Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Platrier

Sur les variations de la déterminante et de la résolvante de Fredholm avec le champ d'intégration

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 183-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__183_1>

[H11c]

SUR LES VARIATIONS DE LA DÉTERMINANTE ET DE LA RÉSOLVANTE DE FREDHOLM AVEC LE CHAMP D'INTÉGRATION;

PAR M. CH. PLATRIER,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

1. Soient (S) un domaine du plan complexe contenant le segment réel (o — 1), α une variable réelle comprise entre o et 1, $H(x,y)$ une fonction holomorphe pour x et y situés dans le domaine (S), M une limite supérieure de $|H(x,y)|$ pour ces valeurs de x et y.

Posons

$$H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} H(x_1, y_1) & \ldots & H(x_1, y_\varpi) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ H(x_\varpi, y_1) & \ldots & H(x_\varpi, y_\varpi) \end{vmatrix},$$

et considérons la déterminante de Fredholm :

$$(1)\quad D(\lambda, \alpha) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\omega!} \times \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_\varpi \, H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix},$$

son mineur d'ordre q :

$$(2)\quad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\!\!\left|\lambda, \alpha\right)$$

$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\omega}{\omega!} \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_\varpi \, H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}$$

et la résolvante :

$$(3)\qquad \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)}{D(\lambda, \alpha)},$$

laquelle satisfait aux identités :

$$(4)\quad \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha) = H(x, y) + \lambda \int_0^\alpha H(x, s)\, \mathcal{H}(s, y, \lambda, \alpha)\, ds$$

$$= H(x, y) + \lambda \int_0^\alpha H(s, y)\, \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)\, ds.$$

Je me propose de donner des dérivées premières par rapport à α des fonctions (1), (2), (3) certaines expressions qui sont susceptibles d'être utilisées avec profit dans l'étude des nombres fondamentaux du noyau $H(x, y)$ lorsque l'on considère ces nombres comme des fonctions de α.

2. La dérivée par rapport à α du terme $T_\varpi(\alpha)$ de rang ϖ de la série $D(\lambda, \alpha)$ est

$$\frac{d\,T_\varpi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{(-\lambda)^\varpi}{(\omega-1)!} \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_{\varpi-1}\, H\begin{pmatrix} \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi-1} \\ \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi-1} \end{pmatrix}.$$

On le voit facilement en calculant la partie principale de $[T_\varpi(\alpha + \Delta\alpha) - T_\varpi(\alpha)]$ et en tenant compte : d'un côté, de la non-importance du nom des variables d'intégration qui entrent dans les fonctions placées sous les signes $\int_0^\alpha$, et, de l'autre, de la symétrie en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ de la fonction $H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}$.

Or, la série $D(\lambda, \alpha)$ est une série de fonctions holomorphes de α pour α situé dans le domaine (S); de plus, elle est absolument et uniformément convergente pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$; car, d'une part, son terme $T_\varpi(\alpha)$ est moindre que

$$u_\varpi = \frac{|\lambda|^\varpi}{\omega!} M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}},$$

d'après le théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déterminant et, d'autre part,

$$\lim \frac{u_{\varpi+1}}{u_\varpi} = \lim \frac{|\lambda|}{\sqrt{\omega+1}} M\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\frac{\varpi}{2}} = 0.$$

La dérivée de la série $D(\lambda, \alpha)$ par rapport à α s'obtient donc en faisant la somme des dérivées de ses différents termes, et, par suite, si $0 \leqq \alpha \leqq 1$, on a

$$(5) \qquad \frac{\partial D(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{d\, T_\varpi(\alpha)}{d\alpha} = -\lambda\, D\left(\begin{matrix} \alpha \\ \alpha \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right).$$

Nous pouvons écrire aussi l'égalité (5) sous la forme

$$(5\ bis) \qquad \frac{\partial \log D(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = -\lambda\, \mathcal{H}(\alpha, \alpha, \lambda, \alpha).$$

3. La formule

$$(6) \qquad \frac{\partial D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)}{\partial \alpha} = -\lambda\, D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q, \alpha \\ y_1, y_2, \ldots, y_q, \alpha \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)$$

s'établira d'une façon analogue à la formule (5).

4. Enfin, dérivons par rapport à α les deux membres de la première égalité (4), nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha}$$
$$= \lambda\, \mathrm{H}(x, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha) + \lambda \int_0^\alpha \mathrm{H}(x, s) \frac{\partial \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha}\, ds.$$

La méthode de Fredholm pour la résolution de l'équation intégrale linéaire de deuxième espèce permet de déduire de cette égalité la suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda\, \mathrm{H}(x, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha)$$
$$+ \lambda \int_0^\alpha \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)\, \mathrm{H}(s, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha)\, ds$$

soit, en vertu de la seconde égalité (4),

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda\, \mathcal{H}(x, \alpha, \lambda, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha).$$

Les égalités (5), (5 *bis*), (6) et (7) sont les égalités que nous avions en vue.