Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 550-570
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__550_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégration des équations linéaires d'ordre supérieur au premier à coefficients variables.*

Problème. — *La normale* MP *en un point* M *d'une surface rencontre le plan* xOy *en* P.

1° *Déterminer les surfaces telles que* $MP = OP$.

2° *Lignes de courbure de ces surfaces.*

3° *Montrer que si l'on choisit une surface particulière, le point* P *décrit une courbe du plan des* xy.

Déterminer la surface de façon que cette course ait pour équation

$$x = Ly.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y(3x^2 + y^2) - 2x^3y' = 0.$$

Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales. (Novembre 1913.)

Besançon.

Épreuve théorique. — I. 1° M *étant un point d'une surface, établir l'équation aux dérivées partielles qui exprime que le plan* MOZ *fait avec le plan* xOz *et avec le plan tangent en* M *des angles complémentaires :*

2° *Démontrer que les caractéristiques de cette équation sont les lignes de courbure des surfaces intégrales. Donner une détermination géométrique des deux systèmes de lignes de courbure.*

3° *Vérifier qu'on peut prendre comme intégrale complète une surface du second degré ayant pour équation*

$$2xz = Ax^2 + A'y^2 + 2cx.$$

Préciser la nature de cette surface.

4° *En déduire l'intégrale générale qui passe par la droite*

$$x = 2a, \qquad z = 0.$$

Achever pour cette surface la détermination des lignes de courbure.

II. *Intégrer l'équation*

$$y = xy'^2 + \frac{2y' - 1}{(y' - 1)^2},$$

et rechercher s'il existe des solutions singulières.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^3 - x^2 - 3x + 1}{(x+1)^2} e^{-x}\, dx.$$

Sous quelles conditions l'intégrale

$$\int \frac{ax + b}{(x+1)^2} e^{-x}\, dx$$

est-elle calculable en termes finis? (Juillet 1913.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Définir les caractéristiques pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire de la forme*

$$Ap + Bq = C,$$

où A, B, C *sont des fonctions données de* x, y, z.

Exposer la théorie de l'intégration de cette équation.

Comme exemple, intégrer l'équation

$$xp + 3yq = \frac{4y^2}{x^2}.$$

Chercher les surfaces intégrales de cette équation sur lesquelles les caractéristiques sont des lignes asymptotiques

Plus généralement on considère l'équation

$$xp + 3yq = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ *est une fonction donnée de* x *et* y. *A quelle condition doit satisfaire* f *pour que cette dernière équation admette une famille de surfaces intégrales, dépendant d'un paramètre variable et telles que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques pour ces surfaces. Montrer que, si la condition est remplie, la famille de surfaces s'obtiendra par des quadratures.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne trois axes* Ox, Oy, Oz *et l'on désigne par* a *une longueur donnée. On considère la surface conique ayant pour sommet le point* S *de coordonnées* (O, O, a) *et pour directrice la parabole*

$$y^2 - 2ax = 0.$$

M *désignant un point de la parabole, calculer l'aire* A *de la surface conique comprise entre l'arc* OM *de la parabole et les génératrices* SO *et* SM. *En désignant par* θ *l'angle que fait* OM *avec* Oy, *calculer, à l'aide des tables, la plus petite valeur de* θ *pour laquelle l'aire* A *est égale à la moitié du carré construit sur l'ordonnée* y *du point* M.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Définir le rayon de convergence d'une série procédant suivant les puissances entières croissantes et positives de la variable; énoncer et démontrer le théorème fondamental sur lequel repose cette définition.*

On pose

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad \ldots, \qquad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$$

déterminer le rayon de convergence de la série

$$a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

II. *Déterminer la fonction* U *du paramètre* u *de façon que la famille de courbes gauches*

$$x = \frac{1 - 2au}{U + a}, \qquad y = \frac{u - \frac{au^2}{2}}{U + a}, \qquad z = \frac{a}{U + a},$$

a étant une constante arbitraire, ait, d'une façon effective, une courbe enveloppe. (Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *En supposant que la variable* z *a sa partie réelle positive, montrer que la fraction rationnelle*

$$\frac{z(z+2)}{z+1}$$

a un argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$. *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{e^{-\frac{z(z+2)}{z+1}}}{1 + z^4} dz$$

prise le long du contour fermé limité par le demi-cercle R *ayant l'origine pour centre et situé du côté des* x *positifs. Quelle sera la valeur de l'intégrale précédente prise le long de l'axe des* y *de* $-\infty$ *à* $+\infty$? *En séparant, dans cette dernière intégrale, la partie réelle et la partie imaginaire, quelles sont les deux intégrales réelles dont on obtient les valeurs?*

II. *On considère la congruence de cercles*

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - (b - a^2)a^2 y - b = 0,$$
$$x + 2(b - a^2)ay + 2a = 0.$$

Déterminer b *en fonction de* a *de façon que la surface engendrée par les cercles* C *de la famille ainsi constituée admette ces cercles* C *comme lignes de courbure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface conoïde* S *engendrée par une droite qui reste parallèle au plan des* xy *et s'appuie sur l'axe des* z *et sur la courbe* $x = a$, $z^2(y^2 + a^2) = a^4$ (coordonnées rectangulaires). *Calculer l'aire de la portion de* S *qui se trouve du côté des* z *positifs et des* x *positifs et qui est intérieure au cylindre* $x^2 + y^2 - ay = 0$ (a désigne une longueur donnée).

(Juin 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante de convergence d'un produit infini est que la série formée par les logarithmes des facteurs du produit infini soit convergente pour des déterminations convenablement choisies de ces logarithmes.*

II. *On pose*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n}\right),$$

où a *est une constante donnée de module supérieur à* 1. *Indiquer si ce produit est convergent pour toute valeur de* z. *Montrer que le quotient*

$$\frac{f(az)}{f(z)}$$

se réduit à une expression très simple. Utiliser ce résultat pour calculer les coefficients du développement de $f(z)$. *Existe-t-il des fonctions entières de* z, *autres que* $f(z)$, *telles que l'on ait identiquement*

$$\frac{g(az)}{g(z)} = \frac{f(az)}{f(z)},$$

III. *Ramener géométriquement à un problème comme la recherche des courbes* C (autres que des lignes droites) *dont toutes les tangentes sont normales à une surface donnée* S. *Cas où la surface* S *est enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. Cas où* S *admet une double génération comme enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre. Cas où* S *est une surface développable.*

Sur une surface développable Σ *on trace une ligne de courbure* Γ *et l'on considère la surface* S *enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit* Γ. *Définir les courbes* C *relatives à la surface* S *au moyen de la courbe* Γ *et montrer qu'on les obtient sans aucune intégration à effectuer.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(13+5\cos x)^3}.$$

(Novembre 1913.)

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer les lignes géodésiques de l'hélicoïde à plan directeur.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère, en axes rectangulaires, l'hélicoïde*

$$z \text{ arc tang } \frac{y}{x}.$$

Évaluer, à $\frac{1}{100}$ *près, l'aire de la portion de cette surface comprise entre les plans* $z=0$, $z=2\pi$, *et à l'intérieur du cylindre de révolution d'axe* Oz *et de rayon égal à*

$$\frac{e^2-1}{2e}, \qquad e = 2,7182818.$$

(Juillet 1911.)

Première question. — *Déterminer* λ *de manière que l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda y$$

soit vérifiée par la fonction

$$y = \sqrt{x}.$$

Cela étant, achever l'intégration de cette équation.

Deuxième question. — *Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes planes*

$$(x^2 + y^2)^2 - \lambda xy = 0$$

(les coordonnées sont rectangulaires.)

(Novembre 1911.)

Épreuve écrite. — Première question. — *On considère, en coordonnées rectangulaires, le cylindre*

$$y = ax^n,$$

a et n étant constants; trouver sur ce cylindre une courbe C *telle que,* M *étant un point quelconque de* C, P *la projection orthogonale de* M *sur l'axe* Oz, Q *la projection orthogonale de* M *sur le plan* xOy, H *le symétrique de* P *par rapport à* Q, *le plan osculateur en* M *à* C *passe par* H. *Discuter le résultat au point de vue de la réalité des courbes. Dire si la courbe* C *peut être une cubique gauche.*

Deuxième question. — *Évaluer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x \, dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}$$

en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale complexe

$$\int \frac{e^{3iz}\, dz}{(z^2+1)^2(z^2+2)}$$

prise sur un contour convenable

Épreuve pratique. — *On considère l'intégrale double*

$$I = \int\int |x^m y^p| \, dx\, dy$$

étendue à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

m et p étant entiers positifs.

1° *Démontrer que le calcul de* I *peut toujours être effectué* (en utilisant les différentielles binomes et les fractions rationnelles).

2° *Effectuer le calcul de* I *dans le cas de*

$$m = p = 2.$$

(Juin 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soit, dans un plan, une droite* Ox. *Trouver une courbe telle que,* M *étant un point quelconque de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, Q *l'intersection de la tangente en* M *avec* Ox, *on ait constamment* $\overline{OP}.\overline{PE} = \overline{PQ}^2$.

II. *Soit une droite* Ox. *Trouver une courbe telle que,* M *étant un point quelconque de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, N *l'intersection de la normale en* M *avec* Ox, C *le centre de courbure en* M; G *la projection de* C *sur* Ox, *on ait*

$$\overline{GN} = \overline{PM}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Évaluer à* $\frac{1}{10}$ *près l'intégrale double*

$$\int\int \frac{dx\,dy}{x\sqrt{y}},$$

étendue à la portion d'ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

comprise entre les droites $x = 1$, $x = 2$.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver* (en axes rectangulaires) *la surface* S *la plus générale telle que,* M *étant un point quelconque de* S, P *et* Q *les projections de* M *sur* Ox *et* Oy, A *et* B *les points d'intersection du plan tangent en* M *à* S *avec* Ox *et* Oy, α *et* β *deux nombres donnés, on ait constamment*

$$\alpha \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} + \beta \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = 1.$$

Examiner le cas de $\alpha = 1$ *ou de* $\beta = 1$.

2° *Dans quel cas les courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles qui définit* S *sont-elles des lignes asymptotiques pour* S ? *Dans ce cas, trouver tous les asymptotiques de* S.

3° *Montrer comment on peut déterminer une surface* S *passant par une courbe donnée d'équations*

$$y = \lambda (\lambda > 0), \qquad z = \psi(x).$$

Comme application soit $\alpha = 2$, $\beta = 3$; *trouver la surface* S *passant par*

$$y = 1, \qquad z = x^3$$

ou par

$$y = 1, \qquad z = \sin x.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le paraboloïde de révolution*

$$y^2 + z^2 - 2px = 0$$

et un point A *situé sur la portion négative de l'axe de révolution* Ox. *Évaluer l'intégrale triple*

$$\iiint \frac{dv}{l^3},$$

où l *représente la distance du point* A *à l'élément de volume* dv, *l'intégrale étant étendue au volume compris entre le paraboloïde et un plan parallèle au plan des* yz. *Voir s'il y a une limite pour l'intégrale quand ce plan s'éloigne indéfiniment.* (Juin 1913).

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$y + x = \left(\frac{y' + 1}{y' - 1}\right)^2.$$

Dire s'il y a une solution singulière.

2° *Exposer la notion d'intégrale curviligne.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver trois fonctions m, z, u de x se réduisant à 1 pour $x = 0$ et vérifiant les relations*

$$y' + y + 2u = 0,$$

$$z' - \frac{y}{2} + z = 0,$$

$$u' + \frac{y}{2} + z + 2u = 0.$$

(Novembre 1913.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de Cours. — *Donner la définition d'une fonction intégrale dans un intervalle, et de l'intégrale définie de cette fonction, d'après Riemann.*

Appliquer la définition précédente à la détermination du volume de la pyramide triangulaire, en décomposant ce volume par des plans parallèles à la base, dont les distances au sommet sont en progression géométrique.

Problèmes. — I. *Démontrer que le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à une équation de Clairaut généralisée quelconque, admet les deux mêmes intégrales premières, et que réciproquement, si le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre admet ces deux intégrales premières, cette équation est une équation de Clairaut généralisée.*

II. Ox, Oy, Oz *désignant trois axes rectangulaires, former l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui coupent le rayon vecteur joignant l'origine* O *à un point variable de la surfaee sous un angle constant et donné* α. *Montrer que cette équation admet comme intégrales des surfaces de révolution autour de l'axe* Oz *dépendant d'un paramètre* (on pourra substituer aux deux variables x et y les coordonnées polaires correspondantes.) *Par généralisation, déduire une intégrale complète de l'équation considérée. Que peut-on dire des lignes de courbure des surfaces intégrales?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

2° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\begin{vmatrix} y^{\text{IV}} & y''' & y'' \\ y''' & y'' & y' \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0,$$

Déterminer tous les polynomes qui sont des intégrales de cette équation. (Juillet 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Démontrer les formules de Frenet.*

2° *Démontrer que, si le plan osculateur en un point variable d'une courbe passe par un point fixe, cette courbe est plane.*

3° *Étant donnée une équation de Clairaut généralisée*

$$z = px + qy + f(p, q),$$

le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à cette équation admet les deux intégrales particulières

$$p = \text{const.}, \qquad q = \text{const.}$$

En appliquant la méthode à partir de l'une de ces intégrales, obtenir l'intégrale complète classique de l'équation de Clairaut généralisée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Tracer, selon les valeurs des constantes d'intégration, les courbes intégrales de l'équation différentielle*

$$y'' = -\frac{1}{2y^2}.$$

2° *Pour quelles valeurs de l'exposant n l'intégrale* *définie*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^n}\, dx$$

a-t-elle un sens?

Transformer cette intégrale en le produit de la fonction $\frac{1}{\Gamma(n)}$ *et d'une autre intégrale définie, en calculant de deux façons différentes l'intégrale double*

$$\int\int e^{-xy} \sin^2 x y^{n-1}\, dx\, dy,$$

étendue à l'angle du plan des deux variables x et y où ces deux variables sont positives.

Appliquer aux cas :

$$n = 2, \qquad n = \frac{3}{2}.$$

(Novembre 1913.)

Lyon.

1° *Exposer différentes méthodes permettant d'intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(\mathrm{E}) \qquad 2^2 p^3 y^2 + 3^3 q^2 x^3 = 0.$$

2° *Trouver les surfaces intégrales vérifiant* (E) *et contenant la courbe*

$$y + x = 0, \qquad 2z + x^2 = 0.$$

Indiquer autant que possible deux méthodes différentes. Expliquer les résultats obtenus.

3° *Former l'équation différentielle des courbes intégrales. Déterminer ces courbes intégrales.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 32 \frac{dy}{dx} + 48 y = x e^{-2x} + e^{2x} \cos\left(2x\sqrt{2}\right).$$

(Juillet 1911.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer trois fonctions x', y', z'*

de t par les équations différentielles

$$\frac{dx'}{2y'x'} = \frac{dy'}{y'^2 - x'^2 - z'^2} = \frac{dz'}{2y'z'} = dt,$$

de façon que, pour $t = 0$, on ait

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Montrer que la transformation ainsi obtenue

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z, t), \\ y' &= g(x, y, z, t), \\ z' &= h(x, y, z, t), \end{aligned}$$

laisse invariante l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Nota. — *On pourra prendre comme inconnue auxiliaire*

$$\rho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

(Novembre 1912.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Résoudre*

$$x^2 y'' - (2\beta - 1) xy' + (\beta^2 + 1) y = x \log x \cos \log x,$$

β étant un paramètre.

Épreuve pratique. — *Intégrer la différentielle totale*

$$\frac{(y^2 - xy)\, dx + (x^2 - xy)\, dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(Juin 1913.

Épreuve écrite. — *On considère, dans le plan des xy, la famille des courbes définies par l'équation à un paramètre*

$$(y - 1)(x + 1) = \lambda(x^2 - y).$$

Former l'équation différentielle, indépendante de λ, *vérifiée par ces courbes. Cette dernière relation est du type de Riccati. En déterminer une intégrale particulière constante, puis l'intégrer complètement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_{1,0}^{x,y} \frac{y^2}{x^2} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

prise entre les points de coordonnées (1,0) *et* (x, y).

Expliquer de quelle manière le choix du chemin d'intégration intervient dans le résultat.

(Novembre 1913.)

Nancy.

Question de cours. — I. *Étude d'une fonction de variable complexe définie par une intégrale, la fonction sous le signe* $\int$ *étant uniforme ou à un nombre fini de déterminations.*

On donnera une seule méthode et l'on appliquera aux intégrales :

$$\int_{z_0}^{z} \sqrt{z^3 + 1}\, dz, \quad \int_{z_0}^{z} \sqrt{z^4 + 1}\, dz.$$

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on désigne par* N *le point où la normale en un point quelconque* M *d'une surface rencontre le plan* xOy, *par* P *la projection du point* M *sur le plan* xOy.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* (S) *pour lesquelles l'aire du triangle* PON *est proportionnelle à la cote* PM.

Trouver les caractéristiques; ces courbes ont-elles une propriété commune? Existe-t-il des surfaces orthogonales à ces caractéristiques?

Déterminer les surfaces (S). *Comment peut-on engendrer une surface* S.

2° *Déterminer la développée d'une surface* (S) *quelconque. Montrer que cette développée est une surface* S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Trouver les solutions de l'équa-*

tion aux différentielles totales

$$(a^2 - yz)\frac{dx}{x} + (a^2 + xz)\frac{dy}{y} + (y - x)\,dz = 0.$$

2° *On multiplie le premier membre de cette équation par une fonction de* x, y, z ; *choisir cette fonction de façon que le produit soit une différentielle totale exacte.*

(Octobre 1912.)

Question de cours. — I. *Changement de variables dans une intégrale double.*

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on donne une famille* (S) *de surfaces de révolution d'axe* Oz *ne différant que par une translation :*

$$z = f(r) + \text{const.} \qquad (r, \text{ rayon d'un parallèle}).$$

1° *Former une équation aux dérivées partielles, soit* (E), *définissant les surfaces* (Σ) *coupant les surfaces* (S) *sous un angle donné* α.

2° *Déterminer les surfaces* (Σ).

3° *On suppose que la famille* (S) *soit réduite à une famille de plans parallèles au plan* xOy. *Montrer que les surfaces* (Σ) *sont des surfaces réglées admettant pour génératrices rectilignes les caractéristiques de l'équation* (Σ); *trouver une génération simple de ces surfaces et indiquer leurs particularités géométriques.*

(Juin 1913.)

Question de cours. — *Résidus d'une fonction monogène; application au calcul d'intégrales. Donner un exemple.*

Problème. — *On désigne par* A, B, C *les points de rencontre du plan tangent en un point arbitraire d'une surface* S *avec les trois axes* Ox, Oy, Oz.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles, soit* E, *définissant les surfaces* S *pour lesquelles les vecteurs* OA, OB, OC *sont liés par une relation linéaire donnée :*

$$a\,\text{OA} + b\,\text{OB} + c\,\text{OC} = \text{K}.$$

2° *Lorsque la relation linéaire est homogène,* $K=0$, *montrer que la surface* S *générale est un cône ou une surface développable.*

3° *Déterminer, dans le cas général* $K \neq 0$, *les bandes caractéristiques de l'équation* E. *La surface générale* S *est-elle développable?*

4° *On remplace la relation linéaire par une relation quelconque*

$$f(\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{OC}) = 0;$$

les calculs et résultats de la troisième partie sont-ils conservés?

Montrer, en partant uniquement de la relation donnée, qu'il existe une intégrale complète réduite à un plan et une intégrale singulière. Que sont les surfaces S *générales relativement à cette intégrale singulière?*

(Octobre 1913.)

Paris.

On considère le point dont les coordonnées rectangulaires sont données par les formules

$$x = A + \rho\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad y = B + \rho\frac{\partial B}{\partial v}, \qquad z = C + \rho\frac{\partial C}{\partial v},$$

dans lesquelles on a posé

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u \sin v + \cos u \cos v,$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u \sin v - \sin u \cos v,$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin v.$$

Lorsque ρ *varie seul, ce point décrit une droite* $D(u, v)$ *qui, quand* u *et* v *varient, engendre une congruence et qu'on se propose d'étudier.*

1° *Vérifier que la congruence* G *est formée par les tangentes communes à la sphère* S *obtenue ea faisant* $\rho = 0$ *dans les formules* (1) *et au cône* T *obtenu cn faisant* $\rho = \cot V$ *dans les mêmes formules.*

Trouver les surfaces développables dont les génératrices appartiennent à G *et démontrer que les arêtes de rebroussement de ces surfaces qui sont sur* T *se transforment en les différentes tangentes d'une même circonférence dans le développement du cône* T *sur un plan.*

2° *Démontrer qu'il existe des surfaces* Σ *qui admettent pour normales toutes les droites de* G. *Trouver ces surfaces.*

Déterminer les lignes de courbure d'une surface Σ; *montrer qu'une des familles est plane et que l'autre est sphérique. Que pouvez-vous dire des développées de ces lignes de courbure.*

Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y = f(x),$$

où λ *est une constante,* $f(x)$ *une fonction continue dans l'intervalle de* 0 *à* π, *déterminer une intégrale* $Y(x)$ *continue ainsi que* $Y'(x)$ *dans cet intervalle sachant que l'on a* $Y(0)=0$ *et que la dérivée* $Y'(x)$ *est nulle pour* $x=\pi$. *Discuter.*

Il existe en général une seule intégrale $Y(x)$ *répondant à la question, qui est représentée par la formule*

$$Y=\int_0^x y_1(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha+\int_x^\pi y_2(z,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$

$y_1(x,\alpha)$ *et* $y_2(x,\alpha)$ *étant deux intégrales particulières de l'équation sans second membre*

$$y''+\lambda^2 y=0.$$

Pourrait-on déterminer a priori *ces deux intégrales* y_1 *et* y_2 ? (Juillet 1913.)

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x+2x^2+y^2)\,dy+y(1-x)\,dx=0;$$

sachant qu'elle admet un facteur intégrant P^α, *où* α *est une constante et* P *un polynome en* x *et* y *qui est du premier degré en* x.

Trouver tous les facteurs intégrants de cette équation.

(Juillet 1913.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère une famille de courbes* Γ, *représentée dans un système d'axes rectangulaires par les deux équations*

$$x^2 + y^2 + mz^2 = a, \qquad xy\, e^{\varphi(x)} = b,$$

où m *est une constante donnée; a et b sont deux paramètres variables. On demande de déterminer la fonction* $\varphi(x)$ *de façon que ces courbes* Γ *soient les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces* S *et de trouver ces surfaces* S.

Cas particulier : $m = 1$, $m = 2$.

II. *On demande la valeur de l'intégrale définie*

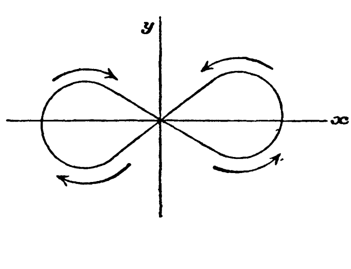
$$I = \int_C \frac{\operatorname{Log}(z - x)}{zn + 1}\, dz$$

prise le long du cercle C *de rayon* un *ayant pour centre l'origine dans le plan de la variable complexe z.*

On supposera le cercle décrit dans le sens direct à partir du point A $(z = 1)$; x *est l'affixe d'un point intérieur ou extérieur à* C, n *est un nombre entier positif ou négatif différent de zéro.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int xy(dx + dy)$$



étendue à la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2,$$

parcourue dans le sens indiqué par les flèches.

(Octobre 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Par l'origine on mène les parallèles aux tangentes d'une courbe gauche* Γ, *elles forment un cône* C. *On appelle* C_1 *le cône construit de la même façon avec les parallèles aux binormales de* Γ.

Relations géométriques entre les deux cônes C *et* C_1. *Intersection de ces deux cônes avec la sphère de centre* O *et de rayon unité.*

Les courbes Γ_1 *dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de* C_1 *ont leurs binormales parallèles aux génératrices de* C.

2° *Le cône* C *est donné; on se propose de chercher les courbes* Γ *qui lui correspondent.*

Soient $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ *les paramètres directeurs d'une génératrice quelconque de* C : *les équations*

$$\frac{dx}{f(t)} = \frac{dy}{g(t)} = \frac{dz}{h(t)}$$

sont les équations différentielles des courbes Γ. *On égale les trois rapports à* $F(t)\,dt$, *où* F *est une courbe arbitraire;* x, y, z *s'obtiennent par trois quadratures.*

3° *Si l'on forme l'équation du plan tangent au cône* C *le long de la génératrice* (t), *soit*

$$x\,u(t) + y\,v(t) + z\,w(t) = 0;$$

l'enveloppe du plan mobile

$$x\,u(t) + y\,v(t) + z\,w(t) + h(t) = 0,$$

où $h(t)$ *est une fonction arbitraire, mais choisie une fois pour toutes. est une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe* C *cherchée.*

Comparer avec le numéro précédent.

4° *Comme application déterminer toutes les courbes gauches dont le cône C est du second degré.*

On prend pour plan zOx *un plan de symétrie du cône, pour* Oz *l'une des génératrices suivant lesquelles ce plan coupe le cône; les équations différentielles sont alors*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{t} = \frac{dz}{at^2+b} = \varphi'''(t)\,dt,$$

où a *et* b *sont deux constantes,* φ *une fonction arbitraire. Les quadratures se font complétement, les effectuer.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° z *étant une fonction de* x *et* y, p *et* q *désignant* $\frac{dz}{dx}$ *et* $\frac{dz}{dy}$, *on considère les deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{x^2-y^2}{x} + z\,\mathrm{P}(x,y), \\[2ex] q = \dfrac{y^2-x^2}{y} + z\,\mathrm{Q}(x,y), \end{cases}$$

où P *et* Q *sont deux fonctions données de* x *et* y. *Former de deux façons différentes* $s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}$ *et en conclure que si l'on n'a pas les deux relations*

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}, \\[2ex] \mathrm{P}x + \mathrm{Q}y = 2, \end{cases}$$

il y a zéro *ou* une seule *fonction* z *susceptible de vérifier le système* (1).

2° *Intégrer le système* (2) *en remarquant que l'on peut poser*

$$\mathrm{P} = \frac{\partial\,\mathrm{U}(x,y)}{\partial x}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{\partial\,\mathrm{U}(x,y)}{\partial y},$$

où U *est une nouvelle fonction inconnue qui vérifiera l'équation*

$$(3)\qquad x\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = 2.$$

Vérifier que l'intégrale générale de (3) *est*

$$U = \log xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ *est une fonction arbitraire.*

3° *Si* φ *se réduit à une constante, on a*

$$P = \frac{1}{x}, \qquad Q = \frac{1}{y}.$$

Vérifier que l'intégrale générale du système (1) *est, dans ce cas,*

$$z = x^2 + y^2 + Cxy,$$

où C *est une constante arbitraire.*

(Novembre 1913.)