Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 526-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__526_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1795.

(1898, p. 196)

Parmi les triangles qui ont pour côtés trois entiers consécutifs, il n'en est qu'un seul dans lequel le rapport de deux angles soit un entier : c'est le triangle qui a pour côtés 4, 5, 6 ; *dans ce triangle, un angle est double de l'autre.*

M. WEILL.

SOLUTION.

Par M. H. BROCARD.

Soient les côtés $n+1$, n, $n-1$ opposés aux angles A, B, C. On aura

$$\frac{\sin A}{n+1} = \frac{\sin B}{n} = \frac{\sin C}{n-1}$$

et

$$2\cos A = \frac{n-4}{n-1},$$

$$2\cos B = \frac{n^2+2}{n^2-1},$$

$$2\cos C = \frac{n+4}{n+1};$$

et alors il faut que l'un des rapports de deux sinus soit égal à l'un des nombres $2\cos A$, $2\cos B$, $2\cos C$; l'angle correspondant étant celui du dénominateur.

En d'autres termes, l'équation en n ainsi obtenue doit admettre une racine entière.

C'est ce qui a lieu seulement pour l'ensemble des deux égalités

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$2\cos C = \frac{n+4}{n+1},$$

car l'équation

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{n+4}{n+1}$$

se réduit à $n = 5$.

On a donc la relation

$$A = 2C.$$

2215.

(1914, p 96)

Les tangentes communes intérieures à trois cercles d'un même plan, pris deux à deux, sont tangentes à une conique homofocale à une conique inscrite au triangle qui a pour sommets les centres des trois cercles.

THIE.

SOLUTION.

Par M^{lle} ANNE DE PRÉHYR.

Soient S_1, S_2, S_3 les centres de similitude interne des circonférences O_1, O_2, O_3 prises deux à deux.

Les droites O_1S_1, O_2S_2, O_3S_3 étant concourantes, il existe une conique γ inscrite à $O_1O_2O_3$ et circonscrite à $S_1S_2S_3$.

Soit a une des tangentes communes intérieures à O_2 et O_3; a passe par S_1 et il existe une conique γ' homofocale à γ et tangente à a

On sait que les tangentes à γ' par S_1 et S_2 définissent un quadrilatère circonscriptible à un cercle de centre O_3 (Chasles); mais a est une de ces tangentes, et ce cercle est le centre donné en O_3.

Les tangentes déjà menées par S_2 permettent de remplacer S_1 par S_2 sans que γ' change; on pourra ensuite remplacer S_2 par S_3, et ainsi γ' repond à la question.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2216.

(1914, p. 96)

On sait que l'on appelle anneau *le volume engendré par le segment compris entre un arc de courbe* AB *et sa corde, tournant autour d'un axe* X *situé dans son plan et ne le rencontrant pas; la distance des projections orthogonales* *des points* A *et* B *sur l'axe* X *est la hauteur de cet anneau. Démontrer que, si l'arc* AB *appartient à une conique admettant* X *comme axe de symétrie, le centre de gravité de l'anneau est le milieu de sa hauteur.*

M. d'Ocagne.

Solution.

Par Mlle Anne de Preuyr.

Le calcul suivant prouve que le théorème de M. d'Ocagne reste vrai quand on remplace la droite AB par un arc de conique dont l'axe X est aussi un axe de symétrie.

La question revient à démontrer qu'avec

$$Y^2 = ax^2 + bx + c,$$

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta x + c$$

et

$$Y_1 = y_1 \qquad (\text{pour } x = x_1),$$

on a

$$2\int_0^{x_1} x(Y^2 - y^2)\,dx = x_1 \int_0^{x_1} (Y^2 - y^2)\,dx$$

ou encore

$$(1) \qquad \int_0^{x_1} (2x - x_1)(Y^2 - y^2)\,dx = 0.$$

On a successivement

$$\int_0^{x_1} (2x - x_1)(a - \alpha)x^2\,dx = \frac{1}{6}(a - \alpha)x_1^4,$$

$$\int_0^{x_1} (2x - x_1)(b - \beta)x\,dx = \frac{1}{6}(b - \beta)x_1^3.$$

Le premier membre de la formule (1) est donc égal à

$$\frac{1}{6}(a - \alpha)x_1^4 + \frac{1}{6}(b - \beta)x_1^3 = \frac{1}{6}(Y_1 - y_1)x_1^2 = 0.$$

C. Q. F. T.

Autre solution par M. R. Bouvaist.