NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PAILLARD

Sur le moment d'un vecteur par rapport à une droite

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 78-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__78_1>

[R3a]

SUR LE MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UNE DROITE;

PAR M. A. PAILLARD.

Dans la théorie des vecteurs, on définit en général le moment par rapport à un *axe*. Il y a cependant avantage, semble-t-il, à introduire tout d'abord la notion plus générale de moment par rapport à une *droite*, sur laquelle aucun sens n'aurait été choisi au préalable pour être appelé positif. L'exposition de la théorie se trouve ainsi légèrement simplifiée. Il faut aussi remarquer que, dans la plupart des applications, on considère des moments par rapport à des droites, et non par rapport à des axes.

On trouvera dans cette courte Note une esquisse de la théorie classique des moments, modifiée dans l'ordre d'idées que je viens d'indiquer.

Rappelons d'abord quelques propriétés.

On dit qu'un vecteur CD est de sens positif par rapport à un vecteur AB, lorsqu'un observateur, placé les pieds en A et la tête en B, et regardant C, voit CD à la droite du plan ABC.

Cette définition ne dépend, ni des grandeurs de AB et CD, ni des positions de ces vecteurs sur leurs supports. Elle suppose que les deux vecteurs ne sont pas dans un même plan.

Si deux vecteurs CD, CE, *dont l'un est perpendiculaire au plan* ABC, *forment entre eux un angle aigu, ils sont du même côté de ce plan et, par conséquent, ils ont même sens par rapport à* AB.

Réciproquement, si deux vecteurs CD, CE, dont l'un est perpendiculaire au plan ABC, sont de même sens par rapport au vecteur AB, ils forment entre eux un angle aigu.

Le sens de AB *par rapport à* CD *est le même que celui de* CD *par rapport à* AB. (Ce sens commun sera dit *sens relatif des deux vecteurs.*)

D'après la définition, on peut, sans changer ces deux sens, amener les deux origines A et B des vecteurs aux pieds de la perpendiculaire commune aux supports 1 et 2 de ces vecteurs, et donner des grandeurs égales aux deux vecteurs. Le tétraèdre ABCD admet alors un axe de symétrie, qui est la bissectrice Δ de l'angle formé par les projections des deux vecteurs sur le plan médiateur de AC, et une rotation de 180° autour de Δ amène AB sur CD, en même temps que CD sur AB. Il résulte de là que ce qu'on peut dire du vecteur situé sur la droite 2 par rapport au vecteur situé sur la droite 1, se dit, selon l'instant, de AB par rapport à CD, ou de CD par rapport à AB, ce qui démontre la propriété.

Par définition, le moment du vecteur AB par rapport à la droite D est le moment, par rapport à un point O de la droite D, du vecteur *ab*, projection de AB sur le plan P mené par O perpendiculaire à la droite D; c'est un vecteur porté par D.

On montre aisément que ce moment ne dépend pas du choix de O sur D.

Théorème. — *Quel que soit le point* O *choisi sur* D, *le moment* OH *de* AB *par rapport à* D *est la projection sur* D *du moment* OG *de* AB *par rapport à* O.

On voit aisément que OH a même grandeur que la projection de OG sur D. Il est donc, ou cette projection, ou opposé à cette projection. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que l'angle des vecteurs OG, OH est aigu.

Or, par définition, OH et *ab* sont de sens relatif positif; l'observateur OH regardant *a*, voit *ab* à sa droite. Il voit en même temps A devant lui, A*a* étant parallèle à D; il voit par suite AB à sa droite en même temps que *ab*, B*b* étant parallèle au plan DA*a*, parce que parallèle à D. Il résulte de là que OH et AB sont aussi de sens relatif positif.

OH et OG sont donc tous deux de sens positif par rapport à AB; et comme OG est perpendiculaire au plan OAB, l'angle GOH est aigu, et OH est bien la projection de OG.

On déduit de là la définition du moment d'un système de vecteurs par rapport à une droite D. C'est un vecteur parfaitement déterminé.

Dans le cas particulier où la droite D devient un *axe*, c'est-à-dire lorsqu'on choisit sur D un sens positif, les mesures des vecteurs portés par D deviennent des nombres algébriques. Mais le moment par rapport à D d'un système de vecteurs est un vecteur, complètement indépendant du sens qu'on peut choisir sur D.