Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licences en 1912

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 567-571
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__567_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCES EN 1912.

Composition de Mathématiques.
(Sciences. — I.)

PREMIÈRE COMPOSITION.

On considère trois axes Ox, Oy, Oz, *les axes* Ox *et* Oy *étant rectangulaires.*

On donne trois circonférences réelles (C_1), (C_2), (C_3) *rencontrant l'axe* Oz *et situées dans des plans distincts, parallèles au plan* xOy; *on désigne par* O_1, O_2, O_3 *les centres de ces circonférences et par* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ *leurs coordonnées.*

1° *Former l'équation des quadriques passant par deux des courbes* (C_1), (C_2), (C_3).

Toute conique rencontrant chacune des courbes (C_1), (C_2) *en deux points à distance finie est située avec* (C_1) *et* (C_2) *sur une même quadrique.*

A quelles conditions doivent satisfaire les données pour que (C_1), (C_2), (C_3) *soient situées sur une même quadrique?*

On supposera dans la suite que ces conditions ne sont pas vérifiées.

2° *Déterminer les plans* P *coupant chacune des trois courbes* (C_1), (C_2), (C_3), *en deux points à distance finie, les six points obtenus étant situés sur une même conique, soit* (Σ).

Montrer que les plans P *sont parallèles à une direction fixe.*

Lorsqu'on assujettit les plans P *à passer par un point donné* R, *la conique* (Σ) *engendre une surface cubique* (S).

Pour quels points R *la surface* (S) *est-elle décomposée, c'est-à-dire formée d'un plan et d'une quadrique?*

Comment se coupent deux surfaces (S)?

3° *Toute surface cubique passant par* (C_1), (C_2), (C_3) *peut-elle être obtenue d'après la génération précédente?*

On formera l'équation de la surface et l'on cher-

chera à l'écrire à l'aide de surfaces cubiques décomposées vérifiant les conditions imposées.

4° *On choisit les circonférences* (C_1) *et* (C_2) *de rayon nul* (O_1 *et* O_2 *étant alors sur* Oz), *les plans de ces circonférences étant symétriques par rapport au plan* xOy, *et le centre de la circonférence* (C_3) *dans le plan* xOz.

On désigne par (S_1) *la surface* (S) *correspondant à ces données et passant par les axes* Oz *et* Oy.

Les sections de la surface (S_1) *par les plans parallèles à* xOy *et par les plans passant par* Oz *comprennent des circonférences* (C) *et des hyperboles* (H).

Indiquer la forme de la surface (S_1) *en traçant ces sections.*

5° *Exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface* (S_1) *à l'aide de deux paramètres fixant la position des plans des courbes* (C) *et* (H) *passant par ce point.*

Les tangentes aux courbes de l'une des familles (C) *ou* (H) *aux points de rencontre avec une courbe arbitrairement choisie dans l'autre famille engendrent une surface réglée. De quelle nature sont les surfaces réglées ainsi obtenues?*

Comment sont constitués les cônes circonscrits à la surface (S_1) *et dont les sommets sont situés sur* Oz? *les cylindres circonscrits dont les génératrices sont parallèles au plan* xOy?

Composition de Mathématiques.
(Sciences. — I.)

DEUXIÈME COMPOSITION.

Un point matériel M, *de masse égale à un gramme, est attiré par un point fixe* O *avec une force mesurée* *en unités C. G. S. par* $\frac{1}{r^3}$, *r désignant la distance* OM. (*Force inverse du cube de la distance.*)

1° *Discuter la forme de la trajectoire* T *du point* M, *d'après la position et la vitesse de ce point en un instant particulier* t_0, *et caractériser sur cette courbe les deux arcs correspondant respectivement aux instants postérieurs et aux instants antérieurs à* t_0.

2° *Calculer les coordonnées de* M *en fonction du temps. Indiquer les circonstances essentielles du mouvement.*

3° *La valeur arithmétique de la vitesse à l'instant* t_0 *étant donnée, et supposée égale à* v_0, *déterminer le domaine où doit se trouver* M *à ce même instant pour que* M *décrive une spirale, quelle que soit la direction initiale du mouvement.* M *n'appartenant pas à ce domaine à l'instant* t_0, *dans quel angle doit être dirigée la vitesse* v_0 *pour que l'arc suivi par* M *appartienne à une spirale?*

4° *Déterminer, quand elles existent, les asymptotes de* T. *Pour une des branches* τ *de* T, *et son asymptote* A, *calculer l'aire comprise entre* τ, A *et deux rayons vecteurs issus de* O.

5° *Étant donnés deux points* M_0 *et* M, *déterminer les valeurs de* v_0 *telles que le mobile partant de* M_0 *avec une vitesse initiale égale à* v_0 *et perpendiculaire au rayon vecteur* OM_0 *passe en* M *dans le cours ultérieur de son mouvement.*

Composition de Mathématiques.
(Sciences. — II.)

I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + (1 - \alpha^2)y - e^x + \sin^2 x,$$

dans laquelle α *désigne une constante réelle donnée. Discuter suivant les valeurs de* α.

II. *Une courbe plane* (C) *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *la normale au point* M *à la courbe* (C) *rencontre* Ox *en* N *et la parallèle à* Oy *menée par* N *rencontre au point* T *la tangente en* M *à la courbe* (C) :

1° *Déterminer la courbe* (C) *de manière que la longueur* NT *soit égale à une longueur donnée* $2a$;

2° *Soit* (C_0) *celle des courbes* C *qui passe par* O; *désignons par* O′ *celui des points de rencontre de cette courbe* (C_0) *avec* Ox *qui est le plus rapproché du point* O. *Démontrer que l'aire* S, *comprise entre l'arc* OM *de la courbe* (C_0) *et les segments rectilignes* MN *et* NO, *est proportionnelle à l'abscisse du pied* M *de la normale; calculer l'aire* S_0 *comprise entre l'arc* OO′ *et la corde* OO′;

3° *Déterminer la position du point* M *de manière que*

$$S = \frac{1}{4} S_0$$

et calculer ses coordonnées avec deux décimales exactes en supposant, pour ce calcul, $a = 1$.