

V. THÉBAULT

Sur une curieuse figure relative au triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 289-305

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K'2e]

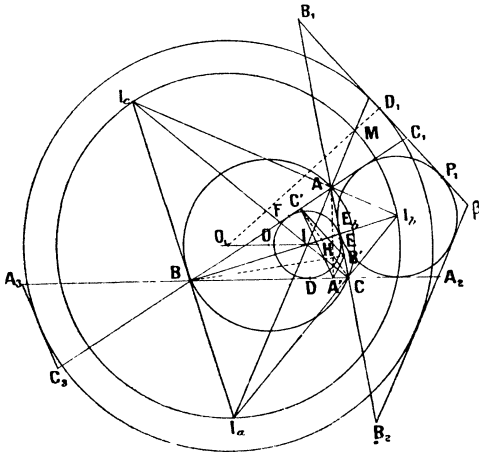
SUR UNE CURIEUSE FIGURE RELATIVE AU TRIANGLE ;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

Dans ce qui va suivre nous considérerons un triangle ABC dont les côtés sont

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c :$$

les hauteurs AA', BB', CC' ; O, I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits de rayons



respectifs R, r, r_a, r_b, r_c ; $D, E, F, D_a, E_a, F_a, D_b, E_b, F_b, D_c, E_c, F_c$ les contacts de ces cercles avec BC, CA, AB respectivement; H l'orthocentre (voir la figure).

1. Sur les prolongements des côtés du triangle ABC, marquons, *extérieurement* au triangle, les segments

$$\begin{array}{lll} AB_1 = BA, & AC_1 = CA, & CB_2 = BC, \\ CA_2 = AC, & BC_3 = CB, & BA_3 = AB. \end{array}$$

Nous obtenons ainsi un hexagone $B_1C_1A_2B_2C_3A_3$ qui nous paraît intéressant.

Les triangles B_1AC_1 , A_2CB_2 , A_3BC_3 sont respectivement *symétriques* du triangle ABC par rapport aux bissectrices extérieures des angles de ce dernier triangle. Les droites B_1C_1 , A_2B_2 , A_3C_3 , antiparallèles des côtés BC, AB, CA par rapport aux angles A, C, B respectivement sont donc les secondes tangentes communes extérieures aux cercles exinscrits I_b et I_c , I_b et I_a , I_a et I_c . D'où cette première propriété :

Les côtés d'un triangle ABC prolongés découpent respectivement sur les tangentes communes extérieures aux cercles exinscrits au triangle des segments égaux aux côtés de ce triangle.

Considérons le triangle AB_1C_1 par exemple. La bissectrice intérieure IA de ABC contient aussi le centre M du cercle inscrit à AB_1C_1 . Comme $AM = IA$ et que le point I est l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$, M est un point du cercle O_1 circonscrit à $I_aI_bI_c$, cercle homothétique du cercle O circonscrit à ABC, le centre d'homothétie étant I et le rapport

$$\frac{IA}{IM} = \frac{1}{2}.$$

Soit alors D_1 le contact du cercle inscrit M avec B_1C_1 ; D_1I_1 passe en O_1 et

$$O_1D_1 = O_1M + MD_1 = 2R + r.$$

De même

$$O_1E_1 = O_1F_1 = 2R + r = O_1D_1,$$

et l'on a ce résultat remarquable :

Le triangle $\alpha\beta\gamma$, formé par les droites B_1C_1 , A_2B_2 , C_3A_3 , c'est-à-dire par les tangentes communes extérieures aux cercles exinscrits I_b et I_c , I_a et I_b , I_a et I_c du triangle ABC, qui est directement homothétique au triangle orthique $A'B'C'$, est circonscrit à un cercle de centre O_1 et de rayon

$$2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$

Les angles du triangle $\alpha\beta\gamma$, respectivement égaux à ceux du triangle orthique $A'B'C'$, sont

$$\pi - 2A, \quad \pi - 2B, \quad \pi - 2C.$$

Par suite les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ font respectivement avec BC, CA, AB trois angles

$$(C - B), \quad (C - A), \quad (A - B),$$

Le triangle βB_1B_2 , par exemple, est isocèle et le milieu de la base B_1B_2 est le contact E_b du cercle exinscrit I_b avec CA, car

$$B_1E_b = c + p - c = p = \frac{B_1B_2}{2}.$$

βE_b est donc bissectrice intérieure du triangle $\alpha\beta\gamma$, de même que αD_a et γF_c et le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ est O_1 .

Le triangle rectangle $\beta O_1 D$, donne immédiatement

$$\begin{aligned} O_1D_1 &= O_1b \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \\ &= O_1\beta \cos B \\ &= O_1I_b + I_b\beta) \cos B \\ &= 2R \cos B + r_b \\ &= 2R(1 - \cos B) + r_b - r + 2R + r = 2R + r. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une vérification trigonométrique de la propriété précédente.

Soient P_1 et Q_1 les contacts du côté $\beta\gamma$ avec les cercles I_b et I_c . Ces deux cercles étant aussi exinscrits au triangle AB_1C_1 ,

$$P_1C_1 = p - a, \quad B_1Q_1 = p - a$$

et

$$P_1Q_1 = P_1C_1 + C_1B_1 + B_1Q_1 = b + c.$$

De même

$$P_2Q_2 = a + b, \quad P_3Q_3 = a + c;$$

et :

Les segments compris entre les contacts des tangentes communes extérieures aux cercles I_b et I_c , I_c et I_a , I_a et I_b sont respectivement égaux à la somme des deux côtés correspondants du triangle ABC.

On en déduit que l'on peut toujours construire un triangle θ avec les droites P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 .

Par rapport aux éléments de ABC, ce triangle a pour périmètre

$$2(a + b + c) = 4p;$$

pour surface

$$S = \sqrt{2pabc} = \sqrt{abc(a + b + c)}.$$

Le cercle inscrit a pour rayon

$$\rho^2 = 2Rr = R^2 - \overline{OI}^2.$$

Ce rayon n'est autre que la perpendiculaire $O\omega$ à OI en I et limitée au cercle circonscrit O au triangle ABC. Le cercle inscrit à ce triangle θ détermine sur les côtés des segments égaux aux côtés a , b , c du triangle ABC.

Le rapport d'homothétie du triangle $\alpha\beta\gamma$ et du

(293)

triangle orthique $A'B'C'$ de ABC est

$$\frac{2R + r}{2R \cos A \cos B \cos C},$$

$2R \cos A \cos B \cos C$ étant en effet le rayon du cercle inscrit à $A'B'C'$ en fonction des éléments de ABC .

En désignant par a_1, b_1, c_1 les côtés de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, on a

$$a_1 = B'C' \frac{2R + r}{2R \cos A \cos B \cos C} = \frac{(2R + r) \sin A}{\cos B \cos C},$$

de même

$$b_1 = \frac{(2R + r) \sin B}{\cos A \cos C}, \quad c_1 = \frac{(2R + r) \sin C}{\cos A \cos B}.$$

On tire de là le demi-périmètre p_1 , la surface S_1 et le rayon R_1 du cercle circonscrit, de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$:

$$p_1 = (2R + r) \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$S_1 = (2R + r)^2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$R_1 = \frac{2R + r}{4 \cos A \cos B \cos C}.$$

Comme d'autre part α_1 peut s'écrire

$$\alpha_1 = r_b \operatorname{tang} B + r_c \operatorname{tang} C + b + c,$$

ou

$$\alpha_1 = r_1 (\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C),$$

et que

$$r_b = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$r_c = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

il résulte que

$$r_1 = R(1 + \cos A + \cos B + \cos C) = R \left(1 + \frac{R}{r} \right).$$

D'où une troisième façon d'obtenir ce rayon r_1 du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ (1).

2. Les symétriques des points B_1 et C_1 , A_2 et B_2 , C_3 et A_3 par rapport aux sommets A , B , C déterminent aussi un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ dont les côtés sont respectivement antiparallèles de ceux du triangle ABC dans les angles A , B , C . Ces côtés de $\alpha'\beta'\gamma'$ sont les tangentes communes intérieures aux groupes de cercles I et I_a , I et I_b , I et I_c . Ces tangentes sont les symétriques des côtés BC , CA , AB par rapport aux bissectrices intérieures des angles du triangle ABC .

Par conséquent :

Les tangentes communes intérieures aux cercles I et I_a , I et I_b , I et I_c forment un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ inversement homothétique aux triangles $\alpha\beta\gamma$ et $A'B'C'$ et découpent sur les côtés du triangle ABC des segments respectivement égaux aux côtés de ce triangle ABC .

Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ a pour cercle inscrit le cercle I

(1) Ces formules ont été signalées déjà, dans *Mathesis* notamment, 1911, p. 208-209, par MM. Neuberg et Déprez à propos d'une communication de M. Hayashi, professeur au Collège des Sciences près de l'Université de Tokio : *Sur un théorème japonais*. Nous renvoyons à cet intéressant article les lecteurs que pourrait intéresser l'histoire de la question que proposa dans *Mathesis*, en 1896, p. 197, M. Neuberg :

Soient O , I , I_a , I_b , I_c les centres du cercle circonscrit et des cercles inscrits et exinscrits à un triangle ABC , et soient R , r , r_a , r_b , r_c les rayons de ces cercles. Les quatrièmes tangentes communes à deux des cercles I_a , I_b , I_c forment un triangle $A_1B_1C_1$. Démontrer que le cercle inscrit à $A_1B_1C_1$ a même centre que le cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ et qu'il a pour rayon

$$r_1 = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$

(295)

inscrit au triangle ABC. Ses angles sont encore

$$\pi - 2A, \quad \pi - 2B, \quad \pi - 2C,$$

et les côtés font respectivement avec BC, CA, AB les angles

$$(C - B), \quad (C - A), \quad (A - B).$$

Si P'_1 et Q'_1 , P'_2 et Q'_2 , P'_3 et Q'_3 désignent les contacts des côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ avec I et I_b , I et I_a , I et I_c respectivement,

$$P'_1 Q'_1 = a - c, \quad P'_2 Q'_2 = a - b, \quad P'_3 Q'_3 = b - c$$

et :

Les segments compris entre les contacts des tangentes communes intérieures aux cercles I et I_a , I et I_b , I et I_c sont respectivement égaux aux différences des deux côtés correspondants du triangle ABC.

Le rapport d'homothétie des triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $A'B'C'$ est

$$\frac{r}{2R \cos A \cos B \cos C}.$$

En désignant par a'_1 , b'_1 , c'_1 les côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$, on a

$$a'_1 = \frac{r \sin A}{\cos B \cos C}, \quad b'_1 = \frac{r \sin B}{\cos A \cos C}, \quad c'_1 = \frac{r \sin C}{\cos A \cos B}.$$

Il en résulte immédiatement le périmètre p'_1 , la surface S'_1 et le rayon R'_1 du cercle circonscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$:

$$p'_1 = r \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$S'_1 = r^2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

$$R'_1 = \frac{r}{4 \cos A \cos B \cos C}.$$

En se reportant aux formules du précédent para-

(296)

graphe, on obtient par exemple

$$\alpha_1 - \alpha'_1 = \frac{2R \sin A}{\cos B \cos C},$$

d'où

$$\begin{aligned} \Sigma(\alpha_1 - \alpha'_1) &= R \left(\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\cos A \cos B \cos C} \right) \\ &= 4R \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma(\alpha_1 + \alpha'_1) &= 4(R + r) \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C \\ &= 2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C (a \cot A + b \cot B + c \cot C). \end{aligned}$$

3. Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ homothétiques à $A'B'C'$ sont inversement homothétiques entre eux. Le centre d'homothétie L_1 est un point situé sur IO_1 , entre I et O_1 , et tel que

$$\frac{L_1 O_1}{L_1 I} = \frac{2R + r}{r},$$

d'où

$$\frac{IO_1}{L_1 I} = \frac{2(R + r)}{r} = \frac{2R - r_a - r}{x_1 - r},$$

x_1 étant la distance de L_1 à BC .

On déduit

$$x_1 = \frac{r(r_b + r_c)}{2(R - r)}, \quad y_1 = \frac{r(r_a + r_c)}{2(R + r)}, \quad z_1 = \frac{r(r_a + r_b)}{2(R + r)},$$

y_1 et z_1 étant les distances de L_1 à CA et AB .

Les coordonnées normales de L_1 par rapport au triangle ABC sont donc

$$r_c + r_b, \quad r_b + r_c, \quad r_a + r_c.$$

ou

$$\cos^2 \frac{A}{2}, \quad \cos^2 \frac{B}{2}, \quad \cos^2 \frac{C}{2},$$

ou encore

$$1 + \cos A, \quad 1 + \cos B, \quad 1 + \cos C.$$

Nous reviendrons sur ce point tout à l'heure.

4. Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent respectivement le cercle O_1 circonscrit à $I_a I_b I_c$ en M, N, P. Les tangentes en ces points au cercle O_1 déterminent le triangle *tangentiel* T du triangle MNP. Ce triangle T est inversement homothétique du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$. Le centre d'homothétie L'_2 est un point de IO_1 tel que

$$\frac{L'_2 I}{L'_2 O_1} = \frac{r}{2R}.$$

Les distances x'_2, y'_2, z'_2 de ce point aux côtés du triangle ABC sont

$$x'_2 = \frac{r(4R - r_a)}{2R + r}, \quad y'_2 = \frac{r(4R - r_b)}{2R + r}, \quad z'_2 = \frac{r(4R - r_c)}{2R + r}.$$

L'_2 a pour conjugué harmonique par rapport à I et O_1 un point L_2 , centre de similitude externe des cercles I et O_1 circonscrit à $I_a I_b I_c$, que nous allons déterminer par ses coordonnées normales par rapport à ABC.

Cherchons l'intersection L_2 des droites $I_a D$ et $I_b E$.

Les coordonnées normales des points D, E, F sont

$$\begin{aligned} 0, \quad \cos^2 \frac{C}{2}, \quad \cos^2 \frac{B}{2}; \quad \cos^2 \frac{C}{2}, \quad 0, \quad \cos^2 \frac{A}{2}, \\ \cos^2 \frac{B}{2}, \quad \cos^2 \frac{A}{2}, \quad 0, \end{aligned}$$

celles de I_a, I_b, I_c sont

$$(-1, 1, 1), \quad (1, -1, 1), \quad (1, 1, -1).$$

Les équations des droites $I_a D, I_b E$ sont donc

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \cos^2 \frac{C}{2} & \cos^2 \frac{B}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| &= 0, \\ \left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \cos^2 \frac{C}{2} & 0 & \cos^2 \frac{A}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| &= 0. \end{aligned}$$

ou

$$\alpha \left(\cos^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{B}{2} \right) - \beta \cos^2 \frac{B}{2} + \gamma \cos^2 \frac{C}{2} = 0,$$

$$\alpha \cos^2 \frac{A}{2} + \beta \left(\cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} \right) - \gamma \cos^2 \frac{C}{2} = 0.$$

Les coordonnées normales de L_2 sont donc proportionnelles aux déterminants tirés de la matrice

$$\begin{vmatrix} \cos^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{B}{2} & -\cos^2 \frac{B}{2} & \cos^2 \frac{C}{2} \\ \cos^2 \frac{A}{2} & \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} & -\cos^2 \frac{C}{2} \end{vmatrix},$$

ou, après suppression d'un facteur $\cos^2 \frac{C}{2}$, aux quantités

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A}{2},$$

$$\cos^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{B}{2},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2},$$

ou

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2},$$

ou enfin

$$\cdot \operatorname{tang} \frac{A}{2}, \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \operatorname{tang} \frac{C}{2}.$$

Ce sont ces coordonnées auxquelles nous sommes arrivé géométriquement dans notre *Mémoire* : *Sur quatre triangles homothétiques (Nouvelles Annales, mai 1915, p. 193)*, en obtenant les distances x_2, y_2, z_2

de L_2 aux côtés BC, CA, AB :

$$x_2 = \frac{rr_a}{2R-r}, \quad y_2 = \frac{rr_b}{2R-r}, \quad z_2 = \frac{rr_c}{2R-r}.$$

Nous devons ici ajouter une curieuse propriété de ce point.

Il est l'inverse triangulaire, par rapport au triangle ABC, du point de Lemoine K' du triangle $I_a I_b I_c$.

K' a en effet pour coordonnées normales, par rapport au triangle ABC,

$$\cot \frac{A}{2}, \quad \cot \frac{B}{2}, \quad \cot \frac{C}{2} \quad (1).$$

Cette remarque donne quelques propriétés du point de Lemoine d'un triangle.

L_2 est à l'intersection des trois droites $I_a D$, $I_b E$, $I_c F$. Il est de plus le point de concours des droites AD' , BE' , CF' , D' , E' , F' étant les pieds des hauteurs du triangle DEF, car A, B, C et D, E, F sont des points homologues dans les triangles semblables ABC et $D'E'F'$.

Les symétriques AD'' , BE'' , CF'' des droites AD' , BE' , CF' par rapport aux bissectrices AI, BI, CI déterminent par leur intersection l'inverse triangulaire, par rapport à ABC, de L_2 , c'est-à-dire le point K' de Lemoine du triangle $I_a I_b I_c$.

Donc d'une manière générale :

Le point K de Lemoine s'obtient en joignant les pieds des hauteurs d'un triangle aux symétriques

(1) J. NEUBERG, *Sur l'hyperbole de Feuerbach (Mathesis, avril 1893, p. 81-89).*

des pieds des hauteurs du triangle des contacts du cercle inscrit au triangle orthique par rapport aux milieux des côtés de ce dernier triangle.

On peut toujours tracer trois cercles ω_a , ω_b , ω_c tangents respectivement aux côtés $B'A'$ et $A'C'$, $A'B'$ et $C'B'$, $C'B'$ et $A'C'$ du triangle orthique et intérieurement au cercle circonscrit O au triangle ABC . Soient A'' , B'' , C'' les contacts de ces cercles avec le cercle O .

Les cercles H , inscrit au triangle $A'B'C'$, et ω_a , par exemple, ont pour centre de similitude externe le sommet A' ; les cercles O et ω_a ont pour centre de similitude externe A'' ; L_2 est le centre de similitude externe des cercles O et H . Ces trois points A' , L_2 et A'' sont en ligne droite. Par conséquent :

Si dans un triangle ABC on trace les cercles ω_a , ω_b , ω_c , respectivement tangents, intérieurement, au cercle circonscrit O et aux côtés $B'A'$ et $A'C'$, $A'B'$ et $C'B'$, $C'B'$ et $A'C'$ du triangle orthique, les droites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ qui joignent les pieds des hauteurs aux contacts avec le cercle circonscrit, concourent au point L_2 inverse triangulaire, par rapport à $A'B'C'$, du point K de Lemoine du triangle ABC .

Ou encore, les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont homologues et le centre d'homologie est le centre de similitude externe des cercles O circonscrit à ABC et H inscrit à $A'B'C'$, c'est-à-dire l'inverse triangulaire du point K de Lemoine du triangle ABC par rapport au triangle orthique $A'B'C'$.

Les cercles O_1 et I , qui correspondent aux cercles précédents O et H d'un triangle ABC , ont pour centre

de similitude interne un point L_1 de IO_1 qui n'est autre que le centre d'homothétie interne des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ du paragraphe 3.

L_1 a pour inverse triangulaire par rapport à ABC le point λ de coordonnées normales

$$\frac{1}{1 + \cos A}, \quad \frac{1}{1 + \cos B}, \quad \frac{1}{1 + \cos C}.$$

Nous appellerons λ le *correspondant* du point K' de Lemoine de $I_a I_b I_c$; il est situé sur l'hyperbole de Feuerbach, inverse triangulaire de la droite IOO_1 .

On peut construire aussi trois cercles $\omega'_a, \omega'_b, \omega'_c$ respectivement tangents aux côtés BA et AC , AB et CB , CB et AC , et extérieurement au cercle circonscrit O_1 de $I_a I_b I_c$ en A''_1, B''_1, C''_1 . On démontre comme précédemment que les droites AA''_1, BB''_1, CC''_1 concourent à l'inverse triangulaire L_1 de λ par rapport à ABC ou que les triangles homologues ABC et $A''_1 B''_1 C''_1$ ont pour centre d'homologie L_1 .

§. Considérons aussi le triangle tangentiel T' à ABC par rapport au cercle circonscrit O . Il est inversement homothétique au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$; le centre d'homothétie L_3 est encore un point de IO tel que

$$\frac{L_3 I}{L_3 O} = \frac{r}{R};$$

autrement dit L_3 est le centre de similitude interne des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC .

Les droites qui joignent les sommets du triangle ABC aux contacts homologues du cercle inscrit avec les côtés du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ se coupent en L_3 . Comme chacune de ces droites est symétrique de AD, BE, CF , par rapport aux bissectrices intérieures des angles du

triangle ABC, on obtient ici une autre démonstration de cette propriété que nous avons donnée dans cette Revue (1) :

Dans un triangle, l'inverse triangulaire du point de Gergonne J est le centre de similitude interne des cercles inscrit et circonscrit.

Les trois triangles homothétiques $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ et T ont pour droites homologues

$$2R + r, \quad r \quad \text{et} \quad 2R.$$

D'où cette propriété remarquable que l'on peut rapprocher de celle contenue dans notre Mémoire : *Sur quatre triangles homothétiques (Nouvelles Annales, mai 1915, p. 206) :*

Toute droite du triangle $\alpha\beta\gamma$ égale la somme des droites homologues dans les triangles T et $\alpha'\beta'\gamma'$.

En particulier, les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ égalent respectivement la somme des côtés homologues dans les triangles T et $\alpha'\beta'\gamma'$.

6. Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et A'B'C' des pieds des hauteurs de ABC ont pour centre d'homothétie un point L_4 de O_1H tel que

$$\frac{L_4H}{L_4O_1} = \frac{2R \cos A \cos B \cos C}{2R + r}.$$

Les coordonnées normales de ce point, par rapport à l'un ou à l'autre des triangles A'B'C' et $\alpha\beta\gamma$, sont

$$\cot \frac{A}{2}, \quad \cot \frac{B}{2}, \quad \cot \frac{C}{2}.$$

(1) R. GOORMAGHTIGH et V. THEBAULT, *Sur une question de Mannheim et ses applications à la géométrie du triangle (Nouvelles Annales, t. XVI, 1916, p. 104).*

De même $\alpha'\beta'\gamma'$ et $A'B'C'$, inversement homothétiques, ont leur centre d'homothétie L_1 sur IH de telle façon que

$$\begin{aligned} \frac{L_1 I}{L_1 H} &= \frac{r}{2R \cos A \cos B \cos C} \\ &= \frac{R \sin A \sin B \sin C}{\rho \cos A \cos B \cos C} = \frac{R}{\rho} \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C \\ &= \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}{\sin A + \sin B + \sin C}. \end{aligned}$$

7. Dans le cas particulier où le triangle ABC est *rectangle* en A , le précédent paragraphe présente quelque curiosité.

Le triangle orthique $A'B'C'$ étant dans ce cas *aplati* suivant la hauteur AA' relative à l'hypoténuse, deux côtés de chacun des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ deviennent parallèles et perpendiculaires à l'hypoténuse.

On a, par suite,

$$r_a = r + r_b + r_c$$

ou

$$r_b + r_c = 2R,$$

et dans un triangle rectangle la somme des rayons des cercles exinscrits dans les angles aigus égale l'hypoténuse.

8. Formons les triangles $D_1 E_1 F_1$ et $D'_1 E'_1 F'_1$ des contacts des côtés des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ avec leurs cercles inscrits O_1 et I . Ces triangles sont, le premier directement, le second inversement homothétiques au triangle ABC .

On a en effet, par exemple,

$$\widehat{\gamma D_1 E_1} = 90^\circ - \hat{\gamma} = \hat{C} = \widehat{A C_1 B_1}.$$

Les droites AD_1 et AD'_1 sont du reste symétriques

de AD par rapport à $I_b I_c$. Les trois points D_1 , A et D'_1 sont par suite en ligne droite. Il en est de même de E_1 , B et E'_1 , F_1 , C et F'_1 .

Ces trois droites $D_1 A D'_1$, $E_1 B E'_1$, $F_1 C F'_1$, symétriques respectivement de AD, BE, CF par rapport aux bissectrices AI, BI, CI, sont concourantes au point L_3 inverse triangulaire du point de Gergonne J de ABC.

L_3 est par suite le centre de similitude commun aux deux groupes de cercles O_1 circonscrit à $D_1 E_1 F_1$ et O, O et I.

De plus, en nous rappelant notre Mémoire précédemment cité : *Sur une question de Mannheim et ses applications à la géométrie du triangle*, nous obtenons ce résultat :

Les droites $D_1 A D'_1$, $E_1 B E'_1$, $F_1 C F'_1$ rencontrent respectivement le cercle O circonscrit au triangle ABC aux points de contact des cercles tangents extérieurement à O et respectivement aux côtés BA et AC, AC et CB, CB et BA.

9. Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC sont homologues; car la droite Ax, par exemple, qui joint les centres de similitude externes λ et α des groupes de cercles I et I_a , I_a et O_1 inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$, contient aussi le centre de similitude externe des cercles O_1 et I, c'est-à-dire un point R de IO_1 tel que

$$\frac{RI}{RO_1} = \frac{r}{2R+r}.$$

Les distances x_1, y_1, z_1 de ce point aux côtés du triangle ABC sont

$$x_1 = \frac{r(r+r_a)}{2R}, \quad y_1 = \frac{r(r+r_b)}{2R}, \quad z_1 = \frac{r(r+r_c)}{2R}.$$

Les coordonnées normales de ce point par rapport à ABC sont donc

$$r + r_a, \quad r + r_b, \quad r + r_c,$$

ou

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}, \quad \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2}, \quad \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Le centre d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC est donc ce point R; l'axe d'homologie est la droite Δ qui joint les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $I_a I_b I_c$ sont aussi homologues; le centre est O_1 et l'axe la droite Δ précédente.

D'où cette propriété :

Les triangles $\alpha\beta\gamma$, ABC et $I_a I_b I_c$ sont homologues entre eux; l'axe commun d'homologie est la droite Δ des pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC et les centres respectifs sont le centre de similitude externe des cercles I et O_1 de rayon $2R + r$, le point O_1 et le centre I.