négatif. Nous écrivons

$$(e, f) = [(a, b) + (c, d)].$$

On a alors ce théorème :

*Dans un tétraèdre ABCD, les produits*

$$(5) \quad l = \text{DA} \cdot \text{BC}, \quad m = \text{DB} \cdot \text{CA}, \quad n = \text{DC} \cdot \text{AB}$$

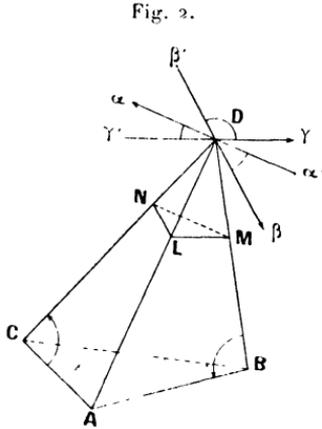
*sont proportionnels aux côtés d'un triangle LMN dont les angles ont pour valeurs, à des multiples près de quatre angles droits :*

$$(6) \quad \begin{cases} \text{L} = [(\text{DB}, \text{DC}) + (\text{AC}, \text{AB})] = [(\text{BD}, \text{BA}) + (\text{CA}, \text{CD})], \\ \text{M} = [(\text{DC}, \text{DA}) + (\text{BA}, \text{BC})] = [(\text{CD}, \text{CB}) + (\text{AB}, \text{AD})], \\ \text{N} = [(\text{DA}, \text{DB}) + (\text{CB}, \text{CA})] = [(\text{AD}, \text{AC}) + (\text{BC}, \text{BD})]. \end{cases}$$

*Si l'on pouvait définir le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace de façon que la multiplication fût distributive et commutative, c'est probablement ce théorème que l'on obtiendrait comme conséquence de l'identité*

$$(\text{DA})(\text{BC}) + (\text{DB})(\text{CA}) + (\text{DC})(\text{AB}) = 0.$$

5. Une inversion de pôle D permet de démontrer le théorème en question. Si une sphère passant en A, B, C coupe en L, M, N (fig. 2) les arêtes DA, DB, DC



DC du tétraèdre, comme les produits  $DA \cdot BC$ , ... sont proportionnels aux côtés du triangle LMN, il faut montrer que l'angle L, par exemple, est égal à l'angle résultant dont on a écrit ci-dessus la définition. On peut, pour cet objet, faire passer la sphère par le point D, et l'angle L sera remplacé par l'angle des tangentes menées en D aux deux cercles DAB, DAC, ces tangentes étant menées à partir de D du même côté de l'arête DA que les triangles DAB, DAC : l'angle  $(D\gamma, D\beta')$  de ces tangentes doit être égal à l'angle résultant.

Considérons la figure 2, dans laquelle les droites  $\alpha'\alpha$ ,  $\beta'\beta$ ,  $\gamma'\gamma$  sont les traces, sur le plan tangent en D à la sphère ABCD, des plans des faces du trièdre D. Soient les angles résultants

$$[(DB, DC) + (AC, AB)], \quad [(BD, BA) + (CA, CD)],$$

dont on ne sait pas *a priori* s'ils sont égaux. Pour

construire le second de ces angles résultants, l'intersection des deux plans DAB et DAC étant DA, on peut déplacer le point B sur l'arc de cercle ABD jusqu'à l'amener en D, déplacer le point C sur l'arc de cercle ACD jusqu'à l'amener aussi en D : l'angle (BD, BA) devient l'angle ( $D\gamma'$ , DA), l'angle (CA, CD) devient l'angle (DA,  $D\beta$ ), et l'angle résultant est ainsi l'angle ( $D\gamma'$ ,  $D\beta$ ), que l'on peut remplacer par l'angle opposé ( $D\gamma$ ,  $D\beta'$ ). C'est le fait que l'on voulait établir, du moins en prenant l'angle résultant sous la seconde forme. Les trois angles résultants qui figurent dans l'énoncé du théorème sont égaux aux angles

$$(D\gamma, D\beta'), (D\alpha, D\gamma'), (D\beta, D\alpha')$$

situés dans le plan tangent en D à la sphère ABCD.

On a considéré seulement le second des deux angles résultants écrits ci-dessus, et on l'a construit au point D, ce qui a donné l'angle des tangentes  $D\gamma$  et  $D\beta'$ ; on aurait pu le construire en A et il est clair que l'angle ainsi obtenu eût été égal à l'angle en D. Si l'on avait considéré le premier angle résultant, on l'aurait construit en B ou en C. Que cet angle résultant soit égal à l'autre, c'est ce qui résulte du fait que le théorème dont il s'agit peut se démontrer par une inversion de pôle B aussi bien que par une inversion de pôle D. Au surplus, la démonstration directe est facile. Si l'on envisage les quatre cercles DAB, DAC et BCD, BCA, une inversion de pôle D substituée à ces quatre cercles les droites LM, LN, et la droite MN avec le cercle LMN : l'angle des tangentes en A aux cercles DAB, DAC se transforme en l'angle égal (LM, LN); l'angle des tangentes en B aux cercles BCD, BCA, telles qu'on doit les mener, se transforme en l'angle que fait le prolongement de la droite NM avec la tangente en M au

cercle LMN prise en avant de MN; or, ce dernier angle, ou mieux son opposé, est égal à l'angle (LM, LN). Voici une vérification: lorsque, laissant fixes l'arête DA et les deux plans DAB, DAC, on amène B et C en D pour montrer que le second angle résultant est égal à l'angle des tangentes en D aux deux cercles DAB et DAC, le premier angle résultant se réduit également à l'angle de ces tangentes, puisque, en même temps que les directions DB et DC deviennent D $\gamma$  et D $\beta'$ , l'angle (AC, AB) devient nul.

## II.

6. On doit appeler *produit vectoriel* de deux vecteurs (AB) et (CD) un vecteur OH dont la longueur est mesurée par le même nombre que le produit

$$AB \cdot CD \sin \widehat{AB, CD},$$

et dont la direction est orthogonale aux deux vecteurs donnés; si, par un point quelconque O, on mène les vecteurs OB' et OD' équipollents aux vecteurs AB et CD, on peut dire encore que la longueur du vecteur-produit est mesurée par le même nombre que l'aire du triangle OB'D'; quant au sens de ce vecteur-produit OH, il est tel que pour l'observateur OH le sens de circulation OB'D' soit un sens déterminé.

Observons que, si l'on projette les deux vecteurs AB et CD sur un plan parallèle à chacun d'eux, en A'B' et C'D', le produit

$$AB \cdot CD \sin \widehat{AB, CD}$$

représente le double de l'aire du quadrilatère ACBD. Je rappelle que l'aire plane ABCDE...L, quelle que

soit la forme du contour ABCDE...L, est la somme des aires algébriques

$$\overline{OAB}, \overline{OBC}, \overline{OCD}, \dots, \overline{OLA},$$

le point O étant un point quelconque pris dans le plan de la figure (Voir *Géométrie dirigée*, librairie Nony, 1897.)

7. Avec le produit vectoriel, la multiplication est encore distributive; *elle n'est plus commutative*, le vecteur-produit changeant de sens quand on change l'ordre des deux facteurs. On a alors

$$ab - ba = 2ab,$$

et il arrive ceci :

1° *L'expression*

$$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)$$

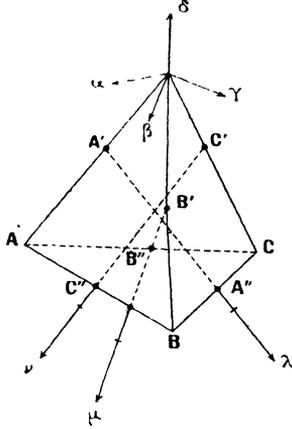
*n'est pas nulle;*

2° *Les quatre points A, B, C, D ne jouent pas le même rôle, et l'on aura à considérer quatre expressions de cette nature.*

8. Soit un tétraèdre ABCD. Le sens direct de rotation autour d'un axe étant *de gauche à droite*, nous supposons que le sens de circulation BCD est le sens *direct* pour un observateur qui a les pieds sur le plan BCD et la tête en A; le sens de circulation ACD (ordre alphabétique) est alors le sens *rétrograde* pour un observateur qui a les pieds sur le plan ACD et la tête en B; le sens de circulation ABD est *direct*..., le sens de circulation ABC est *rétrograde*.... Le nombre des points A, B, C, D étant pair, on aurait la même alternance de sens si l'on considérait, avec per-

mutation circulaire, BCD, CDA, DAB, ABC. On peut dire encore : le sens de circulation ABC étant rétro-

Fig. 3.



grade.... les sens de circulation DBC, DCA, DAB sont directs....

Nous aurons à considérer les expressions

- (1)  $(AB)(CD) + (AC)(DB) + (AD)(BC),$
- (2)  $-[(BA)(CD) + (BC)(DA) + (BD)(AC)],$
- (3)  $(CA)(BD) + (CB)(DA) + (CD)(AB),$
- (4)  $-[(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)],$

relatives aux quatre sommets A, B, C, D. Nous poserons, en écrivant ici  $\lambda$  pour  $(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned}\lambda &= - (DA)(BC), \\ \mu &= - (DB)(CA), \\ \nu &= - (DC)(AB); \end{aligned}$$

si  $A'A''$ ,  $B'B''$ ,  $C'C''$  sont les perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées du tétraèdre, les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  étant sur les arêtes issues de D, les

vecteurs  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont dirigés suivant ces droites, et orientés de  $A'$  vers  $A''$ , de  $B'$  vers  $B''$ , de  $C'$  vers  $C''$ , puisque le premier, par exemple, est le produit  $(AD)(BC)$ ; en désignant par  $V$  le volume du tétraèdre, les modules de ces vecteurs sont respectivement

$$\frac{6V}{A'A''}, \quad \frac{6V}{B'B''}, \quad \frac{6V}{C'C''}$$

Les expressions (1), ..., (4) sont alors, en changeant l'ordre des termes,

$$\begin{aligned} (1) & \quad \lambda, \quad -\mu, \quad -\nu, \\ (2) & \quad -\lambda, \quad +\mu, \quad -\nu, \\ (3) & \quad -\lambda, \quad -\mu, \quad +\nu, \\ (4) & \quad \lambda, \quad +\mu, \quad +\nu; \end{aligned}$$

sur les arêtes issues de  $A$ , par exemple, se trouvent les points  $A'$ ,  $B''$ ,  $C''$ , et l'on considère dans l'expression (1) la somme de vecteurs orientés de  $A'$  vers  $A''$ , de  $B''$  vers  $B'$ , de  $C''$  vers  $C'$ , de même que, dans l'expression (4), on considère la somme de vecteurs orientés de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  vers  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ .

9. Nous allons rattacher les vecteurs  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , liés aux trois couples d'arêtes opposées, à d'autres vecteurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , liés aux quatre faces du tétraèdre. Nous désignerons par  $\alpha$  un vecteur perpendiculaire au plan  $BCD$ , orienté comme l'indique la figure, c'est-à-dire vers la région où est  $A$ , et dont le module est le double de l'aire du triangle  $BCD$ ; on aura de même les vecteurs  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . Les modules de ces vecteurs sont respectivement

$$\frac{6V}{h_1}, \quad \frac{6V}{h_2}, \quad \dots$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\alpha &= (\text{DBC}) = (\text{DB})(\text{DC}) = (\text{BC})(\text{BD}) = (\text{CD})(\text{CB}), \\ \beta &= (\text{DCA}) = (\text{DC})(\text{DA}) = (\text{CA})(\text{CD}) = (\text{AD})(\text{AC}), \\ \gamma &= (\text{DAB}) = (\text{DA})(\text{DB}) = (\text{AB})(\text{AD}) = (\text{BD})(\text{BA}), \\ -\delta &= (\text{ABC}) = (\text{AB})(\text{AC}) = (\text{BC})(\text{BA}) = (\text{CA})(\text{CD}).\end{aligned}$$

On a alors

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda = \beta + \gamma = -(\delta + \alpha), \\ \mu = \gamma + \alpha = -(\delta + \beta), \\ \nu = \alpha + \beta = -(\delta + \gamma), \end{cases}$$

ce qui forme seulement quatre relations distinctes, dont l'une est la relation bien connue

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

En effet, si l'on prend D comme origine, on a

$$\begin{aligned}-(\text{DA})(\text{BC}) &= -(\text{DA})[(\text{DC}) - (\text{DB})] \\ &= (\text{DC})(\text{DA}) + (\text{DA})(\text{DB});\end{aligned}$$

en prenant B comme origine, on a de même

$$\begin{aligned}-(\text{DA})(\text{BC}) &= -[(\text{BA}) - (\text{BD})](\text{BC}) \\ &= -[(\text{BA})(\text{BC}) + (\text{BC})(\text{BD})].\end{aligned}$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned}(\text{BC})(\text{DA}) &= (\text{BD})(\text{BA}) + (\text{CA})(\text{CD}), \\ (\text{DA})(\text{BC}) &= (\text{DB})(\text{DC}) + (\text{AC})(\text{AB}),\end{aligned}$$

le mécanisme de ces égalités apparaît nettement.

Des relations ci-dessus on déduit le système équivalent

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = -2\delta, \\ \lambda - \mu - \nu = -2\alpha, \\ -\lambda + \mu - \nu = -2\beta, \\ -\lambda - \mu + \nu = -2\gamma, \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned}
& - [(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)] = - 2\delta, \\
& (AB)(CD) + (AC)(DB) + (AD)(BC) = - 2\alpha, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Trois vecteurs  $\lambda, \mu, \nu$ , dirigés suivant  $A'A'', B'B'', C'C''$ , orientés de  $A'$  vers  $A''$ , ..., et ayant pour longueurs

$$\frac{k^2}{A'A''}, \quad \frac{k^2}{B'B''}, \quad \frac{k^2}{C'C''},$$

ont pour somme le vecteur  $- 2\delta$ , dirigé suivant la hauteur issue de  $D$ , orienté de  $D$  vers le plan  $ABC$ , et ayant pour longueur  $2\frac{k^2}{h_d}$ . Si l'on change le sens des deux derniers vecteurs, on a pour somme  $- 2\alpha$ ; etc.

10. On arrive directement à ce résultat en écrivant

$$\begin{aligned}
- [(DA)(BC) + \dots + \dots] &= (DA)[(DB) - (DC)] + \dots + \dots \\
&= (DB)(DC) - (DC)(DB) + \dots + \dots \\
&= 2[(DB)(DC) + \dots + \dots],
\end{aligned}$$

ou

$$\lambda + \mu + \nu = 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Si l'on ne veut pas supposer connue la relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

qui est un cas particulier d'une relation générale relative à un polyèdre quelconque, on peut établir comme il suit l'égalité  $\alpha + \beta + \gamma = - \delta$ . L'expression

$$- [(DA)(BC) + \dots + \dots]$$

a une valeur indépendante de la position du point  $D$ , comme on le voit en évaluant les trois vecteurs  $(DA)$ ,  $(DB)$ ,  $(DC)$  par rapport à une origine quelconque  $D'$ ;

il en est donc de même de l'expression

$$(DB)(DC) + \dots + \dots,$$

et l'on peut l'évaluer en remplaçant le point D par un point D' du plan ABC; on voit alors qu'elle a pour valeur  $-\delta$ .

J'ai proposé la démonstration de l'égalité

$$\lambda + \mu + \nu = -2\delta$$

dans les *Nouvelles Annales*, en 1898; la solution précédente a été donnée en 1900, page 379, en supposant connue la relation  $\alpha + \beta + \gamma = -\delta$ .

II. Les relations (5) peuvent être établies d'une manière qui en rend mieux compte que le procédé employé ci-dessus. Les vecteurs  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\lambda$  sont tous trois perpendiculaires à l'arête DA; transportons les vecteurs  $\beta$  et  $\gamma$  en A', et soient  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  les deux vecteurs ainsi obtenus. Le vecteur  $\beta_1$ , perpendiculaire au plan DAC, et dont le module est égal au double de l'aire du triangle DAC, est la résultante de deux vecteurs rectangulaires, l'un dirigé suivant A'A'', l'autre perpendiculaire au plan DAA''; le vecteur  $\gamma_1$  est de même la résultante de deux vecteurs, l'un dirigé suivant A'A'', l'autre perpendiculaire au plan DAA''. Les deux vecteurs perpendiculaires au plan DAA'' sont de sens contraires et ont des modules égaux : ces modules sont, en effet, les doubles des aires des deux triangles obtenus en projetant les triangles DAC et DAB sur le plan DAA'', et ces deux triangles, de base DA, ont même hauteur puisque la projection de l'arête BC sur le plan DAA'' est perpendiculaire à A'A'', donc parallèle à DA. Restent donc les composantes des deux vecteurs  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  suivant A'A''. Les modules de ces vecteurs

sont les doubles des aires des triangles obtenus en projetant les deux triangles DAB, DAC sur le plan mené par DA perpendiculairement à A'A'' : la somme des aires des triangles ainsi obtenus, ou l'aire du quadrilatère DCAB, est précisément la moitié du module du vecteur λ. On a donc bien λ = β + γ.

III.

12. Dans la théorie des quaternions, l'élément fondamental est l'ensemble d'un nombre *d* et d'un vecteur; j'ai proposé (*Enseignement mathématique*) de donner à cet élément le nom de *scal-vecteur*.

Le produit de deux scal-vecteurs est un scal-vecteur. En particulier, *le produit de deux vecteurs est un scal-vecteur* dont la partie scalaire est le produit scalaire changé de signe, dont la partie vectorielle est le produit vectoriel; cela résulte de la formule

$$(a_i + b_j + c_k)(a'_i + b'_j + c'_k) = -(aa' + bb' + cc') + (bc' - cb')i + \dots + \dots$$

Quand on change l'ordre des facteurs, pour le produit de deux vecteurs, la partie scalaire ne change pas, la partie vectorielle change de signe. On a donc

$$(AB)(CD) - (CD)(AB) = 2 \times \text{partie vectorielle de } (AB)(CD),$$

sans partie scalaire. Si l'on écrit alors

$$-[(DA)(BC) + \dots + \dots] = (DB)(DC) - (DC)(DB) + \dots + \dots,$$

la partie scalaire est nulle; on réunit ainsi, *sans aucun avantage d'ailleurs*, la démonstration de la formule scalaire

$$\sum DA \cdot BC \cos \widehat{DA, BC} = 0,$$

et la démonstration de la formule vectorielle

$$\lambda + \mu + \nu = -2\delta.$$

Il est procédé ainsi dans la solution citée à la fin du n° 10.

13. En géométrie plane, avec deux axes  $Ox$ ,  $Oy$  tracés dans le plan, et un axe  $Oz$  perpendiculaire au plan, un vecteur a pour symbole  $a_i + b_j$ ; on a alors, pour deux vecteurs  $AB$  et  $CD$ ,

$$(a_i + b_j)(a'_i + b'_j) = -(aa' + bb') + (ab' - ba')k,$$

ou

$$\begin{aligned} (AB)(CD) &= -AB \cdot CD \cos \widehat{AB, CD} \\ &+ AB \cdot CD \sin \widehat{AB, CD} \times k. \end{aligned}$$

*Ce produit complet, qui est un scal-vecteur, est fort différent du produit complexe*

$$\begin{aligned} AB(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times CD(\cos \beta + i \sin \beta) \\ = AB \cdot CD [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)], \end{aligned}$$

*et c'est, je le répète, l'analogie de ce dernier produit qu'il faudrait définir pour déduire d'une identité de la forme*

$$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB) = 0$$

*le théorème du n° 4 qui est l'extension à l'espace du théorème de Bellavitis.*

14. Je ferai, en terminant, la remarque suivante. Le quotient de deux scal-vecteurs est défini par la relation

$$\text{diviseur} \times \text{quotient} = \text{dividende.}$$

On peut représenter un scal-vecteur par le quotient

de deux vecteurs, et cette représentation donne une règle simple pour le produit de deux scal-vecteurs; on a, en effet,

$$\frac{(OC)}{(OA)} \cdot \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{(OC)}{(OB)} \quad \text{ou} \quad \frac{(OB)}{(OA)} \times \frac{(OC)}{(OB)} = \frac{(OC)}{(OA)}.$$