NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Détermination de la tangente et du rayon de courbure en un point de certaines courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 337-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__337_0>

[O[1]2b,e]

DÉTERMINATION DE LA TANGENTE ET DU RAYON DE COURBURE EN UN POINT DE CERTAINES COURBES PLANES;

Par M. R. BOUVAIST.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorème. — *Soient* $f + \lambda\varphi = 0$ *un faisceau linéaire de courbes algébriques planes, les courbes de base* f *et* φ *étant de degrés* m *et* n, *et* Γ *la courbe du faisceau passant par un point* O *du plan.*

1° *La tangente à* Γ *en* O *passe par l'intersection des droites polaires de* O *par rapport à* f *et* φ.

2° *Si* Q *et* Q_1, Q' *et* Q'_1 *sont les intersections de la tangente en* O *avec les coniques polaires de* O *par rapport à* f *et* φ, P *et* P' *les intersections de la normale en* O *avec les droites polaires de ce point par rapport à* f *et* φ, *le rayon de courbure de la courbe* Γ *au point* O *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{\dfrac{m}{\mathrm{OP}} - \dfrac{n}{\mathrm{OP'}}}{\dfrac{m(m-1)}{\mathrm{OQ}.\mathrm{OQ'}} - \dfrac{n(n-1)}{\mathrm{OQ_1}.\mathrm{OQ'_1}}}.$$

1° Les droites polaires du point O par rapport à toutes les courbes du faisceau $f + \lambda\varphi$ passent par un point fixe, qui doit être sur la tangente en O à Γ, tangente qui est la polaire de O par rapport à Γ.

2° Soient

$$f = f_m + f_{m-1} + \ldots + \mathrm{A}\,x^2 + 2\mathrm{B}\,xy + \mathrm{C}\,y^2 + 2\mathrm{D}\,x + 2\mathrm{E}\,y + \mathrm{F} = 0,$$

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 + 2\mathrm{D}'x + 2\mathrm{E}'y + \mathrm{F}' = 0$$

les courbes de base du faisceau, les axes étant la tangente et la normale en O à la courbe Γ. Si ρ est le rayon de courbure de Γ en O, on a

$$\rho = \frac{f'_y + \lambda\varphi'_y}{f''_{x^2} + \lambda\varphi''_{y^2}} = \frac{E + \lambda E'}{A + \lambda A'},$$

ou, puisque $F + \lambda F' = 0$,

$$\rho = \frac{\frac{E}{F} - \frac{E'}{F'}}{\frac{A}{F} - \frac{A'}{F'}}.$$

Les droites polaires de O par rapport à f et φ sont

$$2D\,x + 2E\,y + mF = 0,$$
$$2D'x + 2E'y + nF' = 0;$$

les coniques polaires sont

$$A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + (m-1)(2D\,x + 2E\,y) + \frac{m(m-1)}{2}F = 0,$$

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + (n-1)(2D'x + 2E'y) + \frac{n(n-1)}{2}F' = 0;$$

on en déduit

$$OP = -\frac{mF}{2E}, \qquad OP' = -\frac{nF}{2E'},$$

$$OQ.OQ_1 = \frac{m(m-1)}{2}\,\frac{F}{A}, \qquad OQ'.OQ'_1 = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{F'}{A'},$$

d'où

$$\rho = -\frac{\frac{m}{OP} - \frac{n}{OP'}}{\frac{m(m-1)}{OQ.OQ'} - \frac{n(n-1)}{OQ_1.OQ'_1}}.$$

Remarque. — Si l'on désigne par $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les points d'intersection d'une droite $OA_1A_2\ldots$ avec f, la droite polaire de O par rapport à f est le lieu des points P, tels que

$$\frac{m}{OP} = \sum_1^m \frac{1}{A_i},$$

la conique polaire de O par rapport à f est de même le lieu des points Q tels que

$$\sum_1^m \left(\frac{1}{OQ} - \frac{1}{OA_i}\right)\left(\frac{1}{OQ} - \frac{1}{OA_j}\right) = 0;$$

on voit donc que, si l'on peut déterminer les points d'intersection de deux droites passant par O avec f et φ, on peut construire la tangente en O à Γ, et si de plus on peut déterminer les intersections de cette tangente avec f et φ, on peut construire le rayon de courbure de Γ en O.

Construction de la formule

$$\rho = \frac{\dfrac{m}{OP} - \dfrac{n}{OP'}}{\dfrac{m(m-1)}{OQ.OQ'} - \dfrac{n(n-1)}{OQ_1.OQ'_1}}.$$

La droite

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{OQ.OQ_1}{\lambda m(m-1)} & \dfrac{OQ.OQ_1}{(m-1)OP} & 1 \\ \dfrac{OQ'.OQ'_1)}{\lambda n(n-1)} & \dfrac{OQ'.OQ'_1}{(n-1)OP'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coupe visiblement la normale Oy au point d'ordonnée ρ. Le cercle PQQ_1 coupe Oy en P_1; le cercle PP_1A, A étant un point quelconque de Ox, coupe Ox en R; on a

$$OP_1 = \frac{OQ.OQ_1}{OP} \quad \text{et} \quad OR = \frac{OP.OP_1}{OA} = \frac{OQ.OQ_1}{OA};$$

de P_1 et R on déduit le point S de coordonnées

$$\frac{OR}{m(m-1)}, \frac{OP_1}{m-1};$$

on construit de même le point S' en partant des points P', Q', Q'_1; la droite TS' coupe Oy en T et l'on a $OT = \rho$.

Cas particuliers. — 1° *Courbes* $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n = K^n$. — Nous supposons que $\Delta_i \equiv x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i - p_i$; les courbes considérées sont donc les courbes n'ayant pas de points communs à distances finies avec leurs asymptotes.

Détermination de la tangente. — Dans le cas actuel, la courbe φ est la droite de l'infini; la tangente en un point O de la courbe considérée est donc parallèle à sa droite polaire par rapport aux asymptotes.

Détermination du rayon de courbure. — La formule générale donne $(n-1)\rho = \dfrac{OQ.OQ'}{OP}$, le cercle PQQ' coupe la normale en N et $ON = (n-1)\rho$. Les points Q et Q' sont d'ailleurs symétriques par rapport à O. Dans le cas des coniques, on a les propositions suivantes :

La tangente en un point M *d'une hyperbole coupe les asymptotes en* A *et* B; *la parallèle à* AB, *menée par le centre de la courbe, coupe la normale en* M *au point* N; *le cercle* ABN *coupe la normale en un point* N' *tel que* MN' *est égal au rayon de courbure en* M.

Et encore :

OA *et* OB *étant un couple de diamètres conjugués d'une ellipse de centre* O, *la perpendiculaire abaissée de* O *sur la tangente en* A *coupe cette tangente en* P, *la perpendiculaire élevée en* B *à la droite* PB *coupe* OP *en* P', PP' *est égal au rayon de courbure ou point* A.

Remarquons aussi que la méthode ci-dessus s'applique à la conchoïde de Külp $x^2(y^2+a^2)-a^4=0$ (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 193).

2° *Courbes du troisième ordre.* — L'équation d'une courbe de degré m peut s'écrire sous la forme $\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_m+\varphi_{m-2}=0$, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_m étant les asymptotes de la courbe, φ_{m-2} un polynome de degré $m-2$ en x et y; la méthode générale s'appliquera donc à toutes les courbes, telles qu'on puisse déterminer la droite et la conique polaire d'un point par rapport à la courbe $\varphi_{m-2}=0$: c'est le cas des courbes du troisième ordre pour lesquelles on a $\Delta_1\Delta_2\Delta_3+a^2\Delta_4=0$; on voit donc que :

La tangente en un point quelconque d'une courbe du troisième ordre passe par l'intersection de la droite polaire de ce point par rapport aux asymptotes, et de la droite joignant les points d'intersection de la courbe et des asymptotes.

La formule générale donne pour expression du rayon de courbure

$$\rho=\frac{\text{OQ.OQ}'}{2\,\text{OP}}-\frac{\text{OQ.OQ}'}{6\,\text{OP}'},$$

expression qui se construit immédiatement.

Remarquons enfin que la détermination de la droite et de la conique polaire d'un point par rapport à trois droites est particulièrement simple; on sait en effet que si O est le point donné et ABC le triangle des trois droites, les droites AO, BO, CO coupent BC, CA, AB en α, β, γ; les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ coupent BC, CA, AB en L, M, N; la droite LMN est la droite polaire de O, et la conique polaire est circonscrite au triangle ABC et admet pour tangentes en A, B, C les droites LA, MB, NC.

3° *Courbes du quatrième ordre.* — Pour ces courbes on a

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 + a^2 \varphi_2 = 0,$$

la courbe $\varphi_2 = 0$ étant une conique; donc :

La tangente en un point d'une courbe du quatrième ordre passe par l'intersection des droites polaires de ce point par rapport aux asymptotes, et par rapport à la conique passant par les points d'intersection à distance finie de la courbe et de ses asymptotes.

Le rayon de courbure s'obtiendra en construisant, comme il a été dit plus haut, la formule générale.

Remarque. — Pour obtenir la droite et la conique polaire d'un point par rapport à quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, on remarquera que la droite et la conique cherchées coupent Δ_4 par exemple aux points d'intersection de cette droite avec la droite et la conique polaire du point donné par rapport à Δ_1, Δ_2, Δ_3. On construirait de même la droite et la conique polaire d'un point par rapport à un système de n droites.

4° *Courbes d'ordre supérieur au quatrième.* — Pour ces courbes $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_p + \varphi_{p-2} = 0$ la méthode ne s'appliquera que si la courbe $\varphi_{p-2} = 0$ se décompose en un système de droites et de coniques, tout au moins dans le cas général. Remarquons encore que la méthode générale s'applique aux courbes

$$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n + \lambda \Delta'_1 \Delta'_2 \ldots \Delta'_p = 0$$

ou

$$\Delta_i \equiv x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i;$$

elle conduit en particulier à une solution très simple du problème suivant : *Construire le rayon de courbure* *en un point d'une conique déterminée par cinq points.*

Remarque. — La nature des points à l'infini d'une courbe pouvant modifier à la fois la construction de la droite et de la conique polaire d'un point par rapport aux asymptotes, et la courbe φ_{p-2}, on aurait, en envisageant les divers cas qui peuvent se présenter, un grand nombre de propositions particulières qui ne peuvent trouver place dans un exposé aussi sommaire.

En voici quelques exemples :

Soient Γ *une cubique admettant une asymptote simple* D *coupant la courbe en* A, *et une asymptote de rebroussement* Δ, M *un point de la courbe, la parallèle à* D *menée par* M *coupe* Δ *en* M_1; *si l'on prend sur* OM_1 *le point* M'_1 *tel que* $\overline{OM'_1} = 3\,\overline{OM_1}$, *la droite passant par* M'_1 *et l'intersection de* D *et de* Δ, *coupe la parallèle à* Δ *menée par* A *en* T; TM *est la tangente à* Γ *en* M.

Soit Γ *une cubique circulaire passant par son foyer singulier* F *et d'asymptote* D; *soient* M *un point de la courbe,* Δ *la perpendiculaire menée à* MF *en* F, *les parallèles à* D *et* Δ *menées par* M *coupent* Δ *en* M_1, D *en* M_2; *si l'on prend sur* OM_1 *et* OM_2 *les points* M'_1 *et* M'_2 *tels que* $\overline{OM'_1} = \frac{3}{2}\overline{OM_1}$, $\overline{OM'_2} = 3\,\overline{OM_2}$, *la droite* $M'_1M'_2$ *coupe la tangente en* F *à* Γ *en* T, TM *est la tangente à* Γ *en* M.

Soit Γ *une quartique bicirculaire à asymptotes d'inflexion; soient* M *un point de cette courbe,* F *et* F' *les foyers singuliers; la tangente en* M *à* Γ *est parallèle à la polaire de* M *par rapport aux perpendiculaires en* F *et* F' *à* MF *et* MF'.

DEUXIÈME PARTIE.

Considérons dans le plan n points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et supposons que les distances $r_1, r_2, \ldots, r_n$ d'un point variable O à ces points fixes soient liées par la relation $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$; dans ces conditions le point O décrit une courbe C; déterminons la tangente et le rayon de courbure en O à cette courbe.

Prenons pour axes la tangente et la normale en O à C; nous avons

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f'_x = \sum_1^n f'_{r_i} r'_{ix} = 0,$$

ou, en désignant par α_i l'angle $\widehat{xOP_i}$,

$$\sum_1^n f'_{r_i} \cos\alpha_i = 0;$$

donc : la normale au point O de la courbe C est la résultante des vecteurs $\overline{OS}_i = f'_{ri}$ portés sur OP_i.

Cette construction est bien connue.

Le rayon ρ en O est donné par la formule

$$\rho = \frac{f'_y}{f''_{x^2}},$$

d'où, en remarquant que

$$r'_{ix} = \cos\alpha_i \qquad \text{et} \qquad r''_{ix^2} = \frac{\sin^2\alpha_i}{r_i},$$
$$r'_{iy} = \sin\alpha_i :$$

$$\rho = \frac{\displaystyle\sum_1^n f'_{r_i} \sin\alpha_i}{\displaystyle\sum_1^n \left(f''_{r_i^2} \cos^2\alpha_i + 2 f''_{r_i r_j} \cos\alpha_i \cos\alpha_j\right) + \sum_1^n f'_{r_i} \frac{\sin^2\alpha_i}{r_i}}.$$

Cette formule conduit à des constructions géométriques simples dans un certain nombre de cas que nous allons étudier rapidement.

1° *Courbes* $n_1 r_1 + n_2 r_2 + \ldots + n_n r_n = \mathrm{K}$. — Nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum \dfrac{n_i \sin^2 \alpha_i}{r_i}}{\sum n_i \sin \alpha_i};$$

la perpendiculaire élevée en P_i à la droite OP_i coupe la normale en O au point N_i et l'on a

$$\frac{\sin \alpha_i}{r_i} = \frac{1}{\mathrm{ON}_i},$$

d'où

$$\frac{\sum n_i \sin \alpha_i}{\rho} = \sum \left(\frac{n_i \sin \alpha_i}{\mathrm{ON}_i} \right).$$

Pour déterminer la normale en O nous avons porté sur les droites OP_i des segments $\mathrm{OS}_i = n_i$ et nous avons pris leur résultante, la longueur de cette résultante est égale à $\Sigma\, n_i \sin \alpha_i$, et si T_i est la projection de S_i sur la normale, $\mathrm{OT}_i = n_i \sin \alpha_i$. Nous sommes donc ramenés à construire un segment ρ déterminé par la relation

$$\frac{m + n + \ldots + k + l}{\rho} = \frac{m}{\mathrm{ON}_1} + \frac{n}{\mathrm{ON}_2} + \ldots + \frac{l}{\mathrm{ON}_n},$$

connaissant les quantités m, n, ..., l et les points $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{N}_n$. La construction est immédiate, il suffit de déterminer les points N'_i tels que $\mathrm{ON}_i . \mathrm{ON}'_i = \mathrm{K}^2$, de construire le point C′ tels que

$$\mathrm{OC}' = \frac{m\,\mathrm{ON}'_1 + n\,\mathrm{ON}'_2 + \ldots + l\,\mathrm{ON}'_n}{m + n + \ldots + k + l},$$

et enfin le point C tel que $\mathrm{OC}.\mathrm{OC}' = \mathrm{K}^2$; le point C sera le centre de courbure cherché.

Remarque. — Parmi les courbes étudiées se trouvent les quartiques bicirculaires pour lesquelles, r_1, r_2, r_3 désignant les distances d'un point de la courbe à trois foyers, on a $lr_1 + mr_2 + nr_3 = 0$, et les cubiques circulaires qui correspondent au cas où $l \pm m \pm n = 0$.

Cas particulier. — Un cas particulièrement simple est celui des cartésiennes pour lesquelles on a $n_1 r_1 + n_2 r_2 = K$.

Supposons par exemple n_1 et n_2 de même signe, la normale sera comprise entre les droites FO, F′O, F et F′ étant les foyers (cette supposition ne diminue d'ailleurs en rien la généralité du raisonnement qui va suivre); soit xOx' la tangente en O; posons

$$\widehat{FOx} = \alpha, \qquad \widehat{F'Ox'} = \beta;$$

nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{n_1 \sin^2\alpha}{r_1} + \dfrac{n_2 \sin^2\beta}{r_2}}{n_1 \sin\alpha + n_2 \sin\beta};$$

nous avons aussi $n_1 \cos\alpha = n_2 \cos\beta$ et en désignant par N l'intersection de la normale avec FF′ :

$$ON(r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta) = r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta),$$

d'où

$$\frac{r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta}{\rho} = r_2 \cos\beta \frac{\sin^2\alpha}{ON} + r_1 \cos\alpha \frac{\sin^2\beta}{ON},$$

la perpendiculaire élevée à ON en N coupe OF en A, OF′ en A′; les perpendiculaires à ces droites en A et A′ coupent ON en B et B′; on a

$$\frac{\sin^2\alpha}{ON} = \frac{1}{OB}, \qquad \frac{\sin^2\beta}{ON} = \frac{1}{OB'},$$

d'où

$$\frac{r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta}{\rho} = \frac{r_2 \cos\beta}{OB} + \frac{r_1 \cos\alpha}{OB'},$$

relation qui montre que le rapport anharmonique $\frac{OB}{OB'} : \frac{CB}{CB'}$ est égal à $\frac{r_2 \cos\beta}{r_1 \cos\alpha} = \frac{O\varphi'}{O\varphi}$, C désignant le centre de courbure en O, φ et φ' les projections de F et F′ sur la tangente xOx', d'où la construction suivante :

Soit O *un point d'une cartésienne de foyers* F *et* F′, *soit* N *le point d'intersection de la normale en* O *avec* FF′, *soient* φ *et* φ' *les projections de* F *et* F′ *sur la tangente en* O; *la perpendiculaire à* ON *en* N *coupe* OF, OF′ *en* A *et* A′, *les perpendiculaires à ces droites en* A *et* A′ *coupent* ON *en* B *et* B′, *les droites* Bφ' *et* B′φ *se coupent en* K, *la projection du point* K *sur* ON *est le centre de courbure en* O.

Remarque. — Si $n_1 = \pm 1$, $n_2 = \pm 1$, on retrouve la construction classique du centre de courbure en un point d'une conique.

2° *Courbes* $r_1 r_2 \ldots r_n = K^n$. — On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\cos\alpha_i \cos\alpha_j}{r_i r_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin^2\alpha_i}{r_2^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\alpha_i}{r_i}},$$

ou, en désignant par T_i et N_i les points d'intersection de la perpendiculaire en P_i à OP_i avec la tangente et la normale en O,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum \frac{1}{OT_i OT_j} + \sum \frac{1}{\overline{ON}_i^2}}{\sum \frac{1}{ON'_i}}.$$

Posons

$$OT_i . OT_j = \overline{OM}_i^2, \qquad OM_i . OM'_i = l^2, \qquad ON_i . ON'_i = l^2,$$

nous aurons

$$\frac{l^2}{\rho} = \frac{\sum \overline{\mathrm{OM}'_i}^2 + \sum \overline{\mathrm{ON}'_i}^2}{\sum \mathrm{ON}'_i};$$

une suite de moyennes proportionnelles donnera donc le segment ρ.

Cassiniennes. — L'équation des cassiniennes est $r_1 r_2 = \mathrm{K}^2$; en employant les notations qui nous ont servi dans le cas des cartésiennes, nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r_2^2 \sin^2\alpha + r_1^2 \sin^2\beta - 2 r_1 r_2 \cos\alpha \cos\beta}{r_1 r_2 (\sin\alpha\, r_2 + \sin\beta\, r_1)},$$

d'où, en tenant compte des relations

$$r_2 \cos\alpha = r_1 \cos\beta,$$

$$\mathrm{ON}(r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta) = r_1 r_2 \sin(\alpha + \beta):$$

$$(\alpha) \qquad \frac{r_2 \cos\beta + r_1 \cos\alpha}{\rho} = r_2 \cos\beta \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{\mathrm{ON}} + r_1 \cos\alpha \frac{\cos(\pi - 2\beta)}{\mathrm{ON}},$$

et le raisonnement employé dans le cas des cartésiennes nous conduit à la construction suivante :

Soient O *un point d'une cassinienne de foyers* F *et* F', N *le point d'intersection de la normale en* O *avec* FF', φ *et* φ' *les projections de* F *et* F' *sur la tangente en* O; *la perpendiculaire à* ON *en* N *rencontre les droites* OA *et* OA' *symétriques de la normale* ON *par rapport à* OF, OF' *en* A *et* A'; *si l'on porte sur* ON *les segments* $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}'} = \overline{\mathrm{OA}'}$ *et que l'on joigne les points* B, φ', B', φ, *les droites* Bφ', Bφ *se coupent en* K, *la projection de* K *sur* ON *est le centre de courbure en* O.

Remarque. — Précisons la construction précédente; elle se déduit immédiatement de la formule (α), qui peut s'écrire

$$\frac{O\varphi' + O\varphi}{OC} = \frac{O\varphi'}{OB} + \frac{O\varphi}{OB'},$$

avec

$$\frac{1}{OB} = \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{ON},$$

$$\frac{1}{OB'} = \frac{\cos(\pi - 2\beta)}{ON};$$

l'équation de la courbe étant $r_1 r_2 = K^2$, la normale est toujours située dans l'angle FOF$'$, et l'on a $\alpha + \beta < \pi$, un seul des cosinus, $\cos(\pi - 2\alpha)$, $\cos(\pi - 2\beta)$ peut être négatif; la construction précédente sera absolument générale, si l'on porte le segment OB correspondant au cosinus positif dans le sens ON, le segment OB$'$ correspondant au cosinus négatif dans le sens opposé.

Généralisation. — Considérons d'une façon plus générale la courbe $r_1^m r^n = K^{m+n}$; la formule générale appliquée à ce cas particulier donne, si l'on tient compte de la relation $m r_2 \cos\alpha = n r_1 \cos\beta$,

$$\frac{r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta}{\rho}$$
$$= r_2 \cos\beta \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{ON} + r_1 \cos\alpha \frac{\cos(\pi - 2\beta)}{ON},$$

formule identique à celle trouvée dans le cas des cassiniennes; la construction donnée du centre de courbure en un point de ces courbes s'applique donc aux courbes $r_1^m r_2^n = K^{m+n}$ quels que soient les exposants m et n.

3° *Courbes* $p_1 r_1^{\lambda_1} + p_2 r_2^{\lambda_2} + \ldots + p_n r_n^{\lambda_n} + K^9$. —

Nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i r_i^{\lambda_i-2}[(\lambda_i - 1)\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i]}{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i r_i^{\lambda_i-1}\sin\alpha_i},$$

ou, en posant $\lambda_i p_i r_i^{\lambda_i-1} = \mu^{q-2} a_i$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{r_i}[(\lambda_i - 1)\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i]}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i \sin\alpha_i};$$

on obtiendra donc ρ par une série de quatrièmes proportionnelles.

Cas particulier. — Dans le cas de la courbe $p r_1^m + q r_2^n = K^p$, on a

$$\begin{aligned}\frac{r_1\cos\alpha + r_2\cos\beta}{\rho} = {} & \frac{r_2\cos\beta}{ON}[(m-1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha] \\ & + \frac{r_1\cos\alpha}{ON}[(n-1)\cos^2\beta + \sin^2\beta],\end{aligned}$$

formule qui conduit à une construction identique à celle donnée pour les cartésiennes et les cassiniennes, après avoir construit les segments

$$\frac{1}{OB} = \frac{(m-1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{ON},$$

$$\frac{1}{OB'} = \frac{(n-1)\cos^2\beta + \sin^2\beta}{ON}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Considérons dans le plan un certain nombre n de droites fixes $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, et supposons que les distances d'un point O variable du plan à ces droites soient liées par la relation $f(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n) = 0$ ($\Delta_i = x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i - p_i$); le point O décrit une courbe C, dont nous allons déterminer la tangente et le rayon de courbure en O.

Si les axes sont la tangente et la normale en O, nous aurons

$$y'_x = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \sum f'_{\Delta_i}\cos\alpha_i = 0;$$

donc la tangente en O est la résultante des vecteurs $\overline{OS_i} = f'_{\Delta_i}$ portés sur les perpendiculaires abaissées de O sur les droites fixes.

Quant au rayon de courbure en O, il est donné par la formule

$$\rho = \frac{f'_y}{f''_{x^2}} = \frac{\displaystyle\sum_1^n \sin\alpha_i f'_{\Delta_i}}{\displaystyle\sum_1^n \cos^2\alpha_i f''_{\Delta_i^2} + 2\sum_1^n \cos\alpha_i\cos\alpha_j f''_{\Delta_i\Delta_j}}.$$

Appliquons cette formule à quelques cas particuliers.

1° *Courbes* $n_1\Delta_1^n + n_2\Delta_2^n + \ldots + n_p\Delta_p^n = K^n$. — Nous aurons

$$\rho = \frac{\sum n_i\Delta_i^{n-1}\sin\alpha_i}{(n-1)\sum n_i\Delta_i^{n-2}\cos^2\alpha_i};$$

d'où, en posant $n_i\Delta_i^{n-2} = a^{n-3}u_i$,

$$\rho = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sum u_i\Delta_i\sin\alpha_i}{\sum u_i\cos^2\alpha_i},$$

formule que l'on construira par une série de quatrièmes proportionnelles.

Cas particulier. — Supposons $n_i = 1$, $n = 2$,

$$\rho = \frac{\sum_1^n \Delta_i \sin \alpha_i}{\sum_1^n \cos^2 \alpha_i}.$$

La parallèle à une droite Δ_i, menée par O, coupe en M_i la parallèle à la tangente, menée par l'extrémité du vecteur résultant des distances du point O aux droites Δ_i; la perpendiculaire à OM_i en M_i coupe la normale en N_i, et l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \sum_1^n \frac{1}{ON_i},$$

construction qui s'appliquera en particulier pour l'ellipse $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = K^2$ qui admet Δ_1 et Δ_2 pour diamètres conjugués égaux.

2° *Courbes*

$$\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n = K^n, \; \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n + \lambda \Delta'_1 \Delta'_2 \ldots \Delta'_n = K^n.$$

L'application à ces courbes de la méthode ci-dessus conduirait aux mêmes résultats que celle exposée dans la première partie.

QUATRIÈME PARTIE.

Considérons, dans le plan, n points fixes et p droites fixes, et supposons que les distances d'un point variable O du plan à ces points et droites fixes soient liées par la relation $f(r_1, r_2, \ldots, r_n; \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p) = 0$; le point O décrit une courbe C; nous allons déterminer la tangente et le rayon de courbure à C en ce point.

Prenons comme axes la tangente et la normale à C en O. Nous aurons $y'_x = 0$ ou, en désignant par α_i et θ_i les angles que la direction positive de l'axe des x fait avec la droite joignant l'origine au point fixe P_i, et avec la normale menée de l'origine à la droite Δ_i,

$$\sum_1^n \cos\alpha_i f'_{\Delta_i} + \sum_1^p f'_{r_i} \cos\theta_i = 0.$$

La tangente est donc la résultante des vecteurs $\overline{OA}_i = f'_{r_i}$ portés sur les droites OP_i et des vecteurs $\overline{OB}_i = f'_{\Delta_i}$ portés sur les normales issues de O aux droites Δ_i.

Le rayon de courbure en O sera donné par la formule

$$\rho = \frac{f'_y}{f''_{x^2}} = \frac{\displaystyle\sum_1^n f'_{\Delta_i} \sin\alpha_i + \sum_1^p f'_{r_i} \cos\theta_i}{\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_1^n \left(f''_{\Delta_i^2} \cos^2\alpha_i + 2 f''_{\Delta_i\Delta_j} \cos\alpha_i \cos\alpha_j\right) \\ \displaystyle\qquad + 2\sum_1^{n,p} f''_{\Delta_i r_j} \cos\alpha_i \cos\theta_j + \sum_1^p f''_{r_i^2} \cos^2\theta_i\end{array}\right\}}.$$

Cas particuliers. — 1° *Courbe* $r_1 - e\Delta_1 = 0$, *conique de foyer* F, *de directrice* Δ *et d'excentricité* e. — Des formules précédentes on déduit immédiatement que :

La tangente en un point M *d'une conique de foyer* F *et de directrice* Δ *passe par le point d'intersection de la directrice avec la perpendiculaire élevée en* F *à la droite* MF.

La directrice Δ *et la perpendiculaire élevée en* F *à* MF *coupent la tangente et la normale, en* A *et* B, P *et* Q; *l'antiparallèle à* AB, *menée par* A, *coupe la normale en* B'; *l'antiparallèle à* BP, *menée par* B′, *coupe la tangente en* A′; *la parallèle à la tangente menée par* B′ *coupe la parallèle à la normale menée par* A′ *en* N, *la droite* FN *coupe la normale en* N′, ON′ *est égal au rayon de courbure en* O.

2° Considérons comme deuxième et dernier exemple *les cubiques circulaires* $r_1^2\Delta_1 - a^2\Delta_2 = 0$; l'application des formules données montre que :

La symétrique de l'asymptote par rapport à un point M *d'une cubique circulaire de foyer singulier* F *coupe la droite joignant les points d'intersection de la cubique et de ses asymptotes en* P; *la conjuguée harmonique de* MP *par rapport à ces deux droites coupe la perpendiculaire élevée en* F *à* MF *en* Q, MQ *est la tangente en* M.

La formule du rayon de courbure nous conduirait à une construction identique à celle indiquée dans la première Partie.