

AURIC

Sur un théorème de Mœbius

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 426-429

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__426_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K' 2d]

SUR UN THÉORÈME DE MÖBIUS;

PAR M. AURIC.

On sait d'après un théorème de Möbius que, si un nombre quelconque de vecteurs planaires V_1, V_2, V_3, \dots liés à des points A_1, A_2, A_3, \dots tournent d'un même angle (pris avec son sens) autour de ces points la résultante R de ces vecteurs passe par un point fixe P et tourne du même angle autour de ce point.

Appliquons ce théorème général au cas particulier d'un triangle de référence $A_1 A_2 A_3$.

Posons

$$\begin{aligned}\overline{A_2 A_3} &= a_1 e^{i\alpha_1}, & \overline{V_1} &= b_1 e^{i\beta_1}, \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= \hat{A}_1, & \beta_2 - \beta_3 &= \hat{B}_1.\end{aligned}$$

On trouve aisément que les coordonnées barycentriques de P sont

$$\begin{aligned}p_1 &= a_3 a_1 b_2 b_1 \sin(\hat{A}_2 - \hat{B}_3) + a_2 a_1 b_3 b_1 \sin(\hat{A}_3 - \hat{B}_2) \\ &\quad + a_2 a_3 b_1^2 \sin \hat{A}_1 - a_1^2 b_2 b_3 \sin \hat{B}_1\end{aligned}$$

et deux autres expressions analogues.

En particulier si les vecteurs sont parallèles

$$\hat{B}_i = 0,$$

d'où

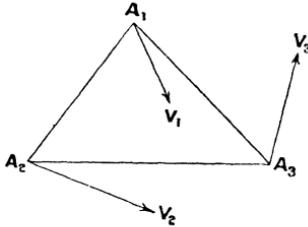
$$p_1 = b_1 (a_3 a_1 b_2 \sin \hat{A}_2 + a_1 a_2 b_3 \sin \hat{A}_3 + a_2 a_3 b_1 \sin \hat{A}_1).$$

et, comme l'expression entre parenthèses est symétrique, les coordonnées de P sont

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3,$$

ce qui constitue la définition même des coordonnées barycentriques.

Décomposons le vecteur V_1 suivant les côtés $A_1 A_2$



et $A_1 A_3$ du triangle et appelons V_{13} , V_{12} les composantes ainsi obtenues.

Considérons d'une part V_{13} , V_{21} , V_{32} , et d'autre part V_{12} , V_{23} , V_{31} .

On démontre aisément que chacun de ces groupes de trois vecteurs a une résultante qui passe par un point fixe P_1 ou P_2 dont les coordonnées sont

$$(P_1) \quad \frac{\sin(\hat{A}_3 - \hat{B}_2)}{a_3 b_2}, \quad \frac{\sin(\hat{A}_1 - \hat{B}_3)}{a_1 b_3}, \quad \frac{\sin(\hat{A}_2 - \hat{B}_1)}{a_2 b_1}.$$

$$(P_2) \quad \frac{\sin(\hat{A}_2 - \hat{B}_3)}{a_2 b_3}, \quad \frac{\sin(\hat{A}_3 - \hat{B}_1)}{a_3 b_1}, \quad \frac{\sin(\hat{A}_1 - \hat{B}_2)}{a_1 b_2}.$$

En particulier, lorsque les vecteurs sont parallèles

ces coordonnées deviennent

$$\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_1} \text{ et } \frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2},$$

et les deux points P_1 et P_2 sont brocardiens.

Les deux résultantes partielles passant par P_1 et P_2 se coupent en un point M situé sur la résultante générale PM et le lieu de ce point M lorsque les vecteurs tournent autour de leurs points d'attache est une conique circonscrite à PP_1P_2 .

L'équation de cette conique est

$$\begin{aligned} & \Sigma m_1^2 a_2 a_3 b_2 b_3 \sin(\hat{A}_1 + \hat{B}_1) \\ & - m_2 m_3 (a_2 a_3 b_1^2 \sin \hat{A}_1 + b_2 b_3 a_1^2 \sin \hat{B}_1) = 0. \end{aligned}$$

En particulier si les vecteurs sont parallèles cette conique devient

$$\Sigma a_2 a_3 \sin A_1 (b_2 b_3 m_1^2 - b_1^2 m_2 m_3) = 0,$$

et l'on reconnaît la brocardienne du point

$$b_1, b_2, b_3.$$

On voit ainsi que cette conique peut être considérée comme dérivant directement du théorème de Mœbius et comme susceptible d'une généralisation immédiate dans le cas où les vecteurs donnés ne sont pas parallèles.

En particulier, si l'on a

$$\hat{A}_i + \hat{B}_i = 0,$$

le lieu de M est une conique circonscrite à $A_1 A_2 A_3$

$$\Sigma (a_2 a_3 b_1^2 - b_2 b_3 a_1^2) \sin A_1 m_2 m_3 = 0.$$

Les coordonnées des points fixes sont alors

$$p_1 = (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3) \sin A_1 = \frac{K a_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2},$$

$$(P_1) \quad \frac{a_1}{a_3 b_2}, \quad \frac{a_2}{a_1 b_3}, \quad \frac{a_3}{a_2 b_1},$$

$$(P_2) \quad \frac{a_1}{a_2 b_3}, \quad \frac{a_2}{a_3 b_1}, \quad \frac{a_3}{a_1 b_2}.$$

Lorsque $\overline{V_1} + \overline{V_2} + \overline{V_3} = 0$ les points P, P₁, P₂ sont rejetés à l'infini.

Il est clair que les propositions précédentes peuvent être généralisées et appliquées à un nombre quelconque de points A₁, A₂, . . . , A_n parcourus dans l'ordre ci-dessus ou dans l'ordre inverse; il en résulte que quatre points, par exemple, définissent trois paires de points brocardiens et trois brocardiennes passant par le point fixe du système des quatre vecteurs.