

F. BALITRAND

**Quelques applications des coordonnées  
intrinsèques**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1915), p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1915\\_4\\_15\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__1_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---



---

[O'2]

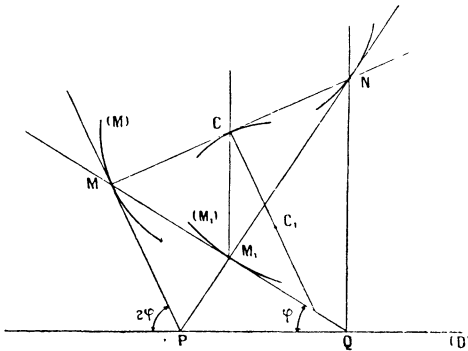
QUELQUES APPLICATIONS DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES;

PAR M. F. BALITRAND.

---

Soient  $(M)$  une courbe,  $M$  un point de cette courbe,  $Mx$  et  $My$  la tangente et la normale en ce point. Nous prendrons ces deux droites pour axes mobiles de coordonnées et nous choisirons l'arc  $s$  de la courbe  $(M)$  comme variable indépendante.

Par le point  $M$  menons une droite  $MM_1$ , inclinée



d'un angle  $\theta$  sur la tangente  $Mx$ ; cet angle sera consi-

déré comme fonction de l'arc  $s$ , c'est-à-dire variera en même temps que le point  $M$  sur la courbe  $(M)$ . La droite  $MM_1$  enveloppera donc une certaine courbe  $(M_1)$ ;  $M_1$  désignant son point de contact avec son enveloppe.

Soient  $s, \rho, \varepsilon$  l'arc, le rayon de courbure, l'angle de contingence de  $(M)$  au point  $M$ ;  $s_1, \rho_1, \varepsilon_1$  les mêmes éléments de  $(M_1)$  au point correspondant  $M_1$ .

Désignons par  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point du plan par rapport aux axes  $Mx$  et  $My$ , qui sont mobiles. Ces coordonnées seront supposées fonctions de  $s$ . On a les formules suivantes, dues à Cesàro,

$$(1) \quad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + 1 - \frac{y}{\rho}, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho};$$

les caractéristiques  $d$  et  $\delta$  se rapportent au mouvement absolu et au mouvement relatif du point  $M$ .

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'immobilité de ce point sont donc

$$(2) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho};$$

ou, en coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ ,

$$(3) \quad \frac{dr}{ds} = -\cos\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{r} - \frac{1}{\rho}.$$

L'équation de la droite  $MM_1$  est

$$(4) \quad x \sin\theta - y \cos\theta = 0.$$

Le point  $M_1$ , où elle touche son enveloppe, doit être considéré comme immobile. Ses coordonnées satisfont donc à l'équation (4) et à celle qu'on obtient en la différentiant et en y remplaçant  $\frac{dx}{ds}$  et  $\frac{dy}{ds}$  par leurs valeurs (2); c'est-à-dire à l'équation

$$(5) \quad x \cos\theta + y \sin\theta - h \sin\theta = 0,$$

où l'on a posé

$$(6) \quad \frac{1}{h} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho};$$

$h$  représente le segment MN, détaché sur la normale en M à (M), par la normale en M<sub>1</sub> à (M<sub>1</sub>).

Différentions encore (5); nous obtenons, en tenant compte de (2),

$$(7) \quad x \sin \theta - y \cos \theta + h \cos \theta \left( 2 - \frac{h}{\rho} \right) + \frac{dh}{ds} h \sin \theta = 0.$$

Cette droite est la normale à la développée de (M<sub>1</sub>). Sa distance à l'origine est égale au rayon de courbure de cette courbe; d'où l'expression suivante de ce rayon de courbure

$$(8) \quad \rho_1 = h \cos \theta \left( 2 - \frac{h}{\rho} \right) + \frac{dh}{ds} h \sin \theta.$$

Plus loin nous trouverons d'autres expressions.

Les coordonnées de M<sub>1</sub> peuvent s'écrire

$$(9) \quad x = r \cos \theta = h \sin \theta \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = h \sin^2 \theta.$$

Les formules (1), appliquées à ce point, donnent

$$(10) \quad \frac{\delta x}{ds} = \left( \frac{dr}{ds} + \cos \theta \right) \cos \theta, \quad \frac{\delta y}{ds} = \left( \frac{dr}{ds} + \cos \theta \right) \sin \theta;$$

d'où pour l'élément linéaire de la courbe (M<sub>1</sub>)

$$(11) \quad ds_1 = dr + \cos \theta ds.$$

Cette formule ne diffère pas de celle qui a été établie par M. Bricard (*Nouv. Ann.*, 1913, p. 306).

Les mêmes formules (1) appliquées au point  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ , c'est-à-dire aux cosinus directeurs de MM<sub>1</sub>, donnent

$$(12) \quad \varepsilon_1 = d\theta + \varepsilon,$$

et l'on en déduit aussitôt les formules ci-dessous, souvent utiles dans les applications :

$$(13) \quad ds = \frac{r \varepsilon_1}{\sin \theta},$$

$$(14) \quad \rho_1 = h \left( \frac{dr}{ds} + \cos \theta \right),$$

$$(15) \quad \rho_1 = \frac{dr}{\varepsilon_1} + r \cot \theta,$$

$$(16) \quad \frac{\rho}{h} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\rho_1}{h} = \frac{ds_1}{ds}.$$

Pour faire quelques applications, reprenons la formule (6)

$$(6) \quad \frac{1}{h} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho}$$

et faisons diverses hypothèses sur l'angle  $\theta$  qui règle le mouvement de la droite  $MM_1$ . Le cas particulier le plus simple, le premier à considérer, est celui de  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ , d'où  $\theta = \text{const.}$  Les formules précédentes résument alors la théorie des développoides (*voir* par exemple E. CESÀRO, *Nouv. Ann. de Math.*, 1886, p. 67 et suiv.).

Après  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ , il est naturel de supposer  $\frac{d\theta}{ds} = \text{const.}$  Cette hypothèse ne semble pas conduire à des résultats simples et intéressants lorsque la courbe ( $M$ ) est quelconque; mais il en est autrement si on la particularise et si l'on suppose qu'elle est un cercle. Faisons donc, dans les relations ci-dessus,

$$ds = k d\theta, \quad \rho = a;$$

$k$  et  $a$  étant deux constantes. Il résulte de là que  $h$  est constant et égal à

$$\frac{ak}{a+k}.$$

( 5 )

Puis de  $r = h \sin \theta$  on déduit

$$dr = h \cos \theta \, d\theta;$$

et les formules (14) et (11) donnent

$$\rho_1 = \frac{h(h+k)}{k} \cos \theta,$$

$$ds_1 = (h+k) \cos \theta \, d\theta;$$

d'où

$$s_1 = (h+k) \sin \theta$$

à une constante près qu'on peut négliger, puisque l'origine des arcs est arbitraire. Il en résulte, pour le lieu du point  $M_1$ , l'équation intrinsèque suivante

$$\frac{s_1^2}{(h+k)^2} + \frac{k^2 \rho_1^2}{h^2 (h+k)^2} = 1,$$

équation intrinsèque d'une épi- ou hypocycloïde, engendrée par un cercle de rayon  $\frac{ak}{2(a+k)}$  roulant sur un cercle de rayon  $\frac{a^2}{a+k}$ . Comme l'équation contient deux arbitraires,  $a$  et  $K$ , elle peut représenter une épi- ou hypocycloïde quelconque. D'où le théorème suivant (DEPARTRES, *Cours de Géométrie infinitésimale*, p. 163) :

*Toute épi- ou hypocycloïde est l'enveloppe d'une droite qui tourne uniformément autour d'un de ses points, tandis que celui-ci décrit, d'un mouvement uniforme, un cercle.*

Reprenons la formule (6) et supposons  $h = \lambda \rho$ ,  $\lambda$  étant une constante. Cela revient à dire que le point  $N$ , intersection des normales en  $M$  et  $M_1$  à  $(M)$  et  $(M_1)$ , décrit une développée intermédiaire de  $(M)$ .

La formule (6) donne

$$d\theta = \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{ds}{\rho} = \frac{1-\lambda}{\lambda} d\varphi;$$

$\varphi$  désigne l'angle de la tangente à  $(M)$ , en  $M$ , avec une droite fixe de son plan, qu'on peut appeler *directrice*. On a donc

$$\theta = \frac{1-\lambda}{\lambda} \varphi$$

à une constante près que nous négligerons. C'est le cas envisagé par M. Braude, dans la troisième partie de son article des *Nouvelles Annales* (1913, p. 506 et suiv.). On voit que l'enveloppe de  $MM_1$  est celle d'une droite menée par  $M$  et faisant avec la tangente en ce point un angle égal à  $k$  fois  $\left(k = \frac{1-\lambda}{\lambda}\right)$  l'angle de cette tangente avec une droite fixe de son plan.

En particulier, pour  $\lambda = 2$ , le point  $N$  coïncide avec l'extrémité du diamètre du cercle osculateur à  $(M)$  en  $M$ . Si  $C$  désigne le centre de courbure en ce point, on voit que, dans le triangle rectangle  $MNM_1$ , le segment  $CM_1$ , médiane de ce triangle, est égal à  $CM$ ; c'est-à-dire à  $\rho$ . De plus, la direction de  $CM_1$ , lorsque  $M$  varie, reste fixe et perpendiculaire à la directrice. Dans ces conditions, la courbe enveloppée par  $MM_1$  coïncide avec le lieu des extrémités des segments égaux aux rayons de courbure de  $(M)$ , menés par les centres de courbure correspondants, parallèlement à une direction fixe.

Inversement, on peut dire que si, par le centre de courbure correspondant à chaque point de  $(M)$ , on mène, parallèlement à une direction fixe, un segment égal au rayon de courbure en ce point, le lieu des extrémités de ces segments est une courbe  $(M_1)$ , dont la tangente passe par  $(M)$ .

( 7 )

( $M_1$ ) est donc une ligne de poursuite pour (M) et le rapport des vitesses sur les deux courbes est facile à évaluer. En effet, en vertu des formules précédentes ou des hypothèses faites, on a

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{dr}{ds} + \cos \theta, \quad r = h \sin \theta = 2 \rho \sin \theta,$$
$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{2\rho}, \quad \theta = -\frac{\varphi}{2}.$$

On en déduit

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{2R}{\rho} \sin \frac{\varphi}{2};$$

R désignant le rayon de courbure de la développée de (M). Signalons aussi, en vertu de (16), la formule

$$\rho_1 = 4R \sin \frac{\varphi}{2}$$

qui fournit une construction géométrique évidente du centre de courbure de ( $M_1$ ).

Pour faire une application de ce qui précède, prenons comme courbe (M) celle qui a pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{a}{4} \left( e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right);$$

elle est connue sous le nom de *syntractrice*. La forme de son équation conduit à introduire un paramètre variable, défini par la relation

$$e^{\frac{s}{a}} = t;$$

d'où

$$\rho = \frac{a}{2} \frac{1+t^2}{2t}.$$

Par suite en posant

$$t = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$$



on a

$$s = a \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}, \quad \rho = \frac{a}{2 \sin \varphi}, \quad \frac{ds}{\rho} = 2 d\varphi;$$

la tangente au point  $M$  à  $(M)$  fait donc avec une droite fixe  $D$ , un angle égal à  $2\varphi$ .

La droite menée par  $M$ , faisant, avec la tangente à  $(M)$  en ce point, un angle égal à  $\varphi$ , enveloppe une courbe  $(M_1)$ , qu'elle touche au point  $M_1$ . D'après ce qui précède, la normale en  $M_1$  à  $(M_1)$  coupe la normale à  $(M)$  en  $M$ , à l'extrémité  $N$ , du diamètre du cercle osculateur en ce point. La droite qui joint le centre de courbure  $C$ , correspondant à  $M$ , à  $M_1$ , est égale au rayon de courbure en  $M$  et est perpendiculaire à la droite  $D$ .

Demandons-nous quelles sont, dans le cas présent, les courbes lieux des points  $M_1$  et  $N$ . Soient  $P$  et  $Q$  les points d'intersection, avec  $D$ , de la tangente en  $M$  à  $(M)$  et de la droite  $MM_1$ . Le triangle  $MPQ$  est isocèle et  $M_1$ , pied de la hauteur abaissée de  $P$  sur  $MQ$ , est le milieu de  $MQ$ . Dans le triangle  $MM_1N$ , on a

$$MM_1 = MN \sin \varphi = 2\rho \sin \varphi = a;$$

en vertu de la relation  $\rho = \frac{a}{2 \sin \varphi}$ . Donc  $M_1Q$ , qui est égal à  $MM_1$ , est constant et, par suite, le lieu du point  $M_1$  est une tractrice. Il en résulte, d'après des propriétés connues, que le lieu du point  $N$  est une chaînette, développée de la tractrice.

Ce qui précède fournit une construction, d'ailleurs connue (*Nouv. Ann.*, 1891, p. 86), du centre de courbure de la syntractrice. *Le centre de courbure,  $C$ , de la syntractrice, relatif au point  $M$ , est au milieu du segment qui joint ce point au centre de courbure du point correspondant de la tractrice.*

Il est également possible d'arriver, au moyen des considérations ci-dessus, à une construction géométrique simple du rayon de courbure de la développée de la syntractrice. Il suffit pour cela de se reporter à la formule  $\rho_1 = 4R \sin \frac{\varphi}{2}$ . Seulement, au lieu d'y supposer  $R$  connu et  $\rho_1$  inconnu, c'est l'inverse qu'on doit faire. Il faut de plus observer que  $\frac{\varphi}{2}$  doit y être remplacé par  $\varphi$ . On a alors  $\rho_1 = 4R \sin \varphi$ , et comme  $\rho_1 = 2\rho \cos \varphi$ , on en déduit  $2R = \rho \cot \varphi$ . D'où la construction suivante :

*Le rayon de courbure  $CC_1$  de la développée de la syntractrice s'obtient en prenant la moitié du segment déterminé sur la normale à cette développée par la droite  $MM_1$ .*

La syntractrice et la tractrice fournissent donc un exemple d'un couple de courbes, telles que les normales aux points correspondants se coupent en un point dont le lieu est une développée intermédiaire pour l'une des courbes, et une développée, au sens ordinaire du mot, pour l'autre. Proposons-nous de trouver toutes les courbes jouissant de cette propriété. Les formules ci-dessus le permettent aisément.

En effet, on a, par hypothèse,  $h = \lambda \rho$ ,  $\lambda$  étant une constante, et  $\rho_1 = h \cos \theta = \lambda \rho \cos \theta$ . La relation (16) donne  $\frac{ds_1}{ds} = \cos \theta$ , et il en résulte en vertu de (11) que  $r$  est une constante. Ainsi, *quelles que soient les courbes, la distance des points correspondants est constante.*

A cause de la relation (6) on a

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \rho,$$

( 10 )

d'où

$$d\theta = k d\varphi,$$

en posant

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = k$$

et en désignant par  $\varphi$  l'angle de la tangente en  $M$  à  $(M)$  avec une droite fixe du plan de la courbe. Donc  $\theta = k\varphi$ ; on peut ne pas introduire de constante; il suffit pour cela de choisir pour origine des arcs le point où la tangente est parallèle à la droite fixe.

Les formules (13) et (16) conduisent alors sans difficulté à la relation

$$\rho = \frac{(k+1)r}{\sin k\varphi} = \frac{\alpha}{\sin k\varphi};$$

qui est l'équation générale des courbes cherchées en coordonnées intrinsèques ( $\rho$  et  $\varphi$ );  $\alpha$  désigne une constante arbitraire. Pour  $k = -\frac{1}{2}$ , on retrouve bien la syntactrice.

Quant aux courbes  $(M_1)$ , leur équation générale est également aisée à trouver. On a en effet

$$\rho_1 = k\rho \cos\theta = \frac{k\alpha \cos k\varphi}{\sin k\varphi} = k\alpha \cot k\varphi.$$

Mais la relation

$$(16) \quad \frac{\rho}{h} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$

donne

$$\varepsilon_1 = (k+1)\varepsilon.$$

Par suite, en désignant par  $\psi$  l'angle de la tangente à  $(M_1)$  avec la droite fixe, on a

$$d\psi = (k+1) d\varphi;$$

d'où

$$\psi - \psi_0 = (k+1)\varphi,$$

et l'équation précédente devient

$$\rho_1 = k \alpha \cot \frac{k}{k+1} (\psi - \psi_0).$$

C'est l'équation des courbes  $(M_1)$  en coordonnées intrinsèques  $(\rho_1$  et  $\psi)$ . Par un changement de la droite fixe, elle peut se mettre sous la forme

$$\rho_1 = \beta \cot m \psi;$$

$\beta$  et  $m$  sont des constantes. Ce qui précède se résume ainsi :

*Par chaque point M d'une courbe (M) d'équation intrinsèque  $\rho = \frac{\alpha}{\sin k \varphi}$ , menons une droite faisant avec la tangente en ce point un angle égal à  $k+1$  fois l'angle de la tangente avec une droite fixe de son plan; elle enveloppe une courbe  $(M_1)$  jouissant des propriétés suivantes : 1° elle appartient à la famille des courbes d'équation intrinsèque  $\rho_1 = \beta \cot m \psi$ ; 2° la distance des points correspondants sur  $(M)$  et  $(M_1)$  est constante; 3° le point de rencontre des normales à  $(M)$  et  $(M_1)$ , aux mêmes points, décrit une courbe qui est à la fois développée intermédiaire de  $(M)$  et développée, au sens ordinaire du mot, de  $(M_1)$ .*

Dans le cas où la courbe, lieu du point de rencontre des normales, est une développée pour  $(M)$  et une développée intermédiaire pour  $(M_1)$ , le problème se résout d'une façon analogue. On trouve que les courbes  $(M)$  et  $(M_1)$  sont deux spirales logarithmiques et que la distance des points correspondants est une fonction linéaire de l'arc. De plus, l'angle  $\theta$  est constant.

Nous avons ainsi examiné deux cas : celui où le lieu décrit par le point N est développée intermédiaire pour (M), sans l'être pour (M<sub>1</sub>), et celui où le même lieu est à la fois développée intermédiaire de (M) et de (M<sub>1</sub>). Il reste un troisième cas à examiner : celui où le lieu en question est développée intermédiaire de (M<sub>1</sub>), sans l'être pour (M).

Dans cette hypothèse, on a

$$k \rho_1 = h \cos \theta.$$

La formule (16) donne alors

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos \theta}{k}$$

et la formule (11)

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1-k}{k} \cos \theta.$$

Comme

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{ds_1} \times \frac{ds_1}{ds},$$

on voit que

$$\frac{dr}{ds_1} = 1 - k;$$

donc  $r$  est une fonction linéaire de l'arc de la courbe (M<sub>1</sub>).

Ainsi la solution générale du problème s'obtient en prenant une courbe quelconque (M<sub>1</sub>) et en portant sur ses tangentes, à partir du point de contact, des longueurs fonctions linéaires de l'arc de la courbe, compté à partir d'un point fixe.

---